ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS, TEORÍA Y EJERCICIOS RESUELTOS

Lidia Castro Cepeda

CIDE EDITORIAL

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

TEORÍA Y EJERCICIOS RESUELTOS

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS, TEORÍA Y EJERCICIOS RESUELTOS

Lidia Castro Cepeda

Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

DIRECCIÓN DE PUBLICACIONES

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, teoría y ejercicios resueltos.

Centro de Investigación y Desarrollo Ecuador
Guayaquil, Ecuador
Tel.: + (593) 04 2037524
http.:/www.cidecuador.com

ISBN: 978-9942-844-88-0
Impreso y hecho en Ecuador

Dirección editorial: Lic. Pedro Misacc Naranjo, Msc.
Coordinación técnica: Lic. María J. Delgado
Diseño gráfico: Lic. Danissa Colmenares
Diagramación: Lic. Alba Gil
Fecha de publicación: Junio, 2022

CIDE EDITORIAL

CIDE

Guayaquil - Ecuador

La presente obra fue evaluada por pares académicos experimentados en el área

Catalogación en la fuente

Ecuaciones diferenciales ordinarias, teoría y ejercicios resueltos / Lidia Castro Cepeda. - Ecuador: Editorial CIDE, Junio 2022

169 p.: incluye tablas, gráficos; 21 x 29, 7 cm.

ISBN: 978-9942-844-88-0

1. Ecuaciones diferenciales ordinarias 2. Ecuaciones diferenciales 3. Matemáticas

LIDIA DEL ROCÍO CASTRO CEPEDA

Ecuatoriana, casada, residenciada en Riobamba, es Ingeniera Industrial en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Ecuador (2014), Máster Universitario en Ingeniería de la Energía en la Universidad Politécnica de Madrid, España (2017), Máster Universitario en Ingeniería Matemática y Computación en la Universidad Internacional de la Rioja, España (2021). Docente de educación superior en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo en la Facultad de Mecánica. Autora de artículos de investigación para revistas indexadas regionales y de alto impacto. Ha participado en cursos, talleres, seminarios y congresos a nivel nacional e internacional.

Para mi esposo e hija que son el amor de mi vida.

Este texto pretende brindar a los estudiantes que están cursando la asignatura de Ecuaciones Diferenciales una alternativa para repasar las definiciones y conceptos que les serán de ayuda en el desarrollo de la materia. Este libro consta de ejercicio de Ecuaciones Diferenciales de primero, segundo, y n-ésimo orden, además la resolución de algunas aplicaciones en problemas geométricos y físicos; finalmente se aborda también el uso del operador Transformada de Laplace para el cálculo y resolución de ecuaciones diferenciales lineales.

La característica novedosa y especial de este libro es que se presentan varios ejercicios por cada tema, que incluyen la mayor parte de procedimientos, con el fin de que al lector le quede claro el algoritmo de solución que se ha utilizado y lo pueda aplicar en problemas adicionales. Es un texto que aporta al proceso de ensenanza - aprendizaje de esta asignatura.

1

INTRODUCCIÓN ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

CAPÍTULO 1

Introducción ecuaciones diferenciales ordinarias

1.1. Introducción

Varios de los conceptos físicos, como velocidad o la aceleración, son variables derivadas de otras. Por eso un modelo es muy a menudo una ecuación que contiene derivadas de una función desconocida, que se llama **ecuación diferencial**. El objetivo es encontrar una solución que satisfaga dicha ecuación, que explore sus propiedades a través de gráficas y finalmente encuentre sus valores particulares e interpretarlos en los términos físicos para que se pueda comprender el comportamiento del sistema. Como se muestra en la figura 1.1 donde se detalla el procedimiento para solucionar un problema físico que involucre las características antes descritas [1].

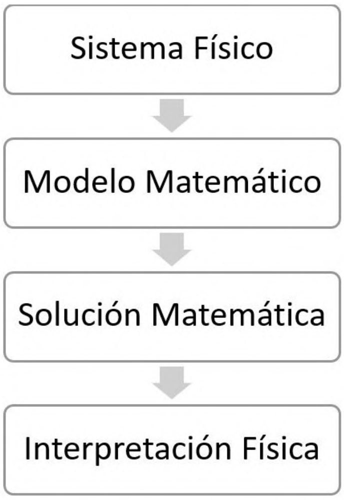

Figura 1.1: Metodología para solución de un sistema físico

1.2. Definiciones básicas y terminología

1.2.1. Definición ecuación diferencial

Se presentas varias definiciones a continuación:

1. Una ecuación diferencial es aquella que tiene una o varias derivadas o diferenciales de la función incógnita [1].
2. Es una ecuación donde la incógnita es la misma función y que depende de una o más variables dependientes y sus derivadas [2].
3. Se llama ecuación diferencial aquella que liga la variable independiente x y la función incógnita y y sus derivadas y',y'',$y^{(n)}$ [3].
4. Una ecuación diferencial, de forma muy sencilla es: una ecuación que contiene **derivadas**.

Una ecuación diferencial tiene la forma:

$$\boldsymbol{F(x, y, y', y'', y''', ..., y^{(n)}) = 0} \tag{1.1}$$

Donde $y = y(x)$ es la función que se busca. Ejemplos:

- $\frac{d^2y}{dx^2} - 2xy\frac{dy}{dx} = e^y$
- $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$

- $(\frac{\partial u}{dx})^2 + \frac{\partial u}{dy} = 0$

- $\frac{d^2u}{dx^2} + 2uv\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{d^2v}{dy^2} = 0$

- $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$

- $L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{c}q = 0$

1.2.2. Origen de las ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales tienen vital importancia en el desarrollo de las matemáticas, ciencias físicas, económicas e ingenierías. A raíz de los estudios e investigaciones propias de las EDO y cómo estas se aplican a otras disciplinas, resulta evidente su alcance por lo que es necesario mostrar de forma resumida como se ha ido desarrollando este aparato conceptual y metodológico hasta llegar a lo que se conoce actualmente [4].

Según se sabe, el primer documento que contenía una definición de diferencial, es una memoria escrita por Leibniz en 1684 este contenía algunas reglas sencillas para el cálculo diferencial, incluyó algunos aplicaciones geométricas pero lamentablemente se sabe que tenía ciertas imprecisiones por lo que resultó confuso para la época, sin embargo esta fue la base fundamental para el desarrollo de la ecuaciones diferenciales y sus soluciones. Fue él, quien por primera vez usó el término *aequatio differentialis* aproximadamente en 1676 [4].

Mientras tanto, Newton entre 1669 a 1676 compuso varios tratados sobre los elementos de las fluxiones, pero no aparecieron hasta 1704. La primera clasificación de las EDO de primer orden fue propuesta por Newton quien resuelve dos problemas principales, formulados tanto en términos mecánicos como en términos matemáticos:

1. Determinación de la velocidad del movimiento en un momento de tiempo dado.

2. Dada la velocidad del movimiento, determinación del espacio recorrido en un tiempo dado.

Las ecuaciones diferenciales aparecen no solo a partir de las familia de curvas geométricas, sino también del intento de describir una variedad de problemas sobre geometría, física, economía, química, biología e ingeniería.

Si se tiene la ecuación de una familia de curvas, se puede obtener su ecuación diferencial:

- Eliminando constantes.

- Aislando parámetros a un solo miembro.

- Derivando.

También se pudo eliminar la constante, derivando la ecuación dada, tantas veces como constantes arbitrarias tenga y se resuelve el sistema formando con la ecuación diferencial.

EJEMPLOS

Ejemplo 1.1 *Demostrar que la función* $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ *es solución de la ecuación* $y'' + y = 0$

Solución:

$$\begin{aligned} y' &= -c_1 \sin x + c_2 \cos x \\ y'' &= -c_1 \cos x - c_2 \sin x \end{aligned}$$

Se reemplaza en la la solución de la ecuación y:

$$\begin{aligned} -c_1 \cos x - c_2 \sin x + c_1 \cos x + c_2 \sin x &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, la expresión dada si es solución.

Ejemplo 1.2 *Dada la relación* $x^2 + y^2 = R^2$. *Comprobar si es solución de la ecuación* $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

Solución:

$$\begin{aligned} 2x + 2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\ 2y\frac{dy}{dx} &= -2x \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \\ -\frac{x}{y} &= -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

Entonces se comprueba que es solución.

NOTA. Antes de resolver el siguiente problema es necesario recodar brevemente la definición de ecuaciones paramétricas.

Ecuaciones paramétricas: cuando una curva, como la que se muestra en la figura 1.2, no puede describirse mediante la ecuación de la forma $y = f(x)$, se recurre a denotar sus posiciones x, y en función del tiempo, que se describen mediante las ecuaciones $x = f(t)$ y $y = g(t)$, estas se denominan **ecuaciones paramétricas**: donde cada valor del parámetro t determina un punto (x, y) en R^2, si este valor de t cambia o se mueve se traza la curva paramétrica [5].

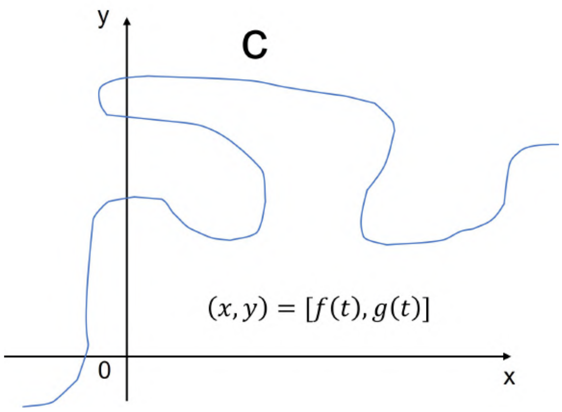

Figura 1.2: Trayectoria de una partícula

Ejemplo 1.3 *Dada las siguientes ecuaciones de forma paramétrica.*

$$\begin{cases} x = t^2 - 2t + 2 \\ y = \frac{2}{3}t^3 - t^2 + c \end{cases}$$

Comprobar que son soluciones de la ecuación diferencial

$$x = (y')^2 - 2y' + 2$$

Solución:

$$\frac{dx}{dt} = 2t - 2 = 2(t-1)$$
$$\frac{dy}{dt} = 2t^2 - 2t = 2t(t-1)$$
$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t(t-1)}{2(t-1} = t$$

$$y' = t$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial

$$x = t^2 - 2t + 2$$

Entonces, se comprueba que son soluciones.

Ejemplo 1.4 *Demostrar que la función* $y = \theta(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + e^{x^2}$ *es solución de la ecuación diferencial:*

$$y' - 2xy = 1$$

Solución:

$$y' = \theta'(x) = 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + e^{x^2} \frac{d}{dx} \int_0^x e^{-t^2} dt + 2xe^{x^2}$$
$$y' = 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + 1 + 2xe^{x^2}$$

Se reemplaza en y'

$$2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + 1 + 2xe^{x^2} - 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt - 2xe^{x^2} = 1$$
$$1 = 1$$

Entonces, se comprueba que es solución.

Ejemplo 1.5 *Obtener la ecuación diferencial asociada con la primitiva:*

$$y = cx^2 + c^2$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= 2cx \\
c &= \frac{1}{2x}\frac{dy}{dx} \\
y &= \frac{1}{2x}x^2\frac{dy}{dx} + \frac{1}{4x^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \\
y &= \frac{x}{2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{4x^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \\
4x^2y &= 2x^3\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2
\end{aligned}$$

La ecuación diferencial asociada es:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x^3\frac{dy}{dx} - 4x^2y = 0$$

Ejemplo 1.6 *Obtener la ecuación diferencial asociada con la primitiva*

$$y = Ae^2x + Be^x + C$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} =& 2Ae^2x + Be^x \\
\frac{d^2y}{dx^2} =& 4Ae^2x + Be^x \\
\frac{d^3y}{dx^3} =& 8Ae^2x + Be^x \\
Be^x =& \frac{dy}{dx} - 2Ae^2x \\
Be^x =& \frac{d^2y}{dx^2} - 4Ae^2x \\
Be^x =& \frac{d^3y}{dx^3} - 8Ae^2x \\
\frac{dy}{dx} - 2Ae^2x =& \frac{d^2y}{dx^2} - 4Ae^2x \\
\frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2} =& -2Ae^2x \\
\frac{d^2y}{dx} - 4Ae^2x =& \frac{d^3y}{dx^3} - 8Ae^2x \\
\frac{d^2y}{dx} - \frac{d^3y}{dx^3} =& -4Ae^2x \\
\frac{d^2y}{dx} - \frac{d^3y}{dx^3} =& -2Ae^2x \\
\frac{d^2y}{dx} - \frac{d^3y}{dx^3} =& -2Ae^2x(2) \\
\frac{d^2y}{dx} - \frac{d^3y}{dx^3} =& 2\frac{dy}{dx} - 2\frac{d^2y}{dx^2}
\end{aligned}$$

La ecuación diferencial asociada será

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx} + 2\frac{dy}{dx} = 0$$

Ejemplo 1.7 *Demostrar que*

$$y = 2x + ce^x$$

Es la primitiva de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} - y = 2(1 - x)$$

Hallar la solución particular satisfecha por $x = 0$, $y = 3$, es decir, la curva integral que pasa por $(0, 3)$.

Graficar la solución.

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = 2 + ce^x$$

$$2 + ce^x - y = 2(1 - x)$$

$$y = 2x + ce^x$$

Por lo que se demuestra que es la primitiva.

Cuando x=0, y=3

$$3 = 2(0) + ce^0$$

$$c = 3$$

La solución particular es:

$$y = 2x + 3e^x$$

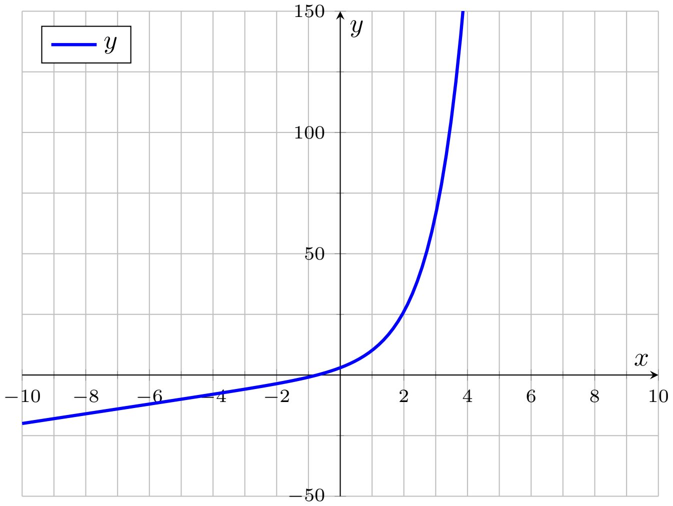

Figura 1.3: Solución particular $y = 2x + 3e^x$

Ejemplo 1.8 *Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es:*

$$y = x^2 + c_1e^x + c_2e^{-2x}$$

Solución:

$$y' = 2x + c_1e^x - 2c_2e^{-2x}$$

$$y - y' = x^2 + c_1e^x + c_2e^{-2x} - 2x - c_1e^x + 2c_2e^{-2x}$$

$$y - y' = x^2 - 2x + 3c_2e^{-2x}$$

$$y' - y'' = 2x - 2 - 6c_2e^{-2x}$$

$$2y - 2y' + y' - y'' = 2x^2 - -4x + 6c_2e^{-2x} + 2x - 2 - 6c_2e^{-2x}$$

$$2y - y' - y'' = 2x^2 - 2x - 2$$

La ecuación diferencial es:

$$y'' + y' - 2y = 2(1 + x - x^2)$$

Ejemplo 1.9 *Encontrar la ecuación diferencial cuya solución es:*

$$y = c_1x + c_2e^{-x}$$

Solución:

$$y' = c_1 - c_2e^{-x}$$

$$y + y' = c_1x + c_2e^{-x} + c_1 - c_2e^{-x}$$

$$y + y' = c_1x + c_1$$

$$y + y' = c_1(x + 1)$$

$$\frac{y + y'}{x + 1} = c_1$$

$$y' + y'' = c_1$$

$$y + y' = (y' + y'')(x + 1)$$

$$y + y' = xy' + xy'' + y'' + y'$$

$$xy'' + y'' + xy' - y = 0$$

La ecuación diferencial es:

$$y''(x + 1) + xy' - y = 0$$

1.3. Clasificación de las ecuaciones diferenciales

Existe una gran variedad de ecuaciones diferenciales: para facilitar su estudio se clasifican según su tipo, orden y grado como se presenta a continuación [6],[7]:

Según su tipo:

1. **Ecuación diferencial ordinaria:** es aquella ecuación que tiene una *sola* variable independiente. De ahora en adelante cuando se trate de estas ecuaciones se utilizará las siglas EDO. Ejemplos:

   - $\frac{dy}{dx} = x + 5$
   - $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$
   - $xy' + y = 3$
   - $y''' + 2(y'')^2 + y' = \cos x$
   - $(y'')^2 + (y')^5 + 3y = x^2$

2. **Ecuación diferencial parcial:** es aquella ecuación que tiene *más* de una variable independiente. De ahora en adelante cuando se trate de estas ecuaciones se utilizará las siglas EDP. Ejemplos:

   - $\frac{\partial z}{\partial x} = z + x\frac{\partial z}{\partial y}$
   - $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y$

Según su orden:

1. Primer orden $\rightarrow F(x, y, y') = 0$

   - $y' = x^2 + 3y - \cos x$
   - $y = x\frac{dy}{dx} + (\frac{dy}{dx})^2$
   - $y = (y' - 1)x + y' + 1$

2. Segundo orden $\rightarrow F(x, y, y', y'') = 0$

   - $y'' + 2y' + 2y = 2(x + 1)^2$
   - $y'' - 3y' + y = \cos x$

- $\frac{dy}{dx}x - y + y\frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2} = k\frac{dy}{dx}$

3. Tercer orden $\rightarrow F(x, y, y', y'', y''') = 0$

   - $6y''' - y'' + 6y - y = 0$
   - $2y''' + y'' - 8y' - 4y$
   - $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} = \sec x$

4. Orden $n \rightarrow F(x, y, y', ...y^n) = 0$

Según su grado:

1. Lineales: la variable dependiente y y todas sus derivadas son de primer grado. Cada coeficiente de y y sus derivadas dependen solamente de la variable independiente x [8].

2. No lineales: las que no cumplen con las propiedades de linealidad [9].

1.4. Orden y grado de una ecuación diferencial

- **Orden**: el orden de una ecuación diferencial, es el *orden* de la derivada de mayor orden que interviene en ella. Ejemplos:

  - $y'' + xyy' = \tan x \rightarrow$ es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden pues su derivada mayor es y''.
  - $x^3yy''' - x^2 = \cos t \rightarrow$ es una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden pues su derivada mayor es y'''
  - $y'x - \sin y' + \cos x = 3xy \rightarrow$ es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden pues su derivada mayor es y'
  - $y' - (y')^3 - \sec x = x^2 \rightarrow$ es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden pues su derivada mayor es y'

- **Grado**: el grado de una ecuación diferencial es el *grado* de la derivada de mayor orden que interviene en ella. Ejemplos:

  - $xy' = 2y \rightarrow$ es una ecuación diferencial ordinaria de grado 1 pues la derivada de mayor orden y' está elevada a 1 y además su orden es 1.

- $\frac{(y')^3-y}{(y'')^2} = 3 \rightarrow$ es una ecuación diferencial ordinaria de grado 2 pues la derivada de mayor orden y'' está elevada a 2 y además su orden es 2.

- $y^{IV} + y'' = \cos 4x \rightarrow$ es una ecuación diferencial ordinaria de grado 1 pues la derivada de mayor orden y^{IV} está elevada a 1 y además su orden es 1.

- $x^2y'' + xy' + 4y = 0 \rightarrow$ es una ecuación diferencial ordinaria de grado 1 pues la derivada de mayor orden y'' está elevada a 1 y además su orden es 2.

Teorema 1.1 ***Teorema de existencia y unicidad:*** *sea una ecuación diferencial $y' = f(x,y)$, donde la función $f(x,y)$ está definida en un entorno D del plano XOY que contiene el punto (x_0, y_0). Si la función $f(x,y)$ satisface las condiciones :*

a $f(x,y)$ es una función continua en dos variables x e y, en el entorno D.

b $f(x,y)$ admite derivada parcial continua con respecto de x e y en el entorno D.

Entonces existe una y solo una solución de la ecuación diferencial dada que satisface la condición

$$y|_{x=x_0} = y_0$$

Dicha condición se denomina **condición inicial.** El problema de la búsqueda de la solución de la ecuación diferencial: $y' = f(x,y)$ que satisface la condición inicial lleva el nombre de **Cauchy**. Geométricamente esto significa que se busca la curva integral que pasa por el dado $P_0(x_0, y_0)$ del plano XOY., como se muestra en la figura 1.4.

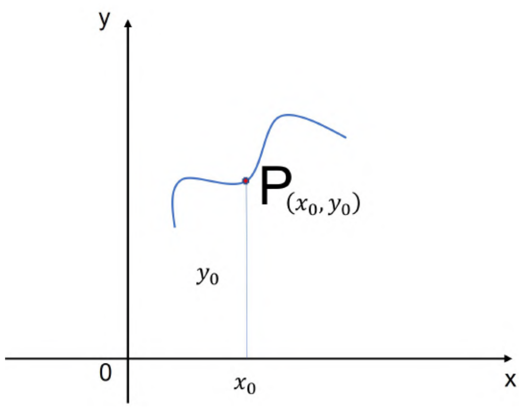

Figura 1.4: Teorema de Cauchy

Aunque este teorema expresa las condiciones suficientes para la existencia de una solución única, no son condiciones necesarias, esto quiere decir que puede existir una solución única de la ecuación diferencial que satisface las condiciones iniciales a pesar de que el punto P no cumpla con la condición a o la condición b o estás dos simultáneamente.

1.5. Soluciones de las ecuaciones diferenciales

Se parte de la forma general de la ecuación diferencial ordinaria:

$$\boldsymbol{F(x, y, y', y'', y''', ..., y^{(n)}) = 0}$$

De esta, se pueden obtener varios tipos de soluciones que se las muestra a continuación:

Solución General

a. Una función $f(x)$ siempre que esta, transforme en identidad la ecuación diferencial ordinaria [2]. En este caso la solución viene dado por la ecuación:

$$y = f(x) + c \tag{1.2}$$

Donde c es una constante arbitraria llamada: ***Familia de Parámetros.*** La solución general puede tener una o más constates arbitrarias.

b. A menudo cuando se resuelve una EDO las soluciones pueden expresarse de la siguiente forma:

- Solución implícita $g(x, y) = 0$
- Solución paramétrica $x = x(t), y = y(t)$

NOTA. Las gráficas que describen las soluciones de las ecuaciones diferenciales se denominan **curvas integrales** como se muestra en la figura 1.5, que representa una familia de circunferencias.

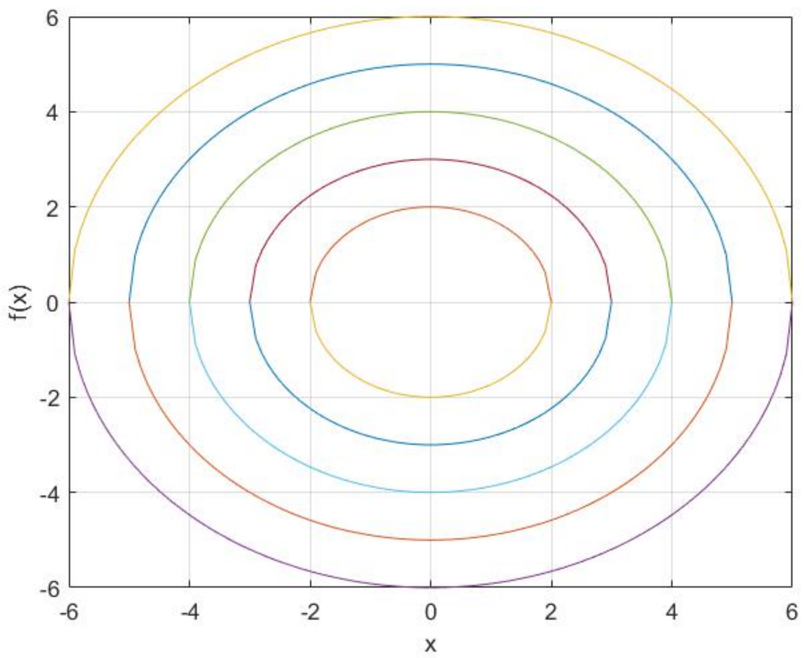

Figura 1.5: Solución general, familia de circunferencias

Solución Particular

c. Si se tiene la solución general de la ecuación diferencial, es posible obtener una solución única cuando se conocen condiciones iniciales del modelo [10]; con ello se puede calcular valores específicos a las constates arbitrarias, lo que da como resultado una **solución particular**.

Solución Singular

d. En algunos casos especiales puede ocurrir que su primitiva no incluya todas las soluciones particulares, aún más, es posible que una ecuación diferencial tenga soluciones que no se pueden obtener de la primitiva ni operando con la constante arbitraria, estas soluciones se consideran ***soluciones singulares*** [7].

Ejemplo 1.10 *La solución general de la ecuación diferencial* $x+2yy' = 0$ *es* $y = Cx^2$, *que corresponde a una familia de parábolas como se muestra en la figura 1.6.*

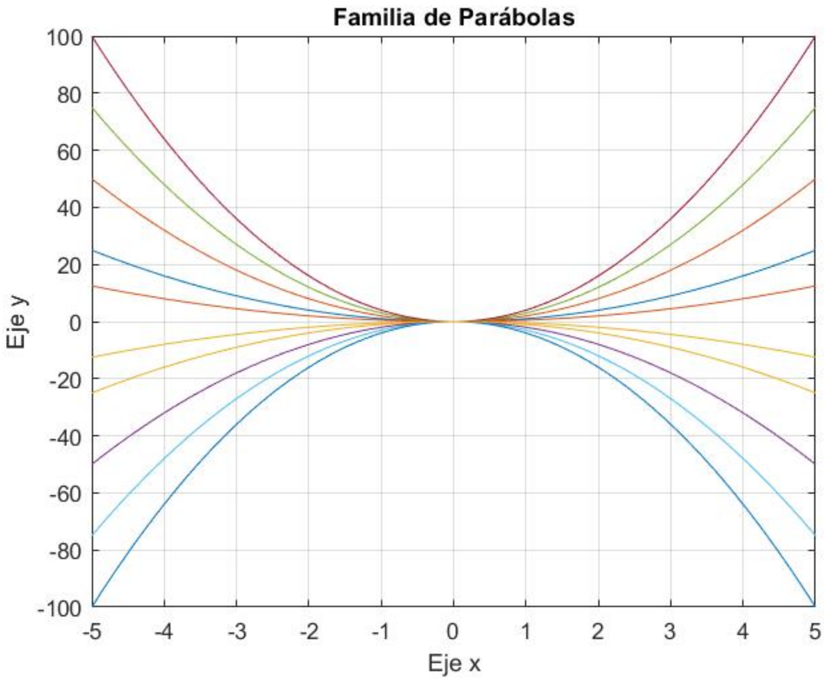

Figura 1.6: Solución general, familia de parábolas

Ejemplo 1.11 *Se tiene la ecuación diferencial:*

$$y' = \frac{1}{y^2}$$

Analice su solución:

Solución. *Quiere decir que la ecuación* $f(x,y) = \frac{1}{y^2}$*, y si su derivada parcial* $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2}{y^3}$*. En este caso en el el punto* $(x_0, 0)$ *del eje OX no se cumple las condiciones del teorema de existencia y unicidad ya que la función y su derivada parcial son discontinuas en el eje OX, aunque por cada punto pasa una sola curva integral:*

$$y = \sqrt[3]{3(x - x_0)}$$

tal como se muestra en la figura 1.7

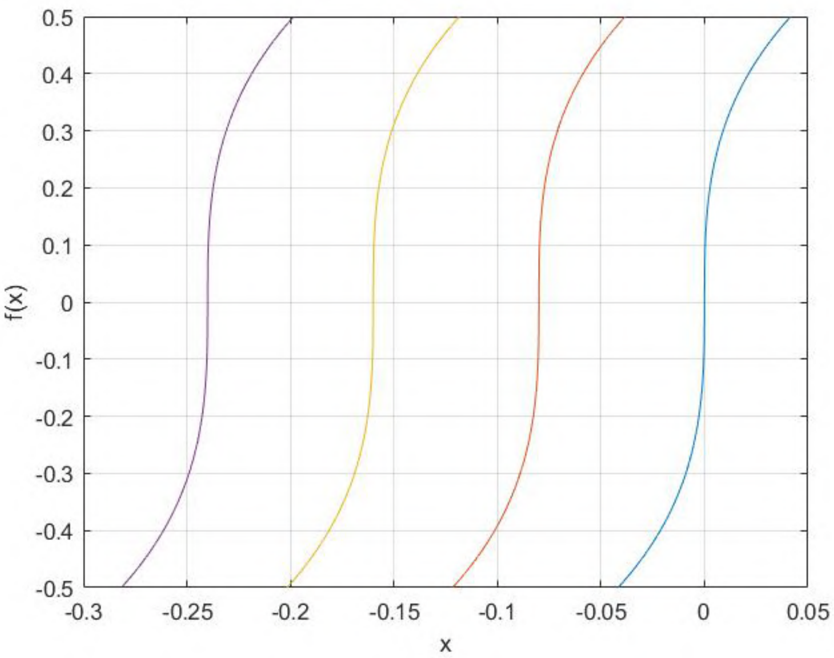

Figura 1.7: Gráfica solución ecuación diferencial

Ejemplo 1.12 *Se tiene la ecuación diferencial:*

$$y' = xy + e^{-y}$$

Analice su solución:

Solución. *El segundo miembro de de la ecuación es* $f(x, y) = xy + e^{-y}$ *y su derivada parcial es* $\frac{\partial f}{\partial y} = x - e^{-y}$*, que son continuas con respecto de los ejes* x *e* y *y en todos los puntos del plano* XOY*, cumple con el teorema de unicidad en todo el entorno en el que la ecuación tenga una solución única.*

Ejemplo 1.13 *Se tiene la ecuación diferencial:*

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$$

Analice su solución:

Solución. *El segundo miembro de de la ecuación es* $f(x, y) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$ *y su derivada parcial es* $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$*, en este caso la función* $f(x, y)$ *es continua en todos los puntos del sistema coordenado, pero su derivada parcial se hace infinita cuando* $y = 0$ *por lo tanto no cumple con el literal* ***b*** *del teorema de existencia* *y unicidad, se puede observar gráficamente en la figura 1.8 que cuando $y = 0$ pasan al menos dos curvas integrales por lo que no cumple con la unicidad.*

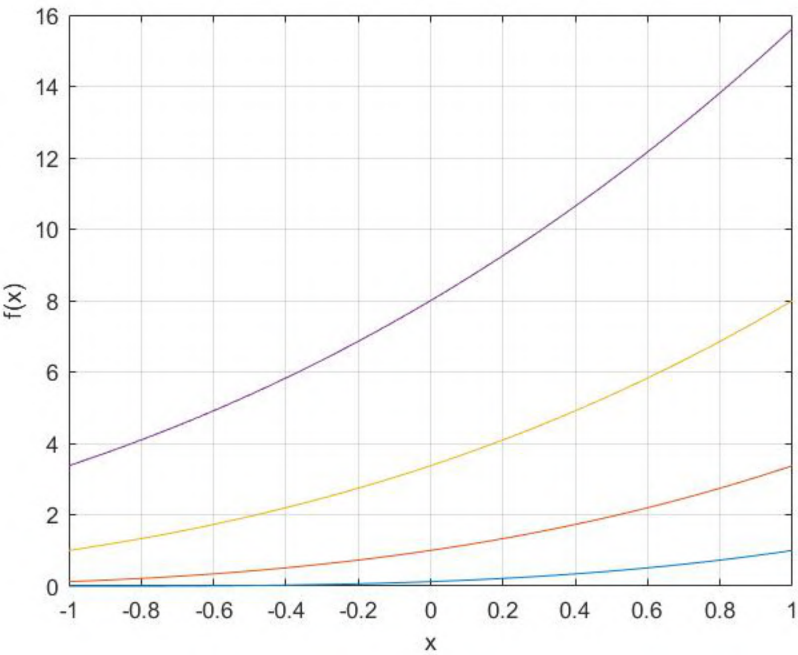

Figura 1.8: Gráfica solución ecuación diferencial

EJERCICIOS PROPUESTOS

- Dada la función $F(x) = \int_0^\infty e^{-x\cosh\theta} d\theta; \quad x > 0$. Verificar si F a $aF''(x) + F'(x) - xF(x) = 0$ donde:

$$\begin{cases} x & \rightarrow variable\ dependiente \\ d\theta & \rightarrow variable\ \ independiente \end{cases}$$

- Encontrar la ecuación diferencial cuya solución es $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, una familia de circunferencias, en el plano xy, siendo h,k y r constantes arbitrarias.

- Demostrar que $y = 5x^2$ es solución de las ecuación diferencial $xy' = 2y$.

- Determinar que $y = \frac{1}{x}$ es solución de las ecuación diferencial $y'' = x^2 + y^2$.

- Demostrar que $y = \frac{c^2 - x^2}{2x}$ es solución de las ecuación diferencial $(x + y)dx + xdy = 0$.

2

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

CAPÍTULO 2

Ecuaciones diferenciales de primer orden

2.1. Definiciones

Para iniciar este nuevo capítulo es importante recordar y profundizar la definición de ecuación diferencial ordinaria(EDO).

2.1.1. Ecuación diferencial ordinaria(EDO)

Definición 2.1 *Es una ecuación que contiene una o varias derivadas de una función desconocida, generalmente llamada $y(x)$, también la variable y y constantes [11].*

Por ejemplo:

1. $y' = \sin x$
2. $y'' + 18y = 0$
3. $y' + 2xy = \sin x$
4. $y''x^2 + 2e^x + y''' = (x^2 + y^2)y^3$
5. $y = 18x' + y'' - x^2y' + y''$

Es este capítulo se considera solo las ecuaciones diferenciales de primer orden. Que son ecuaciones que contienen solamente la primera derivada y', contienen y y cualquiera función dada de x. De forma general estas ecuaciones se pueden escribir como se muestra a continuación:

- Ecuación de forma explícita:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{2.1}$$

- Ecuación de forma implícita:

$$y' = f(x, y) \tag{2.2}$$

Las ecuaciones diferenciales se clasifican en:

1. Ecuaciones de variables separables.
2. Ecuaciones homogéneas.
3. Ecuaciones exactas.
4. Ecuaciones lineales.
5. Y algunas que se deriven de estas.

2.2. Ecuaciones diferenciales de variables separables

Definición 2.2 *Las ecuaciones diferenciales de variables separables tienen distintas forma de presentarse, donde cada diferencial tiene como coeficiente una función de su propia variable o una constante [12]; a continuación se muestran algunas de ellas:*

- **Forma 1**:

$$y' = f(x)g(y) \tag{2.3}$$

Para resolver esta ecuación se deberá seguir el siguiente procedimiento:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$
$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

Finalmente, se deberá seguir el proceso de integración inmediata para obetener la solución

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

- **Forma 2**:

$$f(x)dx + g(y)dy = 0 \tag{2.4}$$

Para resolver esta ecuación, se deberá seguir el proceso de integración inmediata:

$$\int f(x)dx + \int (y)dy = c$$

- **Forma 3**:

$$f(x)g(y)dx + f_1(x)g_1(y)dx = 0 \tag{2.5}$$

En este caso no pueden separarse las variables despejando directamente, como en los casos anteriores, tampoco se pueden agrupar en términos de las mismas variables, entonces se deberá usar métodos alternativos para encontrar la solución buscada. En este libro se identificará un método de manera general, sin embargo, existen variedad de procedimientos para llegar al mismo resultado.

Se divide la ecuación para $f_1(x)g(y)$

$$\frac{f(x)}{f_1(x)}dx + \frac{g_1(y)}{g(y)}dy = 0$$

La solución es

$$\int \frac{f(x)}{f_1(x)} = \int \frac{g_1(y)}{g(y)} = c$$

Ejemplo 2.1 *Resolver la siguiente ecuación diferencial*

$$y' = -\frac{y}{x}$$

Solución:

$$
\begin{aligned}
y' &= -\frac{y}{x} \\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x} \\
xdy &= -ydx \\
\frac{dy}{y} &= -\frac{dx}{x} \\
\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dx}{x} &= \int 0 \\
\ln(y) + \ln(x) = c \\
\ln(xy) &= \ln(c)
\end{aligned}
$$

La solución general es:

$$xy = c$$

Si se coloca un punto particular de la función x=1, y=2 entonces:

$$c = 2$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$xy = 2$$

Ejemplo 2.2 *Resolver la siguiente ecuación diferencial:*

$$(4y + yx^2)dy - (2x + xy^2)dx = 0$$

Solución:

$$
\begin{aligned}
y(4 + x^2)dy - x(2 + y^2)dx = 0 \\
\int \frac{y}{2 + y^2}dy - \int \frac{x}{4 + x^2}dx = c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t &= 2 + y^2 \\
dt &= 2dy \\
s &= 4 + x^2 \\
ds &= 2xdx
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}-\frac{1}{2}\int\frac{ds}{s}=c$$
$$\frac{1}{2}\ln(2+y^2)-\frac{1}{2}\ln(4+x^2)=\ln c$$
$$\frac{2+y^2}{2+x^2}=c_1^2$$
$$c_1^2=c$$

La solución general es:

$$y^2+2=c(x^2+4)$$

Ejemplo 2.3 *Resolver la siguiente ecuación diferencial*

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{(1+x^2)xy}$$

Solución:

$$(1+x^2)xy\,dy=(1+y^2)dx$$
$$(1+x^2)xy\,dy-(1+y^2)dx=0$$
$$\int\frac{ydy}{1+y^2}-\int\frac{dx}{x(1+x^2)}=0$$
$$t=1+y^2\quad dt=2ydy$$
$$\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}\int\frac{x}{x^2+1}=c$$
$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)-\ln(x)+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)=\ln c$$
$$\frac{((1+y^2)(x^2+1))^{1/2}}{x}=c$$
$$(1+y^2)(x^2+1)=c^2x^2$$

La solución general es:

$$(y^2+1)(x^2+1)=cx^2$$

Ejemplo 2.4 *Resolver la siguiente ecuación diferencial*

$$\sqrt{1+x^3}\frac{dy}{dx}=x^2y+x^2$$

Solución:

$$\sqrt{1+x^3}dy = x^2(y+1)dx$$
$$\frac{dy}{y+1} = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx$$
$$\int \frac{dy}{y+1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} = c$$
$$t = 1+x^3, \quad dt = x^2dx$$
$$\ln(y+1) - \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = c$$

La solución general es:

$$\ln(y+1) - \frac{2}{3}\sqrt{1+x^3} = c$$

Ejemplo 2.5 *Resolver la siguiente ecuación diferencial*

$$e^{x+y}\sin x dx + (2y+1)e^{-y^2}dy = 0$$

Solución:

$$e^x\, e^y \sin x\, dx + \frac{2y+1}{e^{y^2}}\, dy = 0$$
$$e^x \sin x\, dx + \frac{2y+1}{e^{y^2}e^y}\, dy = 0$$
$$\int e^x \sin x\, dx + \int \frac{2y+1}{e^{y^2}e^y}\, dy = c$$
$$\int e^x \sin x\, dx + \int \frac{2y+1}{e^{y^2+y}}\, dy = c$$
$$\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} - e^{-(y^2+y)} = c$$
$$t = y^2+y, \quad dt = (2y+1)dy$$
$$u = e^x, \quad du = e^x, \quad dv = \sin x dx, \quad v = -\cos x$$

La primera integral se resuelve por partes y la segunda a través de sustitución simple, por lo tanto la solución general es:

$$e^x(\sin x - \cos x) - 2e^{(y-y^2)} = c$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

- $\frac{dy}{1+y^2}$

- $\frac{dy}{dt} = \frac{t^2}{y^2}$
- $e^y \frac{dy}{dt} - t - t^3 = 0$
- $dr = b(\cos\theta dr + r\sin\theta d\theta)$
- $(xy + x)dx = (x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1)dy$

2.3. Ecuaciones diferenciales que pueden reducirse a variables separables

Para el siguiente análisis se tomarán las ecuaciones diferenciales de la forma:

$$y' = f(ax + by + c) \tag{2.6}$$

Donde $b \neq 0$, es posible reducir a una ecuación diferencial de variable separable por medio de la sustitución de:

$$u = ax + by + c$$

Siendo u la nueva función que se busca, para ello es necesarios resolver siguiendo los procedimientos descritos en el apartado anterior, al final de la solución se deberá regresar a variables originales.

Ejemplo 2.6 *Resolver la siguiente ecuación diferencial:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + y + 1}$$

Solución:

Se aplica la sustitución:

$$u = x + y$$
$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

Se reemplaza u en la ecuación diferencial:

$$\frac{du}{dx} - 1 = \frac{1}{u + 1}$$
$$du - dx = \frac{dx}{u + 1}$$

$$du(u+1) - dx(u+1) = dx$$

$$du(u+1) = dx(u+2)$$

$$\int \frac{u+1}{u+2} du = \int dx + c$$

$$\int du + \int \frac{du}{u+2} = x + c$$

$$u - ln(u+2) = x + c$$

$$x + y - ln(x+y+2) = x + c$$

$$y = ln(x+y+2) + ln(c)$$

$$y = ln\, c\,(x+y+2)$$

La solución general es:

$$e^y = c\,(x+y+2)$$

Ejemplo 2.7 *Resolver la siguiente ecuación diferencial*

$$xy^2(xy' + y) = a^2$$

Solución:

$$xy^2\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) = a^2$$

Se aplica la sustitución:

$$u = xy$$

$$\frac{du}{dx} = y + x\frac{dy}{dx}$$

Se reemplaza u en la ecuación diferencial:

$$\frac{du}{dx} - y = x\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{\frac{du}{dx} - y}{x} = \frac{dy}{dx}$$

$$u^2(\frac{du}{dx} = a^2$$

$$\int u^2 du = a^2 \int x dx$$

$$\frac{u^3}{3} = \frac{a^2x^2}{2} + c$$

$$x^3y^3 - \frac{3}{2}a^2x^2 = c$$

La solución general es:

$$x^2\left(xy^3-\frac{3}{2}a^2\right)=c$$

Ejemplo 2.8 *Resolver la siguiente ecuación diferencial*

$$(1-x^2y)dx+x^2(y-x)dy=0$$

Solución:

Se aplica la sustitución:

$$\begin{aligned} u =& y-x \\ \frac{du}{dx} =& \frac{dy}{dx}-1 \end{aligned}$$

Se reemplaza u en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} [1-x^2(u+x)]dx+x^2(u)(du+dx)=0 \\ (1-x^2u-x^3)dx+x^2udu+x^2udx=0 \\ dx-x^2udx-x^3dx+x^2udu+x^2udx=0 \\ dx-x^3dx+x^2udu=0 \\ \int\frac{dx}{x^2}-\int xdx+\int udu=0 \\ -\frac{1}{x}-\frac{x^2}{2}+\frac{u^2}{2}=0 \\ u^2-x^2-\frac{2}{x}=c \\ (y-x)^2-x^2-\frac{2}{x}=c \\ y^2-2xy-\frac{2}{x}=c \\ y^2x-2x^2y-2=xc \end{aligned}$$

La solución general es:

$$xy(y-x)-2=xc$$

Ejemplo 2.9 *Resolver el siguiente ecuación diferencial*

$$y'=(8x+2y)^2+2(8x+2y)+1$$

Solución:

Se aplica la sustitución:

$$\begin{aligned} u &= 8x + 2y \\ \frac{du}{dx} &= 8 + 2\frac{dy}{dx} \\ 2\frac{dy}{dx} &= \frac{du}{dx} - 8 \end{aligned}$$

Se reemplaza u en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} - 8 &= 2(u^2 + 2u + 1) \\ \frac{du}{dx} &= 2u^2 + 4u + 10 \\ \int \frac{du}{u^2 + 2u + 5} &= \int 2dx \\ \int \frac{du}{u^2 + 2u + 4 + 1} &= \int 2dx \\ \int \frac{du}{(x+2)^2 + 1} &= \int 2dx \\ \frac{1}{2}\arctan\frac{u+1}{2} &= 2x + c \end{aligned}$$

La solución general a la ecuación diferencial es:

$$\arctan\left(4x + y + \frac{1}{2}\right) = 4x + c$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Resolver las siguiente ecuaciones diferenciales:

- Resolver el ejemplo 2.3.1 utilizando una sustitución diferente.
- $\tan x \sin^2 y dx + \cos^2 x \cot y dy = 0$
- $xy' - y = y^3$
- $xyy' = 1 - x^2$
- $y - xy' = a(1 + x^2 y')$
- $y' \tan x = y$
- $\sqrt{1+x^2}dy - \sqrt{1-y^2}dx = 0$

- $y' = (8x + 2y + 1)^2$

- $(2x + 3y - 1)dx + (4x + 6y - 5)dy = 0$

2.4. Ecuaciones diferenciales homogéneas

Funciones Homogéneas

Para iniciar esta nueva sección es fundamental recordar la definición de las funciones homogéneas y el método para identificarlas.

Definición

Definición 2.3 *Una función homogénea es aquella que todos sus términos son del mismo grado [13].*

Identificación

Sea una $f(x, y)$ una función homogénea de grado n sí:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

Esto significa que debemos reemplazar en toda la ecuación x e y por xt y yt respectivamente, si se obtiene la misma ecuación multiplicada por t^n se dice que es homogénea y además su grado es el valor de n, tal como se muestra en los ejemplos descritos a continuación:

Ejemplo 2.10 *Comprobar si la siguiente función es homogénea:*

$$f(x, y) = x + y$$

Solución:

$$f(tx, ty) = tx + ty$$

$$tf(x, y) = t(x, y)$$

Cumple con la condición por lo tanto, es homogénea de grado 1.

Ejemplo 2.11 *Comprobar si la siguiente función es homogénea:*

$$f(x,y) = \sin(x+y)$$

Solución:

$$f(tx,ty) = \sin(tx+ty)$$

$$tf(x,y) = \sin[t(x,y)]$$

No cumple con la condición por lo tanto, no es homogénea.

Ejemplo 2.12 *Comprobar si la siguiente función es homogénea:*

$$f(x,y) = x\sin\frac{y}{x} - y\sin\frac{y}{x}$$

Solución:

$$f(tx,ty) = xt\sin\frac{ty}{tx} - yt\sin\frac{ty}{tx}$$

$$tf(x,y) = t(x\sin\frac{y}{x} - y\sin\frac{y}{x})$$

Cumple con la condición por lo tanto, es homogénea de grado 1.

Definición ecuación diferencial homogénea

Definición 2.4 *Si se tiene una ecuación diferencial de la forma:*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.7}$$

Se puede aplicar una regla general que permite identificar si la ecuación es homogénea o no, para ello se analiza los coeficientes $M(x,y)$ y $N(x,y)$ si son funciones del mismo grado entonces la ecuación es ***HOMOGÉNEA*** *[14].*

Técnicas de Solución

Para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales se debe utilizar sustituciones que las convertirán en ecuaciones diferenciales de variables separables. Se recomiendan estos cambios de variables:

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x} \\ y = ux \\ \frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \frac{x}{y} \\ x = uy \\ \frac{dx}{dy} = y\frac{du}{dy} + u \end{cases}$$

Nota. A veces es conveniente intentar los dos cambios de variable sugeridos ya que puede conducir a una ecuación más sencilla de resolver.

Ejemplo 2.13 *Resolver*

$$2x^3ydx + (x^4 + y^4)dy = 0$$

Solución:

Se aplica la sustitución:

$$x = uy$$

$$\frac{dx}{dy} = y\frac{du}{dy} + u$$

$$dx = ydu + udy$$

$$2u^3y^4(ydu + udy) + (u^4 + y^4)dy = 0$$

$$2u^3y^5du + 2u^4y^4dy + u^4y^4dy + y^4dy = 0$$

$$2u^3y^5du + 3u^4y^4dy + y^4dy = 0$$

$$2u^3y^5du + y^4(3u^4 + 1)dy = 0$$

$$\int \frac{2u^3}{3u^4 + 1}du + \int \frac{dy}{y} = 0$$

$$t = 3u^4 + 1, \quad dt = 12u^3du$$

$$\frac{1}{6}ln(3u^4 + 1) + ln(y) = ln(c)$$

$$\frac{1}{6}ln\left(3\frac{x^4}{y^4}+1\right)+\ln(y)=\ln(c)$$
$$\left(3\frac{x^4}{y^4}+1\right)y^6=c$$

La solución general es:

$$3x^4y^2+y^6=c$$

Ejemplo 2.14 *Resolver*

$$ydx+(2\sqrt{xy}-x)dy=0$$

Solución:

Se aplica la sustitución:

$$x=uy$$
$$dx=ydu+udy$$
$$y(ydu+udy)+(2\sqrt{uy^2}-uy)dy=0$$
$$y^2du+yudy+2\sqrt{u}ydy-uydy=0$$
$$y^2du+2\sqrt{u}ydy=0$$
$$\int\frac{du}{2\sqrt{u}}+\int\frac{dy}{y}=0$$
$$\sqrt{u}+ln(y)=\ln(c)$$
$$\sqrt{\frac{x}{y}}+\ln(y)=\ln c$$
$$\sqrt{\frac{x}{y}}=\ln\left(\frac{c}{y}\right)$$

La solución general es:

$$x=y\,ln^2\left(\frac{c}{y}\right)$$

Ejemplo 2.15 *Resolver*

$$(xy'-y)\arctan\frac{y}{x}=x$$

Si $y=0$ *y* $x=1$

Solución:

Se aplica la sustitución:

$$y = ux$$

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$$

$$\left(x\frac{dy}{dx} - y\right)\arctan\frac{y}{x} = x$$

$$\left[x\left(x\frac{du}{dx} + u\right) - ux\right]\arctan u = x$$

$$x\left[\left(x\frac{du}{dx} + u\right) - u\right]\arctan u = x$$

$$\left[\left(x\frac{du}{dx} + u\right) - u\right]\arctan u =$$

$$\left(x\frac{du}{dx}\right)\arctan u = 1$$

$$\arctan u \quad du = \frac{dx}{x}$$

$$\int \arctan u \quad du = \int \frac{dx}{x}$$

$$u\arctan u - \frac{1}{2}ln|1+u^2| = ln(x) + ln(c)$$

Se reemplaza los valores iniciales, para este caso $x = 1$ y $u = 0$, por lo tanto $c = 1$

$$y \text{ arctan}\frac{y}{x} = x\,ln\,x\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}$$

La solución particular de esta ecuación diferencial es:

$$y \text{ arctan}\frac{y}{x} = \ln x\sqrt{x^2+y^2}$$

Ejemplo 2.16 *Resolver*

$$(x^2+y^2)dx - xydy = 0$$

Solución:

Se aplica la sustitución:

$$y = ux$$

$$dy = udx + xdu$$

$$(x^2+u^2x^2)dx - x^2u(udx+xdu) = 0$$

$$x^2dx + u^2x^2dx - x^2u^2dx - x^3du = 0$$

$$x^2dx - x^3udu = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int udu = 0$$
$$ln(x) - \frac{u^2}{2} = c$$
$$ln(x) - \frac{y^2}{2x^2} = c$$

La solución general es:

$$ln\, x = \frac{y^2}{2x} + c$$

Ejemplo 2.17 *Resolver*

$$xy' = x^2 \sin x + y$$

Solución:

$$x\frac{dy}{dx} = x^2 \sin x + y$$
$$xdy = x^2 \sin x dx + ydx$$

Se aplica la sustitución:

$$y = ux$$
$$dy = udx + xdu$$
$$x(udx + xdu) = (x^2 \sin x + ux)dx$$
$$x(udx + xdu) = x(x \sin x + u)dx$$
$$udx + xdu = x \sin x dx + udx$$
$$xdu = x \sin x dx$$
$$\int du = \int sinx \quad dx$$
$$u = -\cos x + c$$
$$y = (-\cos x + c)x$$

La solución general es:

$$y = -x \cos x + xc$$

Ejemplo 2.18 *Resolver la siguiente ecuación diferencial*

$$(y - x)y' + y = 0$$

Cuyas condiciones iniciales son:

$$y(0) = 1$$

Graficar la solución particular usando el software Matlab, cree una tabla con al menos 10 valores.

Solución:

$$(y-x)\frac{dy}{dx} + y = 0$$
$$(y-x)dy + ydx = 0$$
$$x = uy$$
$$dx = udy + ydu$$
$$(y-uy)dy + y(udy + ydu) = 0$$
$$ydy = -y^2du$$
$$\frac{dy}{y} = -du$$
$$lny = -u + c$$

La solución general es:

$$ln\, y = -\frac{x}{y} + c$$

Se reemplaza las condiciones iniciales, por lo tanto $c = 0$

$$ln\, y = -\frac{x}{y}$$

La solución particular es:

$$y\, e^{\frac{x}{y}} = 1$$

A continuación se muestra en la tabla 2.1 los siguientes valores:

x	**y**
0	1
$-1{,}3863$	2
$-3{,}2958$	3
$-5{,}5452$	4
$-8{,}0472$	5
$-10{,}7506$	6
$-13{,}6214$	7
$-16{,}6355$	8
$-19{,}7750$	9
$-23{,}0259$	10

Tabla 2.1: Tabla de datos

Usando Matlab se realiza la gráfica y se obtiene la figura 2.1.

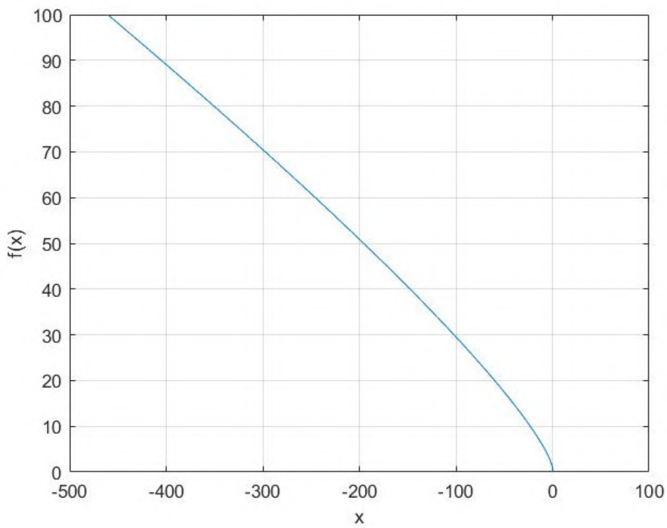

Figura 2.1: Solución particular de $y\,e^{\frac{x}{y}} = 1$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

- $y + x\frac{dy}{dx} = 2x$.

- $xy^2dy - (x^3 + y^3)dx = 0.$

- $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$

- $(4x + y)\frac{dy}{dx} = y - 2x$

- $x\, cos\frac{y}{x}\,\frac{dy}{dx} = y \cos\frac{y}{x} - x$

2.5. Ecuaciones reducibles a homogéneas

Sí se tiene una ecuación diferencial de la forma:

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \tag{2.8}$$

En la que el numerador y denominador son rectas, se puede reducir a una ecuación homogénea haciendo un cambio de variable. Para ello primero se analizan dichas rectas y su punto de intersección, se obtiene el determinante λ de la matriz de coeficientes de x e y como se muestra a continuación:

$$\lambda = | \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} |$$

Sí, $\lambda \neq 0$ entonces se sustituye:

$$x = u + \alpha$$

$$y = v + \beta$$

En la ecuación diferencial y ahora el problema se reduce a encontrar los valores de α y β para ello se resuelve el siguiente sistema:

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0$$

$$a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0$$

Que se obtiene de sustituir en las rectas la variable x por α e y por β, para ello se puede seguir cualquier procedimiento que el lector conozca.

De esta sustitución se obtiene una ecuación diferencial homogénea respecto a las nuevas variables u y v.

Sí, $\lambda = 0$ se debe utilizar la sustitución simple $a_1x + b_1y = u$que permite obtener una ecuación diferencial de variable separable en términos de la nueva variable u.

Ejemplo 2.19 *Resolver*

$$y' = \frac{1-3x-3y}{1+x+y}$$

Solución: *Se comprueba el valor de* λ*:*

$$\lambda = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto se utiliza la sustitución:

$$x + y = u$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$$

Sustituyendo se tiene:

$$\frac{du}{dx} - 1 = \frac{1-3u}{1+u}$$
$$(du - dx) = \frac{1-3u}{1+u}dx$$
$$du = \left(\frac{1-3u}{1+u} + 1\right)dx$$
$$du = \left(\frac{1-3u+1+u}{1+u}\right)dx$$
$$du = \left(\frac{2-2u}{1+u}\right)dx$$
$$du = 2\left(\frac{1-u}{1+u}\right)dx$$
$$\frac{u+1}{u-1}du + 2dx = 0$$
$$du + 2\int \frac{du}{u-1} + 2dx = 0$$
$$u + 2\ln|u-1| + 2x = 0$$

Se reemplaza el valor de u:

$$x + y + 2\ln|x+y-1| + 2x = 0$$

La solución general es:

$$3x + y + 2\ln|x+y-1| = c$$

Ejemplo 2.20 *Resolver*

$$y' = \frac{x+2y+1}{2x+4y+3}$$

Solución: *Se comprueba el valor de* λ*:*

$$\lambda = \left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{array} \right| = 0$$

Por lo tanto se utiliza la sustitución:

$$u = x + 2y$$
$$\frac{du}{dx} = 1 + 2\frac{dy}{dx}$$

Sustituyendo se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \left(\frac{du}{dx} - 1\right)\frac{1}{2} \\
\frac{du - dx}{2dx} &= \frac{u+1}{2u+3} \\
du - dx &= 2dx\frac{u+1}{2u+3} \\
du &= dx\left(\frac{u+1}{2u+3} + 1\right) \\
du &= dx\left(\frac{2u+2+2u+3}{2u+3}\right) \\
du &= dx\left(\frac{4u+5}{2u+3}\right) \\
\frac{2u+3}{4u+5}du - dx &= 0 \\
\frac{1}{2}\int du + \frac{1}{2}\int \frac{du}{4u+5} - \int dx &= 0 \\
\frac{1}{2}u + \frac{1}{8}\ln|4u+5| - x &= c \\
\frac{1}{2}(x+2y) + \frac{1}{8}\ln|4(x+2y)+5| - x &= c
\end{aligned}$$

La solución general es:

$$8y - 4x + \ln|4x + 8y + 5| = c$$

Ejemplo 2.21 *Resolver*

$$(2x - 5y + 3)dx - (2x + 4y - 6)dy = 0$$

Solución: *Se comprueba el valor de* λ*:*

$$\lambda = \left| \begin{array}{cc} 2 & -5 \\ 2 & 4 \end{array} \right| = 18$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene el sistema:

$$2\alpha - 5\beta + 3 = 0$$

$$2\alpha + 4\beta - 6 = 0$$

$$\alpha = 1$$

$$\beta = 1$$

Se sustituye en la ecuación original:

$$x = u + 1$$

$$y = v + 1$$

$$[2(u+1) - 5(v+1) + 3]du - [2(u+1) + 4(v+1) - 6]dv = 0$$

$$(2u - 5v)du - (2u + 4v)dv = 0$$

Se convierte en una ecuación diferencial homogénea:

$$v = tu$$

$$dv = tdu + udt$$

$$\frac{du}{u} + \frac{2(1+2t)}{4t^2 + 7t - 2}dt = 0$$

$$\int \frac{du}{u} + \int \frac{2(1+2t)}{4t^2 + 7t - 2}dt = 0$$

Integrando se obtiene la solución general, que se deja como ejercicio para el lector

Ejemplo 2.22 *Resolver*

$$(x - y - 1)dx - (4y + x - 1)dy = 0$$

Solución:

Se comprueba el valor de λ:

$$\lambda = |\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{matrix}| = 5$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene el sistema:

$$\alpha - \beta - 1 = 0$$

$$\alpha - 4\beta + 1 = 0$$

$$\alpha = 1$$

$$\beta = 0$$

Se sustituye en la ecuación original:

$$x = u + 1$$

$$y = v$$

$$(u + 1 - v - 1)du + (4v + u + 1 - 1)dv = 0$$

$$(u - v)du + (4v + u)dv = 0$$

Se convierte en una ecuación diferencial homogénea:

$$v = tu$$

$$dv = tdu + udt$$

$$\frac{du}{u} + \frac{4t + 1}{4t^2 + 1}dt = 0$$

$$\int \frac{du}{u} + \int \frac{4t + 1}{4t^2 + 1}dt = 0$$

Integrando se obtiene la solución general, que se deja como ejercicio para el lector.

Ejemplo 2.23 *Resolver*

$$(2x - y + 4)dy - (x - 2y + 5)dx = 0$$

Solución: *Se comprueba el valor de* λ*:*

$$\lambda = \left| \begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{array} \right| = -3$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene el sistema:

$$2\alpha - \beta + 4 = 0$$

$$\alpha - 2\beta + 5 = 0$$

$$\alpha = -1$$

$$\beta = 2$$

Se sustituye en la ecuación original:

$$x = u - 1$$

$$y = v + 2$$

$$[2(u-1) - (v+2) + 4]dv + [u - 1 - 2(v+2) + 5]du = 0$$

$$(2u - v)dv + (u - 2v)du = 0$$

Se convierte en una ecuación diferencial homogénea:

$$v = tu$$

$$dv = tdu + udt$$

$$\frac{dt}{t(1-2t)} + \frac{du}{u} = 0$$

$$\int \frac{dt}{t(1-2t)} + \int \frac{du}{u} = 0$$

Integrando se obtiene la solución general, que se deja como ejercicio para el lector.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

- $(2x + 3y - 1)dx + (4x + 6y - 5)dy = 0$

- $(x - y + 4)dx + (x - y + 5)dy = 0$

2.6. Ecuaciones diferenciales exactas

Definición 2.5 *Son conocidas como ecuaciones en diferenciales totales. Se parte de la ecuación diferencial:*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{2.9}$$

Si se cumple la igualdad

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Se dice entonces que es una ecuación diferencial exacta o en diferenciales totales.

Se puede escribir de la forma:

$$dU(x,y) = 0 \tag{2.10}$$

La integral general de esta ecuación es:

$$U(x,y) = c \tag{2.11}$$

La función $U(x,y)$ se determina por la fórmula:

$$U = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy \tag{2.12}$$

Ejemplo 2.24 *Resolver la siguiente ecuación diferencial*

$$(3x^2 + 6y^2x)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$$

Solución:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy$$

Se comprueba que son exactas y se resuelve

$$U = \int (3x^2 + 6y^2x)dx + \varphi(y)$$

$$U = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + \varphi'(y)$$

$$6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3$$

$$\varphi'(y) = 4y^3$$

$$\varphi(y) = y^4 + c$$

La solución general es:

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = c$$

Ejemplo 2.25 *Resolver la siguiente ecuación diferencial*

$$(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0$$

Solución:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 3$$

Se comprueba que son exactas y se resuelve:

$$U = \int (2x^3 + 3y)dx + \varphi(y)$$
$$U = \frac{x^4}{2} + 3xy + \varphi(y)$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = 3x + \varphi'(y)$$
$$3x + \varphi'(y) = 3x + y - 1$$
$$\varphi'(y) = y - 1$$
$$\varphi(y) = \frac{y^2}{2} - y + c$$
$$\frac{x^4}{2} + 3xy + \frac{y^2}{2} - y + c = 0$$

La solución general es:

$$x^4 + 6xy + y^2 - 2y = c$$

Ejemplo 2.26 *Resolver la siguiente ecuación diferencial*

$$(y^2e^{xy^2} + 4x^3)dx + (2xye^{xy^2} - 3y^2)dy = 0$$

Solución:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2ye^{xy^2} + 2xy^3e^{xy^2}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2ye^{xy^2} + 2xy^3e^{xy^2}$$

Se comprueba que son exactas y se resuelve:

$$U = \int (y^2 e^{xy^2} + 4x^3)dx + \varphi(y)$$
$$U = e^{xy^2} + x^4 + \varphi(y)$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2xye^{xy^2} + \varphi'(y)$$
$$2xye^{xy^2} + \varphi'(y) = 2xye^{xy^2} - 3y^2$$
$$\varphi'(y) = -3y^2$$
$$\varphi(y) = -y^3$$

La solución general es:

$$e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c$$

Ejemplo 2.27 *Resolver la siguiente ecuación diferencial*

$$\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$$

Solución:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -6\frac{x}{y^4}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -6\frac{x}{y^4}$$

Se comprueba que son exactas y se resuelve:

$$U = \int \frac{2x}{y^3}dx + \varphi(y)$$
$$U = \frac{x^2}{y^3} + \varphi(y)$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{3x^2}{y^4} + \varphi'(y)$$
$$-\frac{3x^2}{y^4} + \varphi'(y) = \frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}$$
$$\varphi'(y) = \frac{1}{y^2}$$
$$\varphi(y) = -\frac{1}{y} + c$$
$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + c = 0$$

La solución general es:

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = c$$

2.6.1. Factor integrante

Si no cumple con la condición para ser una diferencial exacta y se cumplen las condiciones del teorema de Cauchy, entonces existe una función $u = u(x, y)$ denominada factor integrante tal que:

$$u(Pdx + Qdy) = du \tag{2.13}$$

De donde se obtiene, que la función U satisface la ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial y}(uP) = \frac{\partial}{\partial x}(uQ)$$

El factor integrante u se puede hallar fácilmente a través de estas fórmulas:

1. $\frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}) = F(x), \quad entoncesu = u(x);$

2. $\frac{1}{P}(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) = F_1(x), \quad entoncesu = u(y);$

Este factor integrante se debe multiplicar por la ecuación diferencial para convertirla en una ecuación diferencial exacta que se resuelve siguiendo el procedimiento descrito en la sección anterior.

Ejemplo 2.28 *Resolver la siguiente ecuación diferencial*

$$(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})dx + (x^2 + y^2)dy = 0$$

Solución:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x + x^2 + y^2$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

Se comprueba que NO son exactas y se aplica la fórmula 1:

$$\frac{1}{x^2 + y^2}(2x + x^2 + y^2 - 2x) = 1$$
$$\frac{du}{u} = dx$$
$$\ln u = x$$

El factor integrante es:

$$u = e^x$$

Se multiplica a la ecuación diferencial original:

$$e^x(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})dx + e^x(x^2 + y^2)dy = 0$$

Se comprueba que ahora es exacta y se resuelve:

$$U = \int e^x(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})dx + \varphi(y)$$
$$U = e^x(x^2y + \frac{y^3}{3}) + \varphi(y)$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = e^x(x^2 + y^2) + \varphi'(y)$$
$$\varphi'(y) = 0$$
$$\varphi(y) = c$$

La solución general es:

$$ye^x(x^2 + \frac{y^2}{3}) = c$$

Ejemplo 2.29 *Resolver la siguiente ecuación diferencial*

$$(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0$$

Solución:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y$$

Se comprueba que NO son exactas y se aplica la fórmula 1:

$$\frac{1}{xy}(2y - y) = \frac{1}{x}$$
$$\frac{du}{u} = dx$$

El factor integrante es:

$$u = x$$

Se multiplica a la ecuación diferencial original:

$$x(x^2+y^2+x)dx + x^2ydy = 0$$

Se comprueba que ahora es exacta y se resuelve:

$$U = \int x(x^2+y^2+x)dx + \varphi(y)$$
$$U = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3}dx + \varphi(y)$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = e^x(x^2+y^2) + \varphi'(y)$$
$$\varphi'(y) = 0$$
$$\varphi(y) = c$$

La solución general es:

$$3x^4 + 4x^3 + 6x^2y^2 = c$$

Ejemplo 2.30 *Resolver la siguiente ecuación diferencial*

$$(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$$

Solución:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x(4y^3e^y + y^4e^y + 3y^2) + 1$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x(y^4e^y - 2y^2) - 3$$

Se comprueba que NO son exactas y se aplica la fórmula 2:

$$\frac{8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1 - 2xy^4e^y + 2xy^2 + 3}{2xy^4e^y + 2xy^3 + y} = u$$
$$\frac{du}{u} = -\frac{4}{y}dx$$

El factor integrante es:

$$u = \frac{1}{y^4}$$

Se multiplica a la ecuación diferencial original:

$$\frac{1}{y^4}(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + \frac{1}{y^4}(x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$$

Se comprueba que ahora es exacta y se resuelve:

$$U = \int (2xe^y + \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^3})dx + \varphi(y)$$
$$U = x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} + \varphi(y)$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - 3\frac{x}{y^4} + \varphi'(y)$$
$$\varphi'(y) = 0$$
$$\varphi(y) = c$$

La solución general es:

$$xe^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} = c$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

- $(2s - 5t + c)ds + (1 - 6t - 5s)$.
- $(1 + \frac{1}{x}e^{y/x}dy) + (1 - \frac{y}{x^2}e^{y/x})dx = 0$.
- $y^2 \sin y dy + yxdx = 0$
- $(4x + y)\frac{dy}{dx} = y - 2x$
- $(xy + 1 + \frac{2y}{e^{xy}})dy + y^2dy = 0$

2.7. Ecuaciones diferenciales lineales

Definición 2.6 *Una ecuación diferencial lineal de primer grado tiene la forma:*

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{2.14}$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones que dependen solo de la variable x, en este caso esta expresión está escrita en la forma canónica, sin embargo las ecuaciones lineales pueden presentarse de distintas formas. Se sugiere al lector primero convertir a la forma canónica para usar los procedimientos descritos a continuación [15].

Sí, $Q(x) = 0$ la ecuación diferencial lineal se convierte en una ecuación diferencial homogénea:

$$y' + P(x)y = 0 \tag{2.15}$$

En este caso las variables se separan y la solución general de la ecuación homogénea es:

$$y = ce^{-\int P(x)dx} \tag{2.16}$$

Sí, $Q(x) \neq 0$ es una ecuación lineal no homogénea, su solución general es:

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx} \tag{2.17}$$

Para facilitar el cálculo se puede seguir el algoritmo de solución llamado método de variación de la constante arbitraria que se lo detalla a continuación:

MÉTODO DE VARIACIÓN DE LA CONSTANTE DE ARBITRARIA.

Pasos para resolver:

1. Este método consiste, primero, en hallar la solución general de la correspondiente ecuación lineal homogénea, es decir se hace que $Q(x) = 0$ y se resuelve a través de la ecuación 2.16.

2. Después, se supondrá que esta expresión c es función de x, es decir $C(x)$, ahora el problema es encontrar la solución de la ecuación NO HOMOGÉNEA.

3. El siguiente paso es derivar la solución de la ecuación homogénea, tomando en consideración la función $C(x)$ de lo que se obtiene y'.

4. Finalmente se reemplaza en la ecuación diferencial lineal original y; y', y se halla el valor de $C(x)$.

5. Se reemplaza en la solución y se obtiene la solución general de la ecuación diferencial lineal.

Ejemplo 2.31 *Resolver la siguiente ecuación diferencial*

$$y' = y \tan x + \cos x$$

Solución:

$$y' - y\tan x = \cos x$$
$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$$
$$\int P(x)dx = -\int \tan x dx$$
$$\int P(x)dx = -\int \frac{\sin x}{\cos x}dx$$
$$u = \cos x$$
$$du = -\sin x$$
$$\int \frac{du}{u} = ln|\cos x|$$
$$y = Ce^{-ln|\cos x|}$$
$$y = \frac{C}{\cos x}$$
$$y' = \frac{dC}{dx}\frac{1}{\cos x} + C\frac{\sin C}{\cos^2 x}$$

Se reemplaza y, y' en la ecuación diferecial original

$$\frac{dC}{dx}\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}\frac{C}{\cos x} + C\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \cos x$$
$$\frac{dC}{dx}\frac{1}{\cos x} = \cos x$$
$$dC = \cos^2 x dx$$
$$C = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + c_1$$

La solución es:

$$y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + c_1\right)\frac{1}{\cos x}$$

Ejemplo 2.32 *Resolver la siguiente ecuación diferencial*

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$$

Solución:

$$y' - \frac{1}{x}y = x$$

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$$

$$\int P(x)dx = -\int \frac{1}{x}dx$$

$$\int P(x)dx = -\ln|x|$$

$$y = Ce^{ln|x|}$$

$$y = xC$$

$$y' = C + x\frac{dC}{dx}$$

Se reemplaza y, y' en la ecuación diferecial original

$$C + x\frac{dC}{dx} - \frac{1}{x}xC = x$$

$$\frac{dC}{dx} = 1$$

$$C = x + c_1$$

La solución es:

$$y = x^2 + xc_1$$

Ejemplo 2.33 *Resolver la siguiente ecuación diferencial*

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x^3$$

Solución:

$$y' + \frac{2}{x}y = x^3$$

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$$

$$\int P(x)dx = \int \frac{2}{x}dx$$

$$\int \frac{2}{x}dx = 2\ln|x|$$

$$y = Ce^{2\ln|x|}$$

$$y = \frac{C}{x^2}$$

$$y' = \frac{dC}{dx}\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}C$$

Se reemplaza y, y' en la ecuación diferecial original

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dx}\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}C+\frac{2}{x}\frac{C}{x^2}&=x^3\\ \frac{dC}{dx}&=x^5\\ C&=\frac{x^6}{6}+c_1\end{aligned}$$

La solución es:

$$y=\frac{x^4}{2}+\frac{c_1}{x^2}$$

Ejemplo 2.34 *Resolver la siguiente ecuación diferencial*

$$(1+y^2)dx=(\sqrt{1+y^2}\sin y-xy)dy$$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy}&=\frac{\sqrt{1+y^2}\sin y-xy}{1+y^2}\\ \frac{dx}{dy}&=\frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}}-\frac{xy}{1+y^2}\\ x'+\frac{y}{1+y^2}x&=\frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}}\\ x&=C(x)e^{-\int P(y)dy}\\ \int P(y)dy&=\int\frac{y}{1+y^2}\end{aligned}$$

Se realiza un cambio de variable:

$$\begin{aligned}t&=y^2+1\\ dy&=2ydy\\ \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}&=\frac{1}{2}\ln(y^2+1)\\ x&=C(x)e^{-\frac{1}{2}\ln(y^2+1)}\\ x&=\frac{C}{\sqrt{y^2+1}}\\ x'&=\frac{dC}{dy}\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}-\frac{yC}{(y^2+1)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

Se reemplaza x, x' en la ecuación diferencial original

$$\frac{dC}{dy}\frac{1}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{yC}{(y^2+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y}{y^2+1}\frac{C}{\sqrt{y^2+1}} = \frac{\sin y}{\sqrt{y^2+1}}$$

$$\frac{dC}{dy} = \sin y$$

$$\int dC = \sin y \quad dy$$

$$C = -\cos y + c_1$$

$$x = \frac{-\cos y + c_1}{\sqrt{y^2+1}}$$

La solución es

$$x\sqrt{y^2+1} + \cos y = c_1$$

Ejemplo 2.35 *Resolver la siguiente ecuación diferencial*

$$y' + 3x^2 y = x^2$$

Solución:

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$$

$$\int P(x)dx = \int 3x^2 dx$$

$$\int P(x)dx = x^3$$

$$y = ce^{-x^3}$$

$$\frac{C}{y} = e^{x^3}$$

$$y = \frac{C}{e^{x^3}}$$

$$y' = \frac{dC}{dx}\frac{1}{e^{x^3}} - \frac{C}{e^{x^3}}3x^2$$

Se reemplaza y, y' en la ecuación diferecial original

$$\frac{dC}{dx}\frac{1}{e^{x^3}} - \frac{C}{e^{x^3}}3x^2 + 3x^2\frac{C}{e^{x^3}} = x^2$$

$$\int dC = \int x^2 e^{x^3} dx$$

$$C = \frac{1}{3}e^{x^3} + c_1$$

$$y = \frac{\frac{1}{3}e^{x^3} + c_1}{e^{x^3}}$$

La solución es

$$y = \frac{1}{3} + \frac{c_1}{e^{x^3}}$$

Ejemplo 2.36 *Resolver la siguiente ecuación diferencial*

$$3\frac{dy}{dx} + 12y = 4$$

Solución:

$$\begin{aligned}
3y' + 12y &= 4 \\
y' + 4y &= \frac{4}{3} \\
\int P(x)dx &= \int 4dx \\
y &= Ce^{-4x} \\
y' &= \frac{dC}{dx}e^{-4x} - 4Ce^{-4x}
\end{aligned}$$

Se reemplaza y, y' en la ecuación diferecial original

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{dx}e^{-4x} - 4Ce^{-4x} + 4Ce^{-4x} &= \frac{4}{3} \\
\frac{dC}{dx} &= \frac{4}{3}e^{-4x} \\
dC &= \frac{4}{3}e^{4x}dx \\
C &= \frac{e^{4x}}{3} + c_1
\end{aligned}$$

La solución es

$$y = \frac{1}{3} + e^{-4x} + c_1$$

Ejemplo 2.37 *Resolver la siguiente ecuación diferencial*

$$x' = (\frac{2t}{t^2+1})x + t^3$$

Solución:

$$\begin{aligned}
x' - \frac{2t}{t^2+1}x &= t^3 \\
\int P(t)dt &= \int \frac{2t}{t^2+1}dt
\end{aligned}$$

Se realiza un cambio de variable

$$u = t^2 + 1$$

$$du = 2tdt$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln(t^2 + 1)$$

$$x = Ce^{\ln(t^2+1)}$$

$$x = C(t^2 + 1)$$

$$x' = \frac{dC}{dt}(t^2 + 1) + 2tC$$

Se reemplaza x, x' en la ecuación diferecial original

$$\frac{dC}{dt}(t^2 + 1) + 2tC - \frac{2t}{t^2 + 1}C(t^2 + 1) = t^3$$

$$dC = \frac{t^3}{t^2 + 1}dt$$

$$\int dC = \int tdt - \int \frac{t}{t^2 + 1}$$

$$C = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(t^2 + 1) + c_1$$

La solución es:

$$x = \frac{1}{2}[t^2 - ln(t^2 + 1) + c_1](t^2 + 1)$$

Ejemplo 2.38 *Resolver la siguiente ecuación diferencial*

$$y' - 5y = \cos x$$

Solución:

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$$

$$y = Ce^{\int 5dx}$$

$$y = Ce^{5xdx}$$

$$y' = \frac{dC}{dx}e^{5x} + Ce^{5x}5$$

Se reemplaza y, y' en la ecuación diferecial original

$$\frac{dC}{dx}e^{5x} + 5Ce^{5x} - 5Ce^{5x} = \cos x$$

$$\int dC = \int \frac{\cos x}{e^{5x}}dx$$

Se realiza integración por partes

$$C = \frac{e^{-5x}\sin x - 5e^{-5x}\cos x}{26} + c_1$$

La solución es:

$$y = \frac{\sin x - 5\cos x}{26} + c_1 e^{5x}$$

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN.

Para resolver la ecuaciones diferenciales lineales se puede emplear la sustitución $y = uv$. Las variables u y v son funciones de x.

$$y' + P(x)y = Q(x)$$
$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$$

Se agrupa y la ecuación lineal toma la forma:

$$[u' + P(x)u]v + v'u = Q(x)$$

se exige que:

$$u' + P(x)u = 0$$
$$v'u = Q(x)$$

Entonces hallamos hallamos u, después v, luego al final se halla y que corresponde a la solución general de la ecuación diferencial.

Ejemplo 2.39 *Resolver la siguiente ecuación diferencial*

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x^3$$

Solución:

$$y' + \frac{2}{x}y = x^3$$

$$y = uv$$

$$u'v + uv' + \frac{2}{x}uv = x^3$$

$$[u' + \frac{2}{x}u]v + v'u = x^3$$

$$u' + \frac{2}{x}u = 0$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{2}{x}u$$

$$\frac{du}{u} = -2\frac{dx}{x}$$

$$\ln u = -2\ln x$$

$$\ln u = \ lnx^{-2}$$

$$u = \frac{1}{x^2}$$

$$v'\frac{1}{x^2} = x^3$$

$$\frac{dv}{dx}\frac{1}{x^2} = x^3$$

$$dv = x^5 dx$$

$$v = \frac{x^6}{6} + c$$

$$y = \frac{1}{x^2}(\frac{x^6}{6} + c)$$

La solución es

$$y = \frac{x^4}{6} + \frac{c}{x^2}$$

Ejemplo 2.40 *Resolver la siguiente ecuación diferencial*

$$y^2dx - (2xy + 3)dy = 0$$

Solución:

$$
\begin{aligned}
y^2 dx &= (2x+3)dy \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{y^2}{2xy+3} \\
\frac{dx}{dy} &= \frac{2xy+3}{y^2} \\
\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x &= \frac{3}{y^2} \\
x' - \frac{2}{y}x &= \frac{3}{y^2} \\
u'v + uv' - \frac{2}{y}uv &= \frac{3}{y^2} \\
v(u' - \frac{2}{y}u) + uv' &= \frac{3}{y^2} \\
u' - \frac{2}{y}u &= 0 \\
\frac{du}{dy} &= \frac{2}{y}u \\
\frac{du}{u} &= 2\frac{dy}{y} \\
\ln u &= \ln y^2 \\
u &= y^2 \\
y^2 v' &= \frac{3}{y^2} \\
\frac{dv}{dy} &= \frac{3}{y^4} \\
dv &= \frac{3}{y^4}dy \\
v &= -y^3 + c \\
x &= y^2(-\frac{1}{y^3} + c)
\end{aligned}
$$

La solución es

$$x = cy^2 - \frac{1}{y}$$

2.8. Ecuación de Bernoulli

El estudio de la ecuación diferencial tipo Bernoulli es fundamental, puesto que su descubrimiento es un hito en el avance del desarrollo de las ecuaciones diferenciales, paralelamente a *Newton* y *Leibnitz*; *Bernoulli* en 1690 postuló su ecuación y además el procedimiento para resolverla [16].

Definición 2.7 *La ecuación de Bernoulli es una ecuación diferencial de primer orden que tiene la forma:*

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha} \tag{2.18}$$

Donde $\alpha \neq 0$ *y* $\alpha \neq 1$*.*

Para resolver esta ecuación se puede seguir dos procedimientos mostrados a continuación:

1. Esta ecuación se reduce a una ecuación lineal usando la sustitución

$$z = y^{1-\alpha}$$

   Se sigue el procedimiento de variación de la constante arbitraria que se explicó en la sección anterior, para obtener la solución general se regresa a variables originales.

2. Se puede emplear directamente la sustitución $y = uv$ y continuar con el procedimiento de sustitución descrito también en la sección anterior.

Ejemplo 2.41 *Resolver la siguiente ecuación diferencial usando el procedimiento 2:*

$$y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}$$

Solución:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{4}{x}y + xy^{\frac{1}{2}} \\ \alpha &= \frac{1}{2} \\ z &= y^{1-1/2} \\ z &= y^{1/2} \\ y &= z^2 \\ dy &= 2zdz \end{aligned}$$

Se obtiene la ecuación lineal

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x}z = \frac{x}{2}$$

Usando el método de variación de parámetro

$$z = Ce^{-\int P(x)dx}$$
$$z = Ce^{2\ln(x)}$$
$$\frac{z}{C} = e^{2\ln(x)}$$
$$z = Cx^2$$
$$z' = \frac{dC}{dx}x^2 + 2xC$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial original

$$\frac{dC}{dx}x^2 + 2xC - \frac{2}{x}Cx^2 = \frac{x}{2}$$
$$dC = \frac{1}{2x}dx$$
$$c = \frac{1}{2}\ln|x| + c_1$$
$$z = (\frac{1}{2}\ln|x| + c_1)x^2$$

La solución es

$$y = (\frac{1}{2}\ln|x| + c_1)^2 x^4$$

Ejemplo 2.42 *Resolver la siguiente ecuación diferencial usando el procedimiento 2.*

$$y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}$$

Solución:

Se realizará mediante el proceso de sustitución

$$
\begin{aligned}
y &= uv \\
y' &= u'v + v'u \\
u'v + v'u - \frac{4}{x}uv &= x\sqrt{uv} \\
v(u' - \frac{4}{x}u) &= 0 \\
u' - \frac{4}{x}u &= 0 \\
\frac{du}{dx} &= \frac{4}{x}u \\
\frac{du}{u} &= 4\frac{dx}{x} \\
\ln u &= 4\ln x \\
u &= x^4 \\
v(u' - \frac{4}{x}u) + v'u &= x\sqrt{uv} \\
v'x^4 &= x\sqrt{x^4v} \\
\frac{dv}{dx} &= \frac{1}{x^3}x^2\sqrt{x} \\
\frac{dv}{\sqrt{v}} &= \frac{dx}{x} \\
2\sqrt{v} &= \ln|x| + c \\
\sqrt{v} &= \frac{1}{2}\ln|x| + c \\
v &= (\frac{1}{2}\ln x + c)^2
\end{aligned}
$$

La solución es

$$y = x^4(\frac{1}{2}\ln x + c)^2$$

2.9. Ecuación de Ricatti

Al igual que la ecuación de Bernoulli, la ecuación de Ricatti es importante en el avance del análisis matemático, fue él quien descubrió y usó el método de Charpit-Lagrange a dimensiones superiores, y resolvió ecuaciones donde aparecen jacobianos[17].

Definición 2.8 *La ecuación de Ricatti tiene la forma:*

$$y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 \tag{2.19}$$

Donde $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ son funciones de x.

Para resolver este tipo especial de ecuación diferencial es necesario realizar algunos cambios de variables sucesivos como se muestra en el siguiente procedimiento:

1. Para resolver este tipo de ecuaciones es necesario conocer la solución particular que se le llamará y_p.

2. A partir de ello se tiene que la solución general de la ecuación diferencial es $y = y_p + u$

3. Se deriva la solución y se tiene: $y' = y_p' + u'$ y se reemplaza en la ecuación de Ricatti, se obtiene:

$$y_p' + u' = P(x) + Q(x)(y_p + u) + R(x)(y_p + u)^2$$

   Operando se tiene:

$$\begin{aligned} y_p' + u' &= P(x) + Q(x)y_p + Q(x)u + R(x)y_p^2 + 2R(x)y_p u + R(x)u^2 \\ y_p' + u' &= y_p' + Q(x)u + 2R(x)y_p u + R(x)u^2 \\ u' &= Q(x)u + 2R(x)y_p u + R(x)u^2 \\ \frac{du}{dx} &= Q(x)u + 2R(x)y_p u + R(x)u^2 \end{aligned}$$

   Agrupando se obtiene una ecuación de Bernoulli

$$\frac{du}{dx} - u[Q(x) + 2R(x)y_p] = R(x)u^2$$

4. Se usa el cambio de variable:

$$z = \frac{1}{u}$$

Se deriva:

$$dz = -\frac{du}{u}$$
$$du = -\frac{dz}{z^2}$$

5. Se reemplaza en la ecuación de Bernoulli

$$-\frac{dz}{z^2dx} - \frac{1}{z}[Q(x) + 2R(x)y_p] = R(x)\frac{1}{z^2}$$
$$-\frac{1}{z}(\frac{1}{zdx} + [Q(x) + 2R(x)y_p] = R(x)\frac{1}{z^2}$$

Finalmente se obtiene una ecuación lineal que se puede resolver por métodos estudiados en las secciones anteriores.

$$\frac{dz}{dx} + [Q(x) + 2R(x)y_p]z = -R(x)$$

Ejemplo 2.43 *Resolver la siguiente ecuación diferencial:*

$$y = 2y'x + \frac{1}{y'}; \quad y_p = \frac{2}{x}$$

Solución:

Se reemplaza en la ecuación resuelta

$$\frac{dz}{dx} + [Q(x) + 2R(x)y_p]z = -R(x)$$
$$\frac{dz}{dx} + [-\frac{1}{x} + 2(\frac{2}{x})]z = -1$$
$$\frac{dz}{dx} + [-\frac{1}{x} + \frac{4}{x})]z = -1$$
$$\frac{dz}{dx} + 3\frac{z}{x} = -1$$

Se aplicará el método de sustitución para resolver esta ecuación

$$z = wv, \quad z' = w'v + wv'$$

$$v[w' + \frac{3}{x}w] + wv' = -1$$

$$w' + \frac{3w}{x} = 0$$

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{3w}{x}$$

$$w = \frac{1}{x^3}$$

$$\frac{v'}{x^3} = -1$$

$$v = \frac{-x^4}{4} + c$$

Se reemplaza en las variables originales:

$$z = \frac{1}{x^3}\left(\frac{-x^4}{4} + c\right)$$

$$z = \frac{4cx^3 - x}{4}$$

Pero se sabe que $u = z^{-1}$*, entonces la solución es:*

$$y = y_p + u$$

$$y = \frac{2}{x} + \left(\frac{4cx^3 - x}{4}\right)^{-1}$$

La solución es:

$$y = \frac{2}{x} + \left(\frac{4}{4cx^3 - x}\right)$$

2.10. Ecuaciones de Lagrange y de Clairaut

Ecuación de Lagrange

Definición 2.9 *La ecuación 2.20 recibe el nombre de ecuación de Lagrange, donde* $p = y'$

$$y = x\phi(p) + \lambda(p) \tag{2.20}$$

Por medio de la derivación, y tendiendo en cuenta que $dy = p\ dx$, la ecuación 2.20 se reduce a lineal con respecto a x, como es muestra a continuación en la ecuación:

$$p\ dx = \phi(p)dx + [x\phi'(p) + \lambda(p)]dp \tag{2.21}$$

Si $p \not\equiv \phi(p)$ de las ecuaciones 2.20 y 2.21 se obtiene la solución general paramétrica:

$$x = Cf(p) + g(P)$$

$$y = [Cf(p) + g(p)]\phi(p) + \lambda(p)$$

Donde p es un parámetro y $f(p)$, $g(p)$ funciones conocidas determinadas. Además, puede existir una solución singular, que se busca por el procedimiento general.

Ecuación de Clairaut

Definición 2.10 *Si en la ecuación 2.20 $p \equiv \phi(p)$ entonces se obtiene la ecuación de Clairaut que finalmente queda como la ecuación 2.22.*

$$y = xp + \phi(p) \tag{2.22}$$

La solución general de esta ecuación tiene la forma de $y = Cx + \phi(C)$ que es una familia de rectas. Además existe la solución singular (envolvente), que se obtiene como resultado de eliminar el parámetro p del sistema de ecuaciones mostrado a continuación:

$$x = -\phi(p)$$

$$y = px + \phi(p)$$

Ejemplo 2.44 *Resolver la siguiente ecuación diferencial:*

$$y = 2y'x + \frac{1}{y'}$$

Solución:

Se usa la sustitución

$$y = p$$

$$dy = p\ dx$$

$$y = 2px + \frac{1}{p}$$

$$pdx = 2pdx + 2xdp - \frac{dp}{p^2}$$

$$dx(p - 2p) = dp\left(2x - \frac{1}{p^2}\right)$$

Se obtiene la ecuación lineal en términos del parámetro p

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = \frac{1}{p^3}$$

Se resulve usando el método que prefiera. Para este caso se usará el método de variación de parámetro

$$x = Ce^{\int P(p)dp}$$
$$\frac{x}{C} = e^{-2\ln p}$$
$$x = \frac{C}{p^2}$$
$$x' = \frac{dC}{dp}\frac{1}{p^2} - 2\frac{C}{p^3}$$

Se reemplaza x, x' en la ecuación original

$$\frac{dC}{dp}\frac{1}{p^2} - 2\frac{C}{p^3} + \frac{2}{p}\frac{C}{p^2} = \frac{1}{p^3}$$
$$\frac{dC}{dp} = \frac{1}{p}$$
$$C = \ln p + c_1$$

Se halla el valor de x

$$x = \frac{1}{p^2}(\ln p + c_1)$$

Se obtiene la la solución general:

$$\begin{cases} x = & \frac{1}{p^2}(\ln p + c_1) \\ y = & 2px + \frac{1}{p} \end{cases}$$

Se obtiene la solución singular formando el siguiente sistema y eliminando el parámetro p

$$\begin{cases} y = & 2px + \frac{1}{p} \\ 0 = & 2x - \frac{1}{p^2} \end{cases}$$

Se obtiene la solución:

$$x = \frac{1}{2p^2}$$
$$y = \frac{2}{p}$$
$$y = \pm 2\sqrt{2x}$$

Ejemplo 2.45 *Resolver la siguiente ecuación diferencial:*

$$y = xy' + (y')^2$$

Solución:

$$\begin{aligned}
y' &= p \\
\frac{dy}{dx} &= p \\
dy &= p\ dx \\
y' &= x\frac{dp}{dx} + p + 2p\frac{dp}{dx} \\
x &= -2p
\end{aligned}$$

Se obtiene la solución general

$$\begin{cases} x = & -2p \\ y = & xp + p^2 \end{cases}$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}
y &= -2p^2 + p^2 \\
y &= -p^2
\end{aligned}$$

Se obtiene la ecuación singular:

$$y = -\frac{x^2}{4}$$

Ejemplo 2.46 *Resolver la siguiente ecuación diferencial:*

$$y = xy' + \frac{1}{y'}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
y' &= p \\
y &= xp + \frac{1}{p} \\
y' &= x\frac{dp}{dx} + p - \frac{1}{p^2}\frac{dp}{dx} \\
p &= x\frac{dp}{dx} + p - \frac{1}{p^2}\frac{dp}{dx} \\
x &= \frac{1}{p^2}
\end{aligned}$$

Se obtiene la solución general

$$\begin{cases} x = & \frac{1}{p^2} \\ y = & xp + \frac{1}{p} \end{cases}$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$y = \frac{1}{p^2}p + \frac{1}{p}$$
$$y = \frac{2}{p}$$

Se obtiene la ecuación singular:

$$y^2 = 4x$$

Ejemplo 2.47 *Resolver la siguiente ecuación diferencial encontrar su solución general y singular:*

$$y = x\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Solución:

$$p = \frac{dy}{dx}$$
$$y = xp + p^2$$
$$y' = p + x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx}$$
$$p = p + x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx}$$
$$\frac{dp}{dx}(x + 2p) = 0$$
$$\frac{dp}{dx} = 0$$
$$x = -2p$$
$$x = -2\frac{dy}{dx}$$
$$xdx = -2dy$$
$$x^2 = 4y$$

Se obtiene la solución singular

$$x^2 + 4y = 0$$

Para la soluición general:

$$dp = 0$$

$$p = c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = c_1$$

$$dy = c_1 x dx$$

Se obtiene la solución general:

$$y = c_1 x + c_2$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Resolver la siguientes ecuaciones diferenciales

- $\sin y \frac{dx}{dy} + 2x \cos y = 4y \sin y.$
- $3y \frac{dx}{dy} - (x^2 - 9)x + \frac{1}{x} = 0.$
- $(2x^2 y + 1)dy + 2xy^2 dx = 0$
- $(x^2 + xy)dy - y^2 dx = 0$

3

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

CAPÍTULO 3

Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden

3.1. Aplicaciones geométricas

En el capítulo 1 y 2 se ha establecido las definiciones fundamentales, como se obtiene una ecuación diferencial y hallar las soluciones que puede ser generales, particulares y singulares.

Las ecuaciones diferenciales expresan analíticamente una determinada propiedad común de cada una de las familias de curvas. Adicionalmente, si se da una propiedad específica su representación implica una derivada cuya resultante será una familia de curvas que poseen la misma propiedad.

Estas curva se denominan curvas integrales y se pueden obtener a partir de cualquiera de los procedimientos antes descritos; si se desea una curva integral específica es necesario tener una propiedad adicional, por ejemplo un punto que pase por la curva o cualquier otra característica especial.

En la figura 3.1 se tiene una función $f(x, y) = 0$ en color verde y se ha especificado un punto (x, y), a partir de este gráfico se puede obtener la pendiente y tangente al punto, y de forma general a cualquier punto de la función dada.

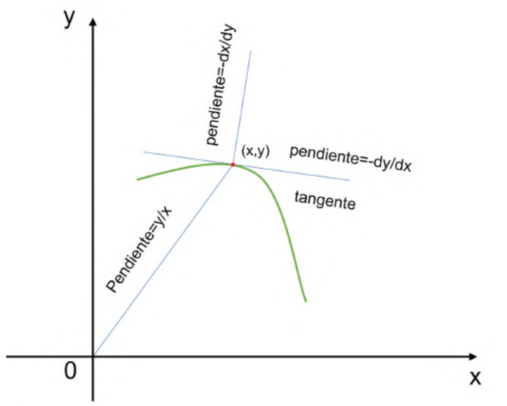

Figura 3.1: Coordenadas rectangulares 1

De igual manera en la figura 3.2 se puede obtener de forma gráfica la subtangentem, normal y subnormal al punto (x, y)

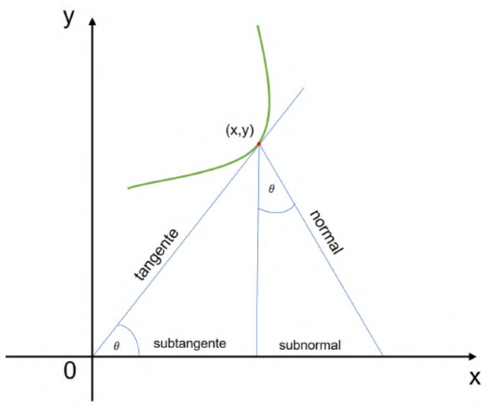

Figura 3.2: Coordenadas rectangulares 2

Para facilitar el estudio y aplicación de las ecuaciones diferenciales en la geometría se pueden utilizar las siguientes ecuaciones características que se cumplen para cualquier función $f(x, y) = 0$, en cualquier punto (x, y), se pueden utilizar en como fórmulas generales que permitan traducir el lenguaje coloquial al lenguaje matemático, como se muestran en los ejemplos posteriores.

1. Pendiente de la tangente a la curva (x, y): $\frac{dy}{dx}$.

2. Pendiente de la normal a la curva en (x, y): $-\frac{dx}{dy}$.

3. Ecuación de la tangente en (x, y) donde (X, Y) son las coordenadas de un punto cualquiera de la tangente: $Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$.

4. Ecuación de la normal en (x, y) donde (X, Y) son las coordenadas de un punto cualquiera de la normal: $Y - y = -\frac{dy}{dx}(X - x)$.

5. Segmentos interceptados en lo ejes x e y por la tangente: $x - y\frac{dx}{dy}$, $y - x\frac{dy}{dx}$.

6. Segmentos interceptados por la normal: $x + y\frac{dx}{dy}$, $y + x\frac{dx}{dy}$.

7. Longitudes de la tangente entre (x, y) y los ejes x e y: $y\sqrt{1 + \frac{dx}{dy}^2}$, $x\sqrt{1 + \frac{dy}{dx}^2}$.

8. Longitudes de la normal entre (x, y) y los ejes x e y: $y\sqrt{1 + \frac{dy}{dx}^2}$, $x\sqrt{1 + \frac{dx}{dy}^2}$.

9. Longitudes de la subtangente y subnormal: $y\frac{dx}{dy}$, $y\frac{dy}{dx}$.

10. Elemento de longitud de arco: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \frac{dy}{dx}^2} = dy\sqrt{1 + \frac{dx}{dy}^2}$

11. Elemento de área: ydx, xdy.

También se puede tener la función en coordenadas polares $f(\rho, \theta$ como se muestra la figura 3.3 donde se puede obtener su recta normal, subnormal, radio vector, subtangente y tangente a partir de la ecuaciones mostradas a continuación, que permitirán al lector utilizar y aplicar en la solución de aplicaciones geométricas de las ecuaciones diferenciales de primer orden.

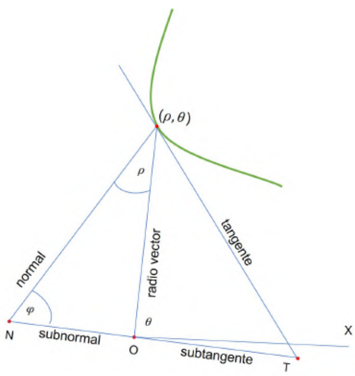

Figura 3.3: Coordenadas polares

1. φ es el ángulo entre el radio vector y la tangente dirigida hacia el origen de la curva: $\tan\varphi = \rho\frac{d\theta}{d\rho}$.

2. Longitud de la subtangente polar: $\rho\tan\varphi = \rho^2\frac{d\theta}{d\rho}$

3. Longitud de la subnormal polar: $\rho\cot\varphi = \frac{d\rho}{d\theta}$

4. Longitud de la perpendicular desde el polo a la tangente: $\rho\sin\varphi = \rho^2\frac{d\theta}{d\rho}$

5. Elemento de longitud de arco: $ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2)} = d\rho\sqrt{1+\rho(\frac{d\theta}{d\rho})^2} = d\theta\sqrt{(\frac{d\rho}{d\theta})^2+\rho^2}$

6. Elemento de área: $\frac{1}{2}\rho^2 d\theta$

Ejemplo 3.1 *En cada punto (x, y) de una curva el segmento que la tangente intercepta en el eje y es igual a $2xy^2$. Hallar la curva y graficar.*

Solución:

La gráfica del problema se muestra en la figura 3.4.

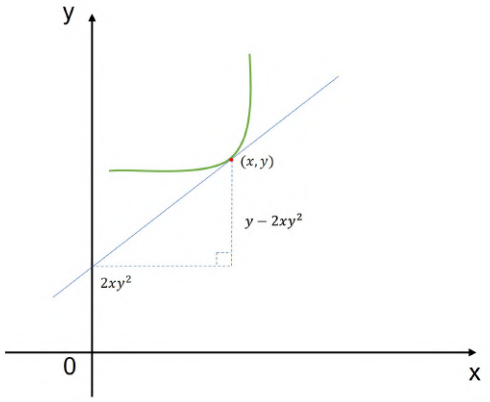

Figura 3.4: Gráfica del problema

$$y - x\frac{dy}{dx} = 2xy^2$$

$$ydx - xdy = 2xy^2dx$$

Se usa la siguiente sustitución:

$$y = ux$$

$$dy = udx + xdu$$

$$uxdx - x(dux + udx) = 2xu^2x^2dx$$

$$uxdx - x^2du - uxdx = 2xu^2x^2dx$$

$$-du = 2xu^2dx$$

$$-\frac{du}{u^2} = 2xdx$$

$$\frac{1}{u} = x^2$$

$$\frac{x}{y} - x^2 = c$$

La solución es

$$x - x^2y = yc$$

Ejemplo 3.2 *En cada punto* (x, y) *de una curva subtangente es proporcional al cuadrado de la abscisa. Hallar la curva si pasa también por el punto* $(1, e)$.

Solución:

$$y\frac{dx}{dy} = kx^2$$

donde k *es la constante de proporcionalidad*

$$k\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2}$$
$$k\ln y = -\frac{1}{x} + c$$

Para x=1; y=e

$$k\ln e = -1 + c$$
$$k = -1 + c$$
$$c = k + 1$$

La solución es:

$$k\ln y = -\frac{1}{x} + k + 1$$

Ejemplo 3.3 *Hallar la familia de curvas para las que la longitud de la parte de la tangente entre el punto de contacto* (x, y) *y el eje* y *es igual al segmento interceptado en* y *por la tangente.*

Solución:

$$x\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} = y - x\frac{dy}{dx}$$

Se utiliza la sustitución:

$$y = ux$$

$$dy = xdu + udx$$

$$x^2 + x^2(\frac{dy}{dx})^2 = y^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + x^2(\frac{dy}{dx})^2$$

$$x^2 = y^2 - 2xy\frac{dy}{dx}$$

$$x^2 = u^2x^2 - 2x(ux)\frac{xdu + udx}{dx}$$

$$x^2dx = u^2x^2dx - 2x^2u(xdu + udx)$$

$$x^2dx = u^2x^2dx - 2x^3udu - 2x^2udx$$

$$x^2dx + x^2u^2dx + 2x^3udu = 0$$

$$x^2(1 + u^2)dx + 2x^3udu = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{2udu}{u^2 + 1} = 0$$

$$\ln x + \ln(u^2 + 1) = \ln c$$

$$x(u^2 + 1) = c$$

$$x(\frac{y^2}{x^2} + 1) = c$$

$$x(\frac{y^2 + x^2}{x^2}) = c$$

La solución es:

$$x^2 + y^2 = xc$$

Ejemplo 3.4 *Hallar la ecuación de una curva tal que la suma de los interceptos de la tangente en cualquier punto es igual a una constante k.*

Solución:

Se tiene la figura 3.5 que representa el problema:

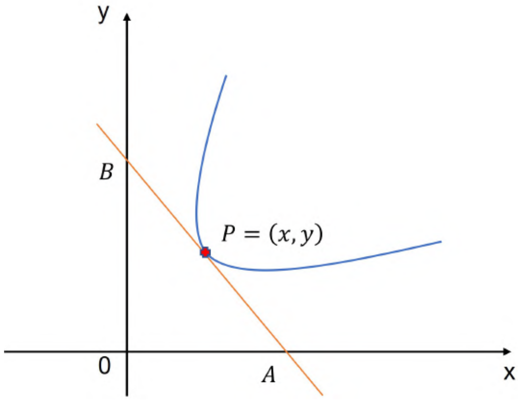

Figura 3.5: Gráfica del problema

Se parte de la ecuación de la recta tangente:

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

Se calcula el intercepto con el eje x:

$$Y = 0 \quad 0 - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$
$$X = x - \frac{y}{dy/dx}$$

Se calcula el intercepto con el eje y:

$$X = 0 \quad Y - y = \frac{dy}{dx}(0 - x)$$
$$Y = y - d\frac{dy}{dx}$$

Se suman ambos interceptos y se igual a k, para cumplir con la condición:

$$x - \frac{y}{dy/dx} + y - d\frac{dy}{dx} = k$$

Se reemplaza $y' = p$

$$
\begin{aligned}
x - \frac{y}{p} + y - xp &= k \\
px - y + yp - xp^2 &= kp \\
-y + yp &= kp - px + xp^2 \\
y(p-q) &= kp - px + xp^2 \\
y &= \frac{kp - px + xp^2}{p-1} \\
y &= \frac{kp}{p-1} + \frac{xp(p-1}{p-1} \\
y &= xp + \frac{kp}{p-1} \\
y' &= p + x\frac{dp}{dx} + \frac{k(p-1)(dp/dx) - kp(dp7dx)}{(p-1)^2} \\
p &= p + x\frac{dp}{dx} - \frac{k}{(p-1)^2}\frac{dp}{dx} \\
0 &= \frac{dp}{dx}\left(x - \frac{k}{(p-1)^2}\right) \\
\frac{dp}{dx} &= 0 \\
dp &= 0, \quad p = c_1
\end{aligned}
$$

La solución general es:

$$
\begin{aligned}
y &= c_1 + x + \frac{kc_1}{c_1 - 1} \\
x &= \frac{k}{(p-1)^2} \\
x(p-1)^2 &= k \\
p - 1 &= \sqrt{\frac{k}{x}} \\
p &= \sqrt{\frac{k}{x}} + 1 \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{\sqrt{k} + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx
\end{aligned}
$$

La solución singular es:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{k}$$

3.2. Aplicaciones físicas

Se pueden resolver ejercicios de aplicación para la solución de problemas físicos [18] como:

- Sistema masa – resorte
- Caída libre
- Circuitos eléctricos
- Densidad poblacional
- Computación e informática
- Teoría de control
- Otros

Ejemplo 3.5 *Resolver el circuito RL cuando el* $v(t) = 0$ *como se muestra en la 3.6.*

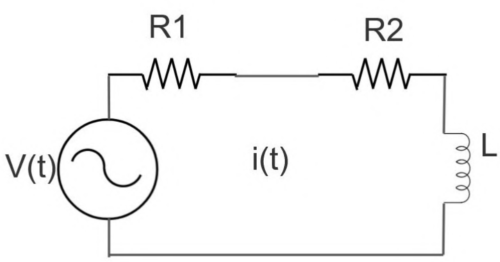

Figura 3.6: Circuito eléctrico

Solución:

$$v(t) = R_1 i(t) + R_2 i(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

$$v(t) = (R_1 + R_2)i(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{L}i(t) = 0$$

$$\int_0^t \frac{di(t)}{i(t)} = -\int_0^t \frac{R_1 + R_2}{L}$$

$$\ln i(t) = -\frac{R_1 + R_2}{L}t$$

$$\ln i(t) - \ln i(0) = -\frac{R_1 + R_2}{L}t$$

$$\ln \frac{i(t)}{I_0} = -\frac{R_1 + R_2}{L}t$$

$$\ln \frac{i(t)}{I_0} = -\frac{R_1 + R_2}{L}t$$

$$ce^{-\frac{R_1+R_2}{L}t} = \frac{i(t)}{I_0}$$

La solución es:

$$i(t) = I_0 ce^{-\frac{R_1+R_2}{L}t}$$

Ejemplo 3.6 *Según la segunda Ley de Newton de enfriamiento la velocidad a la que se enfría una sustancia es proporcional a la diferencia entre la temperatura de la sustancia y la del aire. Si la temperatura del aire es de 30 grados Celsius y la sustancia se enfría de 100 a 70 grados en 15 minutos. Calcule el tiempo cuando la temperatura sea 40 grados [19] .*

Solución:

$$\frac{dT}{dt} = k(T-30)$$

$$dT = k(T-30)dt$$

$$\int_{100}^{-70} \frac{dT}{T-30} = \int_{0}^{15} kdt$$

$$ln(40) - ln(70) = 15$$

$$ln\frac{4}{7} = 15k$$

$$k = \frac{ln\frac{4}{7}}{15}$$

$$k = -0{,}037$$

$$\int_{100}^{40} \frac{dT}{T-30} = \int_{0}^{t} kdt$$

$$ln(10) - ln(70) = kt$$

$$t = \frac{ln\frac{1}{7}}{k}$$

La solución es:

$$t = 52{,}59 \ mins$$

Ejemplo 3.7 *Un resorte de peso despreciable está suspendido verticalmente. En su extremos libre se ha sujetado una masa de "m"kilogramos. Si la masa se mueve con velocidad "Vo"que se mide en m/s cuando el resorte está sin alargar, hallar la velocidad "Vçomo función del alargamiento "x"metros.*

Solución:

Según la Ley de Hooke:

$$F = -kx$$

$$mg - kx = ma$$

$$mg - kx = m\frac{dV}{dt}$$

$$mg - kx = m\frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt}$$

$$mg - kx = mV\frac{dV}{dx}$$

$$mgx - \frac{kx^2}{2} = \frac{mV^2}{2} + c$$

$$2mgx - kx^2 = mV^2 + c$$

Tenemos:

$$-mV_0^2 = c$$

La solución es:

$$mV^2 = 2mgx - kx^2 + mV_0^2$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Resolver los ejercicios propuestos:

- La población de una bacteria en ecosistema acuático crece con una tasa proporcional a esta misma población, el valor inicial de esta, es de 785 y aumenta el 10 % en 3 años ¿Cuál será la población dentro de 5 años, 15 años y 30 años?.

- Las tangentes a una curva desconocida $y = f(x)$ forman con los ejes coordenadas en el primer cuadrante un triángulo de área constante C. Demuestre que la ecuación diferencial que describe este tipo de curvas está dado por $(xy')^2 + 2(k - xy)y' + y^2 = 0$.

4

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDENES SUPERIORES

CAPÍTULO 4

Ecuaciones diferenciales de órdenes superiores

4.1. Integración inmediata

Si $y^n = f(x)$ se tiene

$$y = \underbrace{\int dx \int \cdots \int}_{\text{n veces}} f(x)dx + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \cdots + c_n = 0 \tag{4.1}$$

Para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales es necesario integrar tantas veces sea necesario para llegar a la solución general; hay que recordar que el orden de la derivada nos indica también el número de constantes arbitrarias que debe poseer el resultado.

Ejemplos

Ejemplo 4.1 *Hallar la solución general de:*

$$y''' = xe^x$$

Solución:

Se integrará tres veces para obtener la solución:

$$y''' = xe^x$$

$$y'' = \int xe^x dx$$

$$u = x \qquad dv = e^x dx$$

$$du = dx \qquad v = e^x$$

$$y'' = xe^x - \int e^x dx$$

$$y'' = xe^x - e^x + C_1$$

$$y' = \int xe^x dx - \int e^x dx + \int C_1 dx$$

$$y' = xe^x - e^x - e^x + xC_1 + C_2$$

$$y' = xe^x - 2e^x + xC_1 + C_2$$

$$y = \int xe^x dx - 2\int e^x dx + \int xC_1 dx + C_2 \int dx$$

$$y = xe^x - e^x - 2e^x + \frac{x^2}{2}C_1 + xC_2 + C_3$$

La solución general es:

$$y = e^x(x-3) + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$$

Ejemplo 4.2 *Hallar la solución particular de:*

$$y''' = x\ln x$$

Con las condiciones iniciales:

$$y(1) = y'(1) = y''(1) = 0$$

Solución:

Se integrará tres veces para obtener la solución:

$$y''' = x\ln x$$

$$y(1) = y'(1) = y''(1) = 0$$

$$y'' = \int x\ln x dx$$

$$u = \ln x \qquad du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = xdx \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

$$y'' = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx$$
$$y'' = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C_1$$

Se aplica las condiciones iniciales

$$0 = 0 - \frac{1}{4} + C_1$$
$$C_1 = \frac{1}{4}$$
$$y'' = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}$$
$$y'' = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}$$
$$u = \ln x \qquad du = \frac{dx}{x}$$
$$dv = x^2 dx \qquad v = \frac{x^3}{3}$$
$$y' = \frac{1}{2}\int x^2 \ln x dx - \frac{1}{4}\int x^2 dx + \frac{1}{4}\int dx$$
$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx\right) - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x + C_2$$
$$y' = \frac{x^3 \ln x}{6} - \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x + C_2$$
$$y' = \frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{5}{36}x^3 + \frac{1}{4}x + C_2$$

Se aplica las condiciones iniciales

$$0 = 0 - \frac{5}{36} + \frac{1}{4} + C_2$$
$$C_2 = -\frac{1}{9}$$

$$y' = \frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{5}{36}x^3 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{9}$$
$$y = \frac{1}{6}\int x^3 \ln x dx - \frac{5}{36}\int x^3 dx + \frac{1}{4}\int x dx - \frac{1}{9}\int dx$$
$$y = \frac{1}{24}x^4 \ln x - \frac{1}{96}x^4 - \frac{5}{144}x^4 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{9}x + C_3$$
$$y = \frac{1}{24}x^4 \ln x - \frac{13}{288}x^4 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{9}x + C_3$$

Se aplica las condiciones iniciales

$$0 = 0 - \frac{13}{288} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + C_3$$
$$C_3 = \frac{1}{32}$$
$$y = \frac{1}{24}x^4 \ln x - \frac{13}{288}x^4 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{9}x + \frac{1}{32}$$

La solución particular es:

$$y = \frac{1}{24}x^4\left(\ln x - \frac{13}{12}\right) + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{9}x + \frac{1}{32}$$

Ejemplo 4.3 *Resolver:*

$$y'' = \frac{1}{x}$$

Solución:

Se integrará dos veces para obtener la solución:

$$y'' = \frac{1}{x}$$

$$y' = \ln x + C_1$$

$$u = \ln x \qquad du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = dx \qquad v = x$$

$$y = \int \ln x dx + \int C_1 dx$$

$$y = x\ln x - x + xC_1 + C_2$$

$$y = x(\ln x - 1 + C_1) + C_2$$

$$y = x(\ln x + C_1) + C_2$$

La solución general es:

$$y = x\ln|x| + xC_1 + C_2$$

Ejemplo 4.4 *Resolver:*

$$y'' = -\frac{1}{2y^3}$$

Solución:

Se integrará dos veces para obtener la solución:

$$
\begin{aligned}
y'' &= -\frac{1}{2y^3} \\
p\frac{dp}{dy} &= -\frac{1}{2y^3} \\
pdp &= -\frac{dy}{2y^3} \\
\frac{p^2}{2} &= \frac{1}{4y^2} + C_1 \\
p^2 &= \frac{1 + C_1 y^2}{2y^2} \\
\frac{dy}{dx} &= \sqrt{\frac{1 + C_1 y^2}{2y^2}} \\
\sqrt{\frac{2y^2}{C_1 y^2 + 1}} dy &= dx \\
\frac{\sqrt{2}\sqrt{C_1 y^2 + 1}}{C_1} &= x + C_2
\end{aligned}
$$

La solución es:

$$\sqrt{2}\sqrt{C_1 y^2 + 1} = C_1 x + C_1 C_2$$

4.2. Disminuir el orden de la ecuación

Para la solución de este tipo de ecuaciones diferenciales se tomará en cuenta los dos casos siguientes:

1. Si la ecuación diferencial no contiene y de forma explícita, como se muestra a continuación:

$$F(x, y', y'') = 0$$

Se deberá colocar $y' = p$, y se obtiene una ecuación de orden inferior en una unidad

$$F(x, p, p') = 0$$

Por lo que es más sencilla su resolución a través de los métodos ya estudiados.

2. Si la ecuación diferencial no contiene x de forma explícita, como se muestra a continuación:

$$F(y, y', y'') = 0$$

Poniendo $y' = p$, $y'' = p\frac{dp}{dy}$, obtenemos una ecuación de orden inferior en una unidad

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0$$

Se procede a resolver la EDO con los procedimientos aprendidos en la unidad anterior.

Ejemplo 4.5 *Resolver:* $xy'' + y' + x = 0 \quad y = 0, \quad y' = 0 \quad$ *para* $x = 0$

Solución:

$$xy'' + y' + x = 0$$

$$y' = p$$

$$y'' = p'$$

$$xp' + p + x = 0$$

$$p' + \frac{1}{x}p + 1 = 0$$

$$p = ce^{-\int \frac{dx}{x}}$$

$$\frac{c}{p} = e^{\ln x}$$

$$\ln x = \ln \frac{c}{p}$$

$$x = \frac{c}{p}$$

$$p = \frac{c}{x}$$

$$p' = \frac{1}{x}\frac{dc}{dx} - \frac{c}{x^2}$$

$$\frac{1}{x}\frac{dc}{dx} - \frac{c}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{c}{x} = 0$$

$$\frac{1}{x}\frac{dc}{dx} = -1$$

$$dc = -xdx$$

$$c = -\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$p = \frac{1}{x}\left(-\frac{x^2}{2} + C_1\right)$$

$$px = -\frac{x^2}{2} + C_1$$

Se aplican las condiciones iniciales

$$p(0) = \frac{0}{2} + C_1$$

$$C_1 = 0$$

$$p = -\frac{x}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2}$$

$$2dy = -xdx$$

$$2y = -\frac{x^2}{2} + C_2$$

$$y = -\frac{x^2}{4} + C_2$$

Se aplican las condiciones iniciales

$$0 = -\frac{0^2}{4} + C_2$$

$$C_2 = 0$$

La solución particular es:

$$y = -\frac{x^2}{4}$$

Ejemplo 4.6 *Resolver:* $yy'' - y'^2 = y^4 \quad y = 1, \quad y' = 0 \quad$ *para* $x = 0$

Solución:

$$yy'' - y'^2 = y^4$$

$$y' = p$$

$$y'' = p\frac{dp}{dy}$$

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 = y^4$$

$$\frac{dp}{dy} - \frac{1}{y}p = \frac{1}{p}y^3$$

$$p' = \frac{1}{y}p + y^3p^-1$$

Se aplica Bernoulli

$$p = uv$$

$$p' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' = \frac{1}{y}uv + \frac{y^3}{uv}$$

$$v\left(u'-\frac{1}{y}u\right)+uv'=\frac{y^3}{uv}$$

$$u'=\frac{1}{y}u$$

$$\frac{du}{dy}=\frac{u}{y}$$

$$\frac{y}{dy}=\frac{u}{du}$$

$$\ln y=\ln u$$

La solución de y es

$$y=u$$

$$uv'=\frac{y^3}{uv}$$

$$yv'=\frac{y^3}{yv}$$

$$v'=\frac{y}{v}$$

$$\frac{dv}{dy}=\frac{y}{v}$$

$$vdv=ydy$$

$$v^2=y^2+C_1$$

La solución v es:

$$v=\pm\sqrt{y^2+C_1}$$

Ejemplo 4.7 *Resolver:*

$$xy''+y'=0$$

Solución:

$$xy''+y'=0$$

$$p=y'$$

$$p'=y''$$

$$xp'+p=0$$

$$p'+\frac{p}{x}=0$$

$$
\begin{aligned}
p' &= -\frac{p}{x} \\
\frac{dp}{dx} &= -\frac{p}{x} \\
\frac{dp}{p} &= -\frac{dx}{x} \\
\ln p &= -\ln x + \ln C_1 \\
p &= \frac{C_1}{x} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{C_1}{x} \\
\int dy &= C_1 \int \frac{dx}{x}
\end{aligned}
$$

La solución general es

$$y = C_1 \ln x + C_2$$

Ejemplo 4.8 *Resolver:*

$$x^2y'' + xy' = 1$$

Solución:

$$
\begin{aligned}
x^2y'' + xy' &= 1 \\
p &= y' \\
p' &= y'' \\
x^2p' + xp &= 1 \\
p' + \frac{p}{x} &= \frac{1}{x^2} \\
p' + \frac{1}{x}p &= \frac{1}{x^2} \\
p &= ce^{-\int \frac{dx}{x}} \\
\frac{c}{p} &= e^{\ln x} \\
\ln x &= \ln \frac{c}{p} \\
x &= \frac{c}{p} \\
p &= \frac{c}{x}
\end{aligned}
$$

$$p' = \frac{dc}{dx}\frac{1}{x} - \frac{c}{x^2}$$
$$\frac{dc}{dx}\frac{1}{x} - \frac{c}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{c}{x} = \frac{1}{x^2}$$
$$dc = \frac{dx}{x}$$
$$c = \ln x + C_1$$
$$p = \frac{c}{x}$$
$$p = \frac{\ln x + C_1}{x}$$
$$\frac{dy}{x} = \frac{\ln x + C_1}{x}$$
$$dy = \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{C_1}{x}\right) dx$$
$$y = \int \frac{\ln x}{x} dx + C_1 \int \frac{dx}{x}$$
$$u = \ln x$$
$$du = \frac{dx}{x}$$
$$y = \int u du + C_1 \ln x + C_2$$
$$y = \frac{u^2}{2} + C_1 \ln x + C - 2$$

La solución general es

$$y = \frac{\ln^2 x}{2} + C_1 \ln x + C_2$$

Ejemplo 4.9 *Resolver:*

$$yy'' - y'(1 + y') = 0$$

Solución:

$$yy'' - y'(1 + y') = 0$$
$$y' = p$$
$$y'' = p\frac{dp}{dy}$$
$$yp\frac{dp}{dy} - p(1 + p) = 0$$
$$\frac{dp}{dy} = \frac{p(1 + p)}{yp}$$
$$\frac{dp}{p + 1} = \frac{dy}{y}$$

$$\ln(p+1) = \ln y + \ln C_1$$

$$p+1 = yC_1$$

$$p = yC_1 - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = yC_1 - 1$$

$$\frac{dy}{yC_1 - 1} = dx$$

$$u = yC_1 - 1$$

$$du = C_1 dy$$

$$\frac{1}{C_1}\int \frac{dy}{u} = x$$

$$\frac{1}{C_1}\ln(yC_1 - 1) = x + \ln C_2$$

$$\ln(yC_1 - 1) = C_1 x + C_1 \ln C_2$$

$$\ln\frac{C_1 y - 1}{C_2} = C_1 x$$

$$e^{C_1 x} = \frac{C_1 y - 1}{C_2}$$

$$C_2 e^{C_1 x} = C_1 y - 1$$

$$C_2 e^{C_1 x} + 1 = C_1 y$$

La solución general es

$$y = \frac{C_2}{C_1}e^{C_1 x} + \frac{1}{C_1}$$

4.3. Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de coeficientes constantes

Definición 4.1 *Las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de coeficientes constantes son de la forma:*

$$a_n\frac{d^n y}{dx^x} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \tag{4.2}$$

Donde $a_0, a_1, \cdots, a_n$ son constantes.

Para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales primero se considera el polinomio característico.

$$P(r) = a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0 \tag{4.3}$$

Este polinomio característico P(r) se obtuvo de la siguiente manera; para ello, primero se considerará la solución 4.4.

$$y = e^{rx} \tag{4.4}$$

Con lo que se obtiene el conjunto fundamental de soluciones que se puede abreviar con las letras CFS y se representa en la 4.5.

$$CFS = \begin{cases} y & = e^r x \\ \\ y' & = re^r x \\ \\ y'' & = r^2 e^r x \\ \\ y^n & = r^n e^r x \end{cases} \tag{4.5}$$

Reemplazando esta en la ecuación 4.2 se obtiene la ecuación 4.6:

$$a_n r^n e^{rx} + \cdots + a_2 r^2 e^{rx} + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} = 0 \tag{4.6}$$

Luego se saca factor e^{rx} y se tiene:

$$e^{rx}(a_n r^n + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0) = 0 \tag{4.7}$$

Por lo tanto, este polinomio característico $P(r) = 0$ es de grado n, por cual se pueden obtener las siguientes raíces $r_1, r_2, \cdots, r_n$, las cuales pueden ser:

- Reales y distintas.
- Reales y de multiplicidad.
- Números complejos.

Entonces para dar solución a una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes se puede considerar los siguientes casos:

Primer Caso

Cuando las raíces del polinomio característico $P(r) = 0$ son reales y distintas, es decir $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq \cdots r_n$ el conjunto fundamental de soluciones tiene la forma de la ecuación 4.8

$$CFSe^{r_1x}, e^{r_2x}, \cdots, e^{r_nx} \tag{4.8}$$

Y la solución de la ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes esta representada en la ecuación 4.9

$$y_g = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} + c_3e^{r_3x} + \cdots + c_ne^{r_nx} \tag{4.9}$$

Segundo Caso

Cuando las raíces del polinomio característico $P(r) = 0$ son reales y algunas de ellas son de multiplicidad, es decir $r_1 = r_2 = r_3 = \cdots r_k = r$ donde r es la raíz de multiplicidad k y $(n-k)$ son otras raíces distintas, entonces el conjunto fundamental de soluciones tiene la forma de la ecuación 4.10

$$CFSe^{r_1x}, xe^{r_x}, x^2e^{r_x}, \cdots, e^{k-1}e^{rx} \tag{4.10}$$

Y la solución de la ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes esta representada en la ecuación 4.11

$$y_g = c_1e^{r_1x}, c_2xe^{r_x}, c_3x^2e^{r_x}, \cdots, c_ne^{k-1}e^{rx} \tag{4.11}$$

Tercer Caso

Cuando las raíces de la ecuación polinómico $P(r) = 0$ alguna de estas raíces son complejas: $r_1 = \alpha_1 + i\beta_1, r_1 = \alpha_1 - i\beta_1, r_2 = \alpha_2 + i\beta_2, r_2 = \alpha_2 - i\beta_2$ Entonces el sistema fundamental de soluciones que da la forma representada en la ecuación 4.12.

$$CFS = e^{\alpha_1x}\cos\beta_1x, e^{\alpha_1x}\sin\beta_1x, e^{\alpha_2x}\sin\beta_2x, e^{\alpha_2x}\sin\beta_2x, \cdots \tag{4.12}$$

y la solución general de la ecuación diferencial homogénea es la ecuación 4.13

$$y_g = c_1e^{\alpha_1x}\cos\beta_1x, c_2e^{\alpha_1x}\sin\beta_1x, c_3e^{\alpha_2x}\sin\beta_2x, c_4e^{\alpha_2x}\sin\beta_2x, \cdots \tag{4.13}$$

El procedimiento para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales es:

1. Transformar la ecuación diferencial al polinomio característico, en términos de r.

   Ejemplo: Si la ecuación es $y'' - 2y' + 4y = 0$ el polinomio característico es $P(r) = r^2 - 2r + 4$.

2. A través de procesos algebraicos se encuentran la raíces del polinomio característico y se comparan con los tres casos anteriores.

3. Se coloca el conjunto fundamental de soluciones.

4. Finalmente, se coloca la solución particular multiplicando cada elemento del conjunto fundamental de soluciones por las constantes; recordar que el número de constantes debe ser igual al orden de la ecuación diferencial.

Ejemplo 4.10 *Resolver la siguiente ecuación diferencial:*

$$y''' - y'' + 5y' + 7y = 0$$

Solución:

El polinomio característico es:

$$P(r) = r^3 - r^2 + 5r + 7 = 0$$

Las raíces son:

$$r_1 = -1, \quad r_2 = 1 + \sqrt{6}i, \quad r_3 = 1 - \sqrt{6}i$$

En este caso se tiene una raíz real y dos raíces reales complejas, lo que corresponde al caso uno y tres.

El conjunto fundamental de soluciones es:

$$CFS = e^{-x}, e^x \cos\sqrt{6}x, e^x \sin\sqrt{6}x$$

La solución es:

$$y_g = c_1 e^{-x} + c_2 e^x \cos\sqrt{6}x + c_3 e^x \sin\sqrt{6}x$$

Ejemplo 4.11 *Resolver la siguiente ecuación diferencial:*

$$y^{IV} - 2y'' + y = 0$$

Solución:

El polinomio característico es:

$$P(r) = r^4 + 2r^2 + 1 = 0$$

Las raíces son:

$$r_1 = i, \quad r_2 = -i$$

Cada una de multiplicidad k=2. Estas raíces son imaginarias lo que corresponde al caso tres.

El conjunto fundamental de soluciones es:

$$CFS = \cos x, x\cos x, \sin x, x\sin x$$

La solución es:

$$y_g = c_1 \cos x + c_2 x \cos x + c_3 \sin x + c_4 x \sin x$$

Ejemplo 4.12 *Resolver la siguiente ecuación diferencial:*

$$\frac{d^6y}{dx^6} + 6\frac{d^4y}{dx^4} + 9\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$$

Solución:

El polinomio característico es:

$$P(r) = r^6 + 6r^4 + 9r^2 + 4 = 0$$

Las raíces son:

$$r_1 = i, \quad r_2 = -i$$

Estas raíces son imaginarias y de multiplicidad k=2, que corresponde al caso 3.

$$r_3 = 2i, \quad r_4 = -2i$$

Estas raíces son imaginarias y de multiplicidad k=1, que corresponde al caso 3.

El conjunto fundamental de soluciones es:

$$CFS = \cos x, \sin x, x\cos x, s\sin x, \cos 2x, \sin 2x$$

La solución es:

$$y_g = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 \sin x + c_5 \cos 2x + c_6 \sin 2x$$

Ejemplo 4.13 *Resolver la siguiente ecuación diferencial:*

$$y^{VI} - y = 0$$

Solución:

El polinomio característico es:

$P(r) = r^6 - 1 = 0$

Las raíces son:

$$r_1 = 1$$

$$r_2 = -1$$

$$r_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$r_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$r_5 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$r_6 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Son raíces reales e imaginarias lo que corresponde al caso uno y tres.

El conjunto fundamental de soluciones es:

$CFS = e^x, e^{-x}, e^{1/2}\cos\sqrt{3}/2x, e^{1/2}\sin\sqrt{3}/2x, e^{-1/2}\cos\sqrt{3}/2x, e^{-1/2}\sin\sqrt{3}/2x$

La solución es:

$$y_g = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-x} + c_4 e^{1/2}\cos\sqrt{3}/2x + c_5 e^{1/2}\sin\sqrt{3}/2x + c_6 e^{-1/2}\cos\sqrt{3}/2x + c_7 e^{-1/2}\sin\sqrt{3}/2x$$

Ejemplo 4.14 *Resolver la siguiente ecuación diferencial:*

$$y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$$

Solución:

El polinomio característico es:

$$P(r) = r^3 + 6r^2 + 11r + 6 = 0$$

Las raíces son:

$$r_1 = -1, \quad r_2 = -2 \quad r_3 = -3$$

En este caso las raíces son reales de multiplicidad k=1, lo que corresponde al caso uno.

El conjunto fundamental de soluciones es:

$$CFS = e^{-x}, e^{-2x}, e^{-3x}$$

La solución es:

$$y_g = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + c_3e^{-3x}$$

Ejemplo 4.15 *Resolver la siguiente ecuación diferencial:*

$$2y'' - 5y' - 3y = 0$$

Solución:

El polinomio característico es:

$$P(r) = 2r^2 - 5r - 3 = 0$$

Las raíces son:

$$r_1 = -1/2, \quad r_2 = 3$$

En este caso, las raíces son reales de multiplicidad k=1, lo que corresponde al caso uno.

El conjunto fundamental de soluciones es:

$$CFS = e^{-1/2x}, e^{3x}$$

La solución es:

$$y_g = c_1 e^{-1/2x} + c_2 e^{3x}$$

Ejemplo 4.16 *Resolver la siguiente ecuación diferencial:*

$$2y'' - 10y' + 25y = 0$$

Solución:

El polinomio característico es:

$$P(r) = r^2 - 10r + 25 = 0$$

Las raíces son:

$$r_1 = r_2 = 5$$

En este caso, las raíces son reales de multiplicidad k=2, lo que corresponde al caso dos.

El conjunto fundamental de soluciones es:

$$CFS = e^{5x}, xe^{5x}$$

La solución es:

$$y_g = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}$$

Ejemplo 4.17 *Resolver la siguiente ecuación diferencial:*

$$y'' + y' + y = 0$$

Solución:

El polinomio característico es:

$$P(r) = r^2 + r + 1 = 0$$

Las raíces son:

$$r_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$r_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

En este caso las raíces son imaginarias de multiplicidad k=1, lo que corresponde al caso tres.

El conjunto fundamental de soluciones es:

$$CFS = e^{-1/2x}\cos(\sqrt{3}/2x), e^{-1/2x}\sin(\sqrt{3}/2x)$$

$$y_g = c_1 e^{-1/2x}\cos(\sqrt{3}/2x) + c_2 e^{-1/2x}\sin(\sqrt{3}/2x)$$

La solución es:

$$y_g = e^{-1/2x}(c_1\cos(\sqrt{3}/2x) + c_2\sin(\sqrt{3}/2x))$$

Ejemplo 4.18 *Resolver la siguiente ecuación diferencial:*

$$y''' + 3y'' - 4y = 0$$

Solución:

El polinomio característico es:

$$P(r) = r^3 + 3r^2 - 4 = 0$$

Las raíces son:

$$r_1 = 1 \quad r_2 = -2 \quad r_3 = -2$$

En este caso las raíces son reales de multiplicidad k=1, lo que corresponde al caso tres.

El conjunto fundamental de soluciones es:

$$CFS = e^x, e^{-2x}, xe^{-2x}$$

La solución es:

$$y_g = c_1e^x + c_2e^{-2x} + c_3xe^{-2x}$$

Ejemplo 4.19 *Resolver la siguiente ecuación diferencial:*

$$y^{IV} - y = 0$$

Solución:

El polinomio característico es:

$$P(r) = r^4 - 1 = 0$$

Las raíces son:

$$r_1 = r_2 = \pm i$$

$$r_3 = r_4 = \pm i$$

En este caso las raíces son imaginarias de multiplicidad k=2, lo que corresponde al caso tres.

El conjunto fundamental de soluciones es:

$$CFS = e^x, xe^{-x}, \cos x, \sin x$$

La solución es:

$$y_g = c_1e^x + c_2xe^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x$$

4.4. Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de coeficientes constantes

Definición 4.2 *Estas ecuaciones diferenciales son de la forma 4.14.*

$$a_n\frac{d^ny}{dx^x} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dx} + a_0y = R(x) \tag{4.14}$$

Donde $a_0, a_1, a_2, \cdots a_n$ *son constantes y elementos de los reales.*

Para dar soluciones a este tipo de problemas, lo primero es determinar la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea y_g visto en la sección anterior y después se busca la solución particular y_p que correspondería a solución de la ecuación diferencial no homogénea.

Finalmente, la solución general de una ecuación diferencial no homogénea es igual a la suma de la solución general y particular 4.15.

$$y = y_g + y_p \tag{4.15}$$

Entonces, en este caso, el problema se reduce en encontrar la solución particular y_p de la ecuación diferencial no homogénea.

Para ello se va analizar la función $R(x)$, sí tiene la forma 4.16

$$R(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)] \tag{4.16}$$

Donde $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ sean polinomios de grado n y m respectivamente, la solución particular y_p es de la forma 4.17

$$y_p = x^s e^{\alpha x}[\widehat{P_k(x)}\cos(\beta x) + \widehat{Q_k(x)}\sin(\beta x)] \tag{4.17}$$

Donde $k = max\{m, n\}$ y s es el orden de multiplicidad de la raíz: $r = \alpha \pm i\beta$ y $\widehat{P_k(x)}, \widehat{Q_k(x)}$ son polinomios de grado k de coeficientes indeterminados. Ahora es necesario encontrar el valor de estos coeficientes, para esto se considera los siguientes casos:

Primer Caso

Cuando $R(x) = P(x)$ entonces:

1. Sí $r = 0$ y no es raíz del polinomio característico $P(r) = 0$ entonces la solución particular es:

$$y_p = \widehat{P_n(x)}$$

2. Sí $r = 0$ y es raíz del polinomio característico $P(r) = 0$ entonces la solución particular es:

$$y_p = x^s\widehat{P_n(x)}$$

   Donde s es el término de multiplicidad de $r = 0$

Segundo Caso

Si $R(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, donde α es real, entonces

1. Sí $r = \alpha$ y no es raíz del polinomio característico $P(r) = 0$ entonces la solución particular es:

$$y_p = e^x \widehat{P_n(x)}$$

2. Sí $r = \alpha$ y es raíz del polinomio característico $P(r) = 0$ entonces la solución particular es:

$$y_p = e^x x^s \widehat{P_n(x)}$$

Donde s es el término de multiplicidad de $r = \alpha$

Tercer Caso

Si $R(x) = P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)$, entonces

1. Sí $r = \pm i\beta$ y no son raíces del polinomio característico $P(r) = 0$ entonces la solución particular es:

$$y_p = \widehat{P_k(x)}\cos(\beta x) + \widehat{Q_k(x)}\sin(\beta x)$$

Donde $k = max\{m, n\}$

2. Sí $r = \pm i\beta$ y es raíz del polinomio característico $P(r) = 0$ entonces la solución particular es:

$$y_p = x^s[\widehat{P_k(x)}\cos(\beta x) + \widehat{Q_k(x)}\sin(\beta x)]e^{\alpha x}$$

Donde $k = max\{m, n\}$ y s es el término de multiplicidad de $r = \alpha \pm i\beta$

Ejemplo 4.20 *Resolver la siguiente ecuación diferencial:*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} = 3$$

Solución:

El polinomio característico es:

$$P(r) = r^2 + 3r = 0$$

Las raíces son:

$$r_1 = 0, \quad r_2 = -3$$

El conjunto fundamental de soluciones es:

$$CFS = e^{0x}, e^{-3x}$$

La solución general es:

$$y_g = c_1 + c_2 e^{-3x}$$

Para la solución particular se toma el caso uno literal dos, es decir:

$$y_p = Ax$$

Se deriva tanta veces lo requiera la ecuación diferencial

$$y_p' = A$$

$$y_p'' = 0$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial y a través de un sistema de ecuaciones se busca los valores de las constantes

$$0 + 3A = 3$$

$$A = 1$$

La solución particular es:

$$y_p = x$$

La solución total es:

$$y = c_1 + c_2 e^{-3x} + x$$

Ejemplo 4.21 *Resolver la siguiente ecuación diferencial:*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 15 = -(15x^2 + 4x + 13)$$

Solución:

El polinomio característico es:

$$P(r) = r^2 - 2r - 15 = 0$$

Las raíces son:

$$r_1 = -3, \quad r_2 = 5$$

El conjunto fundamental de soluciones es:

$$CFS = e^{-3x}, e^{5x}$$

La solución general es:

$$y_g = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{5x}$$

La solución particular se obtiene del caso uno literal uno, es decir:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

Se deriva 2 veces:

$$y_p' = 2Ax$$

$$y_p'' = 2A$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$2A - 2(2xA + B) - 15(Ax^2 + Bx + C) = -(15x^2 + 4x + 13)$$

$$2A - 4xA - 2B - 15Ax^2 - 15Bx - 15C = -15x^2 - 4x - 13$$

$$x^2(-15A) + x(-4A - 15B) + (2A - 2B - 15C) = -15x^2 - 4x - 13$$

$$x^2(-15A) = -15x^2$$

$$(-4A - 15B) = -4x$$

$$2A - 2B - 15C = -13$$

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 1$$

La solución particular es:

$$y_p = x^2 + 1$$

La solución total es:

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{5x} + x^2 + 1$$

Ejemplo 4.22 *Resolver la siguiente ecuación diferencial:*

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 3\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = -4x^5 + 390x$$

Solución:

El polinomio característico es:

$$P(r) = r^4 - 3r^2 - 4 = 0$$

Las raíces son:

$$r_1 = -2 \quad r_2 = 2 \quad r_3 = i \quad r_4 = -i$$

El conjunto fundamental de soluciones es:

$$CFS = e^{-2x}, e^{2x}, \cos x, \sin x$$

La solución general es:

$$y_g = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

La solución particular se obtiene de acuerdo al caso uno literal dos, es decir:

$$y_p = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$$

Se deriva 4 veces:

$$y_p' = 5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2 + 2Dx + E$$

$$y_p'' = 20Ax^3 + 12Bx^2 + 6Cx + 2D$$

$$y_p''' = 60Ax^2 + 24Bx + 6C$$

$$y_p^{IV} = 120Ax + 24Bx$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$120Ax + 24B - 3(20Ax^3 + 12Bx^2 + 6Cx + 2D) - 4(Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F) = -4x^5 + 390x$$

$$-4Ax^5 - 4Bx^4 + x^3(-60A - 4C) + x^2(-36B - 4D) + x(120A - 18C - 4E) + (24B - 6D - 4F) = -4x^5 + 390x$$

$$-4Ax^5 = -4x^5$$

$$A = 1$$

$$-Bx^4 = 0$$

$$B = 0$$

$$x^3(-60A - 4C) = 0$$

$$C = -15$$

$$x^2(-36B - 4D) = 0$$

$$D = 0$$

$$x(120A - 18C - 4E) = 0$$

$$E = 0$$

$$24B - 6D - 4F = 0$$

$$F = 0$$

La solución particular es:

$$y_p = x^5 - 15x^3$$

La solución total es:

$$y = c_1e^{-2x} + c_2e^{2x} + c_3\cos x + c_4\sin x + x^5 - 15x^3$$

Ejemplo 4.23 *Resolver la siguiente ecuación diferencial:*

$$y'' - 7y' + 6y = (x - 2)e^x$$

Solución:

El polinomio característico es:

$$P(r) = r^2 - 7r + 6 = 0$$

Las raíces son:

$$r_1 = 6, \quad r_2 = 1$$

El conjunto fundamental de soluciones es:

$$CFS = e^x, e^{6x}$$

La solución general es:

$$y_g = c_1 e^x + c_2 e^{6x}$$

La solución particular se obtiene de acuerdo al caso dos literal uno, es decir:

$$y_p = e^x(Ax^2 + Bx)$$

Se deriva 2 veces:

$$y_p' = e^x(Ax^2 + Bx) + e^x(2Ax + B)$$

$$y_p'' = e^x(Ax^2 + Bx) + e^x(2Ax + B) + e^x(2A + B) + e^x(2A)$$

$$y_p'' = e^x[(Ax^2 + Bx) + 2(2Ax + B) + 2A]$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$e^x[(Ax^2 + Bx) + 2(2Ax + B) + 2A] - 7(e^x(Ax^2 + Bx) + e^x(2Ax + B)) + 6(e^x(Ax^2 + Bx)) = (x - 2)e^x$$

$$Ax^2 + Bx + 4Ax + 2B + 4A - 7Ax^2 - 7Bx - 14Ax - 7B + 6Ax^2 + 6Bx = x - 2$$

$$x^2(A - 7A + 6A) + x(B + 4A - 7B - 14A + 6B) + (2B + 2A - 7B) = x - 2$$

$$(A - 7A + 6A) = 0$$

$$B + 4A - 7B - 14A + 6B = 1$$

$$A = -\frac{1}{10}$$

$$2B + 2A - 7B = -2$$

$$B = \frac{9}{25}$$

La solución es particular es:

$$y_p = x\left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25}\right)$$

La solución total es:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{6x} + x\left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25}\right)e^x$$

Ejemplo 4.24 *Resolver la siguiente ecuación diferencial:*

$$y'' + 2y' + 5y = 2\cos x$$

Solución:

El polinomio característico es:

$$P(r) = r^2 + 2r + 5 = 0$$

Las raíces son:

$$r_1 = -1 + 2i$$

$$r_2 = -1 - 2i$$

El conjunto fundamental de soluciones es:

$$CFS = e^{-x}\cos 2x, e^{-x}\sin 2x$$

La solución general es:

$$y_g = c_1 e^{-x}\cos 2x + c_2 e^{-x}\sin 2x$$

La solución particular se obtiene de acuerdo al caso tres literal dos, es decir:

$$y_p = A\cos x + B\sin x$$

Se deriva 2 veces:

$$y_p' = -A\sin x + B\cos x$$

$$y_p'' = -A\cos x - B\sin x$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$-A\cos x - B\sin x - 2A\sin x + 2B\cos x + 5A\cos x + 5B\sin x = 2\cos x$$

$$\cos x(-A + 2B + 5A) + \sin x(-B - 2A + 5B) = 2\cos x$$

$$A = \frac{2}{5}$$

$$B = \frac{1}{5}$$

La solución es particular es:

$$y_p = \frac{2}{5}cosx + \frac{2}{5}\sin x$$

La solución total es:

$$y = c_1e^{-x}\cos 2x + c_2e^{-x}\sin 2x + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$$

Ejemplo 4.25 *Resolver la siguiente ecuación diferencial:*
Solución:

$$y'' + 4y' + 3y = x$$

El polinomio característico es:

$$P(r) = r^2 + 4r + 3 = 0$$

Las raíces son:

$$r_1 = -1$$

$$r_2 = -3$$

El conjunto fundamental de soluciones es:

$$CFS = e^{-x}, e^{-3x}$$

La solución general es:

$$y_g = c1e^{-x} + c_2e^{-3x}$$

La solución particular se obtiene de acuerdo al caso dos literal dos, es decir:

$$y_p = Ax + B$$

Se deriva 2 veces:

$$y_p' = A$$

$$y_p'' = 0$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$4A + 3Ax + 3B = x$$

$$A = \frac{1}{3}$$

$$B = -\frac{4}{9}$$

La solución es particular es:

$$y_p = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$$

La solución total es:

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{-3x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$$

Ejemplo 4.26 *Resolver la siguiente ecuación diferencial:*

$$y'' + 9y = (x^2 + 1)e^{3x}$$

Solución:

El polinomio característico es:

$$P(r) = r^2 + 9 = 0$$

Las raíces son:

$$r_1 = 3i$$

$$r_2 = -3i$$

El conjunto fundamental de soluciones es:

$$CFS = c_1 \cos 3x, c_2 \sin 3x$$

La solución general es:

$$y_g = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$$

La solución particular se obtiene de acuerdo al caso dos literal dos, es decir:

$$y_p = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$$

Se deriva 2 veces:

$$y_p' = (2Ax + B)e^{3x} + 3(Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$$
$$y_p'' = 2Ae^{3x} + 3(2Ax + B)e^{3x} + 3(2Ax + B)e^{3x} + 9(Ax^2 + Bx + C)$$
$$y_p'' = e^{3x}[2A + 6(2Ax + B) + 9(Ax^2 + Bx + C)]$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$e^{3x}[2A + 6(2Ax + B) + 9(Ax^2 + Bx + C)] + 9((Ax^2 + Bx + C)e^{3x}) = (x^2 + 1)e^{3x}$$
$$2A + 12Ax + 6B + 9Ax^2 + 9Bx + 9C + 9Ax^2 + 9Bx + 9C = x^2 + 1$$
$$x^2(18A) + x(12A + 18B) + (2A + 6B + 18C) = x^2 + 1$$
$$x^2(18A) = 1$$
$$A = \frac{1}{18}$$
$$x(12A + 18B) = 0$$
$$B = -\frac{1}{27}$$
$$2A + 6B + 18C = 1$$
$$C = \frac{5}{81}$$

La solución es particular es:

$$y_p = \frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81}e^{3x}$$

La solución total es:

$$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{27}x + \frac{5}{81}e^{3x}$$

4.5. Método de Variación de Parámetros

Para este análisis se va a considerar una ecuación diferencial no homogénea de tercer orden mostrada a continuación 4.18.

$$\frac{d^3y}{dx^3} + a_2\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x) \tag{4.18}$$

Donde a_1, a_2, a_3 son constantes y $f(x)$ es una función de x o constante, primero se va a tomar la ecuación homogénea y de ella se obtendrá la solución como se muestra a continuación en las ecuaciones 4.19 y 4.20.

$$\frac{d^3y}{dx^3} + a_2\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \tag{4.19}$$

$$y_g = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) \tag{4.20}$$

Entonces, ahora es necesario hallar la solución particular y_p de la ecuación diferencial homogénea; para ello se se utiliza el método general llamado *Método de Variación de Parámetros*, que consiste en reemplazar las constantes c_1, c_2, c_3 por una función $u(x)$ como se muestra en la ecuación 4.21.

$$y_p = u(x)_1 y_1(x) + u(x)_2 y_2(x) + u(x)_3 y_3(x) \tag{4.21}$$

Donde $u(x)_1, u(x)_2, u(x)_3$ son funciones incógnitas. Para resolver normalmente se tendría que derivar de la siguiente manera:

$$y_p = u(x)_1 y_1(x) + u(x)_2 y_2(x) + u(x)_3 y_3(x)$$

Para los siguientes procedimientos se usa:

$$u(x)_1 = u_1, u(x)_2 = u_2, u(x)_3 = u_3$$

$$y(x)_1 = y_1, y(x)_2 = y_2, y(x)_3 = y_3$$

$$y_p' = u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2' + u_3'y_3 + u_3y_3'$$

$$y_p' = (u_1'y_1 + u_2'y_2 + +u_3'y_3) + (u_1y_1' + u_2y_2' + u_3y_3')$$

Para simplificar los cálculos y evitar las derivadas de segundo orden para las incógnitas $u(x)_1, u(x)_2, u(x)_3$ en la expresión anterior y_p se coloca la siguiente condición:

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 + u_3'y_3 = 0$$

Por lo tanto, la primera derivad es:

$$y_p' = u_1y_1' + u_2y_2' + u_3y_3'$$

Se continua calculado como se ve a continuación:

$$y_p'' = u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2'' + u_3'y_3' + u_3y_3''$$

$$y_p'' = (u_1'y_1' + +u_2'y_2' + u_3'y_3') + (u_1y_1'' + u_2y_2'' + u_3y_3'')$$

$$0 = u_1'y_1' + +u_2'y_2' + u_3'y_3'$$

$$y_p'' = u_1y_1'' + u_2y_2'' + u_3y_3''$$

$$y_p''' = u_1'y_1'' + u_1y_1''' + u_2'y_2'' + u_2y_2''' + u_3'y_3'' + u_3y_3'''$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial homogénea 4.18.

$$u_1'y_1''+u_1y_1'''+u_2'y_2''+u_2y_2'''+u_3'y_3''+u_3y_3'''+a_2(u_1y_1''+u_2y_2''+u_3y_3'')+a_1(u_1y_1'+u_2y_2'+u_3y_3')+a_0(u_1y_1+u_2y_2+u_3y_3) = f(x)$$

Agrupando se tiene:

$$u_1'y_1''+u_2'y_2''+u_3'y_3''+u_1(y_1'''+a_2y_1''+a_1y_1'+a_2y_1)+u_2(y_2'''+a_2y_2''+a_1y_2'+a_0y_2)+u_3(y_3'''+a_2y_2''+a_1y_3'+a_0y_3) = f(x)$$

Luego se iguala a cero la parte de la ecuación diferencial perteneciente a la ecuación diferencial homogénea asociada a la no homogénea. El resultado se representa en la ecuación 4.21.

$$f(x) = u_1'y_1'' + u_2'y_2'' + u_3'y_3'' \tag{4.22}$$

A partir de esto se puede hallar lo que corresponde a u_1, u_2, u_3 que satisfaga la ecuación diferencial y su derivadas asociadas, entonces y_p está dada por la ecuación 4.23.

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 \tag{4.23}$$

Ejemplo 4.27 *Resolver la siguiente ecuación diferencial:*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cot x$$

Solución:

El polinomio característico es:

$$P(r) = r^2 + 1 \qquad = 0$$

Las raíces son:

$$r_1 = i$$

$$r_2 = -i$$

El conjunto fundamental de soluciones es:

$$CFS = c_1 \cos x, c_2 \sin x$$

La solución general es:

$$y_g = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Se reemplaza las constantes por funciones de u(x):

$$y_p = u_1 \cos x + u_2 \sin x$$

Siguiendo el proceso descrito en la teória se tiene:

$$u_1' \cos x + u_2' \operatorname{sen} x = 0 - u_1' \sin x + u_2' \cos x \qquad = \cot$$

Se forma un sistema de ecuaciones, el problema ahora se reduce a encontrar las incógnitas.

Para ello se seguirá el método de Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\Delta u_1' = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \cot x & \cos x \end{vmatrix} = -\sin x \cot x = \frac{-\sin x \cos x}{\sin x} = -\cos x$$

$$\Delta u_2' = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \cot x \end{vmatrix} = \cos x \cot x = \frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

$$\begin{aligned}
u_1' &= -\cos x dx \\
u_1 &= -\sin x \\
u_2' &= \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx \\
u_2' &= \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} dx \\
u_2' &= -\int \csc x dx - \int \sin x dx \\
u_2' &= \ln \mid \csc x - \cot x \mid + \cos x
\end{aligned}$$

La solución es:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \sin x \ln \mid \csc x - \cot x \mid$$

Ejemplo 4.28 *Resolver la siguiente ecuación diferencial:*

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \sec x$$

Solución:

El polinomio característico es:

$$P(r) = r^2 + 2r + 2 = 0$$

Las raíces son:

$$r_1 = -1 + i$$

$$r_2 = -1 - i$$

El conjunto fundamental de soluciones es:

$$CFS = e^{-x}\cos x, e^{-x}\sin x$$

La solución general es:

$$y_g = c_1 e^{-x}\cos x + c_2 e^{-x}\sin x$$

Se reemplaza las constantes por funciones de u(x):

$$y_p = u_1 e^{-x}\cos x + u_2 e^{-x}\sin x$$

Siguiendo el proceso descrito en la teória se tiene:

$$u_1' e^{-x}\cos x + u_2' e^{-x}\sin x = 0$$

$$u_1'(-e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x) + u_2'(-e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x) = e^{-x}\sec x$$

Se forma un sistema de ecuaciones, el problema ahora se reduce a encontrar las incógnitas.

Para ello se seguirá el método de Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-x}\cos x & e^{-x}\sin x \\ -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x & -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x \end{vmatrix} = e^{-2x}$$

$$\Delta u_1' = \begin{vmatrix} 0 & e^{-x}\sin x \\ e^{-x}\sec x & e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x \end{vmatrix} = -e^{-2x}\sin x \sec x = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

$$\Delta u_2' = \begin{vmatrix} e^{-x}\cos x & 0 \\ -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x & e^{-x}\sec x \end{vmatrix} = e^{-2x}\cos x \sec x = 1$$

$$u_1' = -\tan x dx$$

$$u_1 = \ln \mid \cos x \mid$$

$$u_2' = dx$$

$$u_2' = x$$

$$y = c_1 e^{-x}\cos x + c_2 e^{-x}\sin x - e^x cosx \ln \mid \cos x \mid + xe^x \sin x$$

La solución es:

$$y = e^{-x}[\sin x(c_2 + x) + \cos x(c_1 - \ln\mid\cos x\mid)]$$

Ejemplo 4.29 *Resolver la siguiente ecuación diferencial:*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sec x$$

Solución:

El polinomio característico es:

$$P(r) = r^2 + 1 = 0$$

Las raíces son:

$$r_1 = +i$$

$$r_2 = -i$$

El conjunto fundamental de soluciones es:

$$CFS = \cos x, \sin x$$

La solución general es:

$$y_g = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Se reemplaza las constantes por funciones de u(x):

$$y_g = u_1 \cos x + u_2 \sin x$$

Siguiendo el proceso descrito en la teoría se tiene:

$$u_1' \cos x + u_2' \sin x = 0$$

$$-u_1' \sin x + u_2' \cos x = \sec x$$

Se forma un sistema de ecuaciones, el problema ahora se reduce a encontrar las incógnitas.

Para ello se seguirá el método de Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\Delta u_1' = \begin{vmatrix} 0 & \sin s \\ \sec x & \cos x \end{vmatrix} = -\sin x \sec x = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

$$\Delta u_2' = \begin{vmatrix} e^{-x}\cos x & 0 \\ -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x & e^{-x}\sec x \end{vmatrix} = e^{-2x}\cos x \sec x = 1$$

$$u_1' = -\tan x dx$$

$$u_1 = \ln \mid \cos x \mid$$

$$u_2' = dx$$

$$u_2' = x$$

$$y = c_1 e^{-x}\cos x + c_2 e^{-x}\sin x - e^x cos x \ln \mid \cos x \mid + x e^x \sin x$$

La solución es:

$$y = e^{-x}[\sin x(c_2 + x) + \cos x(c_1 - \ln \mid \cos x \mid)]$$

4.5.1. Ecuaciones diferenciales de Euler

Definición 4.3 *Son ecuaciones de la forma 4.24 como se muestra a continuación:*

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}x^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \tag{4.24}$$

Donde a_0, a_1, a_2, a_3 son constantes.

Para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales, se debe transformar a una ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes usando las sustituciones mostradas en las ecuaciones 4.25, 4.26 y 4.27

$$x = e^t \to t = \ln x \to \frac{dx}{dt} = e^t \tag{4.25}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = e^{-t}\frac{dy}{dt} \tag{4.26}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \tag{4.27}$$

Para ecuaciones de Euler de la forma representada 4.29:

$$a_n(ax+b)^n\frac{d^ny}{dx^n} + \cdots + a_{n-1}(ax+b)^n\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(ax+b)\frac{dy}{dx} + a_0y = 0 \tag{4.28}$$

Se puede utilizar las siguientes sustituciones 4.29, 4.30 y 4.31:

$$ax + b = e^t \to t = \ln(ax+b) \to \frac{dx}{dt} = \frac{e^t}{a} \tag{4.29}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = ae^{-t}\frac{dy}{dt} \tag{4.30}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a^2e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \tag{4.31}$$

Ejemplo 4.30 *Resolver la siguiente ecuación diferencial:*

$$x^2y'' + xy' + y = x(6 - \ln x)$$

Solución:

$$x = e^t$$

$$t = \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial

$$e^{2t}e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}) + e^te^{-t}\frac{dy}{dt} = e^t(6-t)$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = (6-t)e^t$$

Se coloca el polinomio característico

$$r^2 + 1 = 0$$

$$r = \pm i$$

$$y_g = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

Para la solución particular:

$$y = (At + B)e^t$$

$$y' = Ae^t + (At + B)e^t$$

$$y'' = Ae^t + Ae^t + (At + B)e^t$$

$$y'' = e^t(2A + At + B)$$

$$2A + At + B + At + B = 6 - t$$

$$2At + 2A + 2B = 6 - t$$

$$A = -\frac{1}{2}$$
$$B = \frac{7}{2}$$
$$y_p = -\frac{1}{2}t + \frac{7}{2}$$
$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{1}{2}t + \frac{7}{2}$$

Se sustituye con las variables orgininales, su solución es

$$y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x) - \frac{1}{2}(\ln x - 7)$$

Ejemplo 4.31 *Resolver la ecuación diferencial:*

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

Solución:

$$x = e^t$$

$$t = \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$e^{2t}e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2 - \frac{dy}{dt}}) + e^t e^{-t}\frac{dy}{dt} - y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0$$

El polinomio característico es:

$$r^2 - 1 = 0$$

$$r = \pm 1$$

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 {-t}$$

Reemplazando variables originales, la solución es:

$$y = c_1 x + \frac{c_2}{x}$$

Ejemplo 4.32 *Resolver la siguiente ecuación diferencial:*

$$x^2 y'' + xy' + y = 1$$

Solución:

$$x = e^t$$

$$t = \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$e^{2t}e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}) + e^t e^{-t}\frac{dy}{dt} = 1$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 1$$

El polinomio característico es:

$$r^2 + 1 = 0$$

$$r = \pm i$$

$$y = A$$

$$y' = 0$$

$$A = 1$$

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t + 1$$

Reemplazando variables originales, la solución es:

$$y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x) + 1$$

Se puede utilizar un procedimiento alternativo cuando se tiene ecuaciones diferenciales de Euler de la forma mostrada en la ecuación 4.32.

$$x^n y^{(n)} + A_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + A_{n-1} x y' + A_n y = 0 \tag{4.32}$$

Cuando $x > 0$ se debe buscar una solución de la forma

$$y = x^k$$

Con lo que se obtiene una ecuación llamada **Ecuación Característica** y de ella se debe encontrar el valor de k. Para ello se debe verificar si:

1. Si k es una raíz real de la ecuación característica de grado m de multiplicidad, entonces a ella le correspondería m soluciones linealmente independientes:

$$
\begin{cases}
y_1 &= x^k \\
y_2 &= x^k \ln x \\
y_3 &= x^k (\ln x)^2 \\
y_m &= x^k (\ln x)^{m-1}
\end{cases}
$$

2. Si $\alpha = \beta i$ es un par de raíces complejas de grado m de multiplicidad, entonces a ellas le correspondería m soluciones independientes:

$$
\begin{cases}
y_1 = x^{\alpha} \cos(\beta \ln x) \\
y_2 = x^{\alpha} \sin(\beta \ln x) \\
y_3 = x^{\alpha} \ln x \cos(\beta \ln x) \\
y_4 = x^{\alpha} \ln x \sin(\beta \ln x) \\
y_{2m-1} = x^{\alpha} (\ln x)^{m-1} \cos(\beta \ln x) \\
y_{2m} = x^{\alpha} (\ln x)^{m-1} \sin(\beta \ln x)
\end{cases}
$$

Ejemplo 4.33 *Resolver la siguiente ecuación diferencial:*

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$$

Solución:

$$y = x^k$$

$$y' = kx^{k-1}$$

$$y'' = k(k-1)x^{k-2}$$

Se reemplaza en la ecuación diferencial:

$$x^2k(k-1)x^{k-2} - 3xkx^{k-1} + 4x^k = 0$$

$$x^2k(k-1)x^kx^{-2} - 3xkx^kx^{-1} + 4x^k = 0$$

$$k^2 - k - 3k + 4 = 0$$

$$(k-2)^2 = 0$$

$$k = 2$$

Se reemplaza el valor de k:

$$y = x^2$$

La solución es:

$$y = c_1x^2 + c_2x^2 \ln x$$

4.6. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden

Al igual que las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden, la de n-esimo y segundo orden permiten la resolución de ejercicios aplicados tanto para problemas geométricos, como problemas físicos.

4.6.1. Aplicaciones geométricas

Se utilizan para encontrar ecuaciones de curvas que satisfacen ciertas propiedades, se puede también utilizar la propiedad relacionada con el radio de curvatura; para ello se puede utilizar las siguientes ecuaciones, si $y = f(x)$ es una curva dada, entonces su curvatura está dada como se muestra a continuación:

$$k = \frac{\mid y'' \mid}{(1 + y'^2)^{3/2}} \tag{4.33}$$

Y el radio de curvatura es:

$$r = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{\mid y'' \mid} \tag{4.34}$$

Ejemplo 4.34 *Hallar la ecuación diferencial de la familia de elipses con centro en el origen y cuyos ejes coinciden con los ejes coordenados.*

Solución:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$2b^2x+2a^2yy'=0$$
$$yy'=-\frac{b^2}{a^2}x$$

Del paso 2 se despeja y sustituye en la ecuación diferencial:

$$x^2b^2=a^2b^2-y^2a^2$$
$$b^2=\frac{a^2(b^2-y^2)}{x^2}$$
$$\frac{b^2}{a^2}=\frac{b^2-y^2}{x^2}$$

Entonces se continua sustituyendo en la ecuacion diferencial:

$$yy'0=-\frac{b^2-y^2}{x^2}x$$
$$xyy'=-b^2+y^2$$
$$x'(yy')+x(yy')=2yy'$$
$$yy'+x(y'y'+yy'')=2yy'$$
$$yy'+x(y'^2++yy'')=2yy'$$
$$xy'^2+xyy''=yy'$$

La ecuación diferencial es:

$$y''=\frac{y'}{x}-\frac{y'^2}{y}$$

Ejemplo 4.35 *Si el radio de curvatura $y=f(x)$ en un punto es $r=\frac{(1+y'^2)^3/2}{y''}$ y la longitud de la normal desde dicho punto al eje x es $y\sqrt{1+y'^2}$, encontrar las curvas con la propiedad de que el radio es proporcional a la longitud de la normal, donde $k=1$.*

Solución:

$$\frac{(1+y^2)^{3/2}}{y''}=y\sqrt{1+(y')^2}$$
$$1+y'^2=yy''$$

Se aplica la siguiente transformación:

$$y' = p$$
$$y'' = p\frac{dp}{dy}$$

La ecuación diferencial entonces quedaría:

$$\begin{aligned}
1 + p^2 &= yp\frac{dp}{dy}\\
\frac{pdp}{1+p^2} &= \frac{y}{dy}\\
\frac{1}{2}\ln(1+p^2) &= \ln y + \ln c_1\\
p &= \sqrt{c_1^2 y'^2 - 1}\\
\frac{dy}{dx} &= \sqrt{c_1^2 y'^2 - 1}\\
\frac{dy}{c_1^2 y'^2 - 1} &= dx\\
\sqrt{c_1^2 y^2 - 1} &= e^{c_1 x + c_2} - c_1 y\\
y &= \frac{1}{2c_1}[e^{c_1 x + c_2} + e^{-(c_1 x + c_2)}]
\end{aligned}$$

4.6.2. Aplicaciones Físicas

Existen distintas aplicaciones en problemas físicos, entre ellos tenemos:

1. Movimiento Armónico Simple.

2. Movimiento amortiguado.

3. Oscilaciones Forzadas.

4. Circuitos eléctricos.

Ejemplo 4.36 *Un circuito tiene una f.e.m* $E = 100e^{-5t}$ *voltios, una resistencia de* 10 Ω *y una capacitancia de* 0,02 *faradios. Si* $q(0) = 0$*, hallar:*

1. *La carga y la intensidad de la corriente en cualquier instante t.*

2. *Carga máxima y el tiempo necesario para obtener la carga máxima.*

Solución:

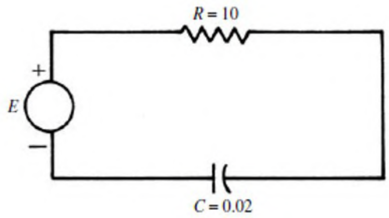

Figura 4.1: Circuito Ejemplo

$$100e^{-5t} = 10i + 50q$$

$$100e^{-5t} = 10\frac{dq}{dt} + 50q$$

$$\frac{dq}{dt} + 5q = 10e^{-5t}$$

Se resuelve la ecuación diferencial:

$$q = uv$$

$$u'v + uv' + 5uv = 10e^{-5t}$$

$$v[u' + 5u] + uv' = 10e^{-5t}$$

$$u' = -5u$$

$$\frac{du}{dt} = -5u$$

$$\frac{du}{u} = -5dt$$

$$\ln u = -5t$$

$$u = e^{-5t}$$

$$uv' = 10e^{-5t}$$

$$v' = \frac{10e^{-5t}}{e^{-5t}}$$

$$v' = 10$$

$$\frac{dv}{dt} = 10$$

$$v = 10t$$

La solución es:

$$q = 10te^{-5t} + c_1$$

Si:

$$q = 0, \quad t = 0$$

Entonces,

$$c_1 = 0$$

Por lo tanto la ecuación de la carga en función del tiempo es:

$$q = 10te^{-5t}$$

Para hallar la corriente se deriva la solución:

$$i = \frac{dq}{dt} = 10e^{-5t} - 50e^{-5t}$$

5

TRANSFORMADA DE LAPLACE

CAPÍTULO 5

Transformada de Laplace

5.1. Definición de la Transformada de Laplace

La transformada de Laplace se define de la siguiente manera:

Definición 5.1 *Dada una función $f(t)$, su transformada de Laplace es otra función $F(s)$ dada por la ecuación 5.1 [3]*

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{\tau \to \infty} \int_0^\tau e^{-st} f(t)dt \tag{5.1}$$

Está definido para todo (s) elemento de los reales, siempre y cuando la integral impropia converja o tenga sentido.

La Transformada de Laplace es un operador lineal, que es útil en la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, ya que permite transformar estas ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas, que resultan más sencillas de resolver.

Notación

Se puede utilizar una notación particular que facilita su escritura y uso.

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Se puede utilizar la definición de la Transformada de Laplace para convertir las funciones en términos de s. Para ello vamos a considerar los siguientes ejemplos:

Ejemplos

Ejemplo 5.1 *Se tiene la función $f(t) = c$ calcule su transformada de Laplace utilizando su definición.*

Solución:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}[c](s) = \int_0^\infty ce^{-st}dt = \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau ce^{-st}dt \\
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \lim_{\tau\to\infty} c\int_0^\tau e^{-st}dt \\
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \lim_{\tau\to\infty} c(-\frac{e^{-s\tau}}{s}) \\
\mathcal{L}[c](s) &= \frac{c}{s}, s > 0
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.2 *Se tiene la función $f(t) = t$ calcule su transformada de Laplace utilizando su definición.*

Solución:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}[t](s) = \int_0^\infty te^{-st}dt = \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau te^{-st}dt \\
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \lim_{\tau\to\infty}[-\frac{\tau e^{-s\tau}}{s} - \frac{e^{-s\tau}}{s^2} + \frac{1}{s^2}] \\
\mathcal{L}[t](s) &= \frac{1}{s^2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.3 *Se tiene la función $f(t) = t^2$ calcule su transformada de Laplace utilizando su definición.*

Solución:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}[t^2](s) = \int_0^\infty t^2e^{-st}dt = \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau t^2e^{-st}dt \\
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \lim_{\tau\to\infty}[-\frac{\tau^2 e^{-s\tau}}{s} - \frac{2\tau e^{-st}}{s^2} - \frac{2e^{-st}}{s^3}] \\
\mathcal{L}[t^2](s) &= \frac{2}{s^3}
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.4 *Se tiene la función $f(t) = e^{at}$ calcule su transformada de Laplace utilizando su definición.*

Solución:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}[e^{at}](s) = \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt = \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau e^{at}e^{-st}dt \\
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \lim_{\tau\to\infty}[\frac{1}{a-s}e^{(a+s)} - \frac{1}{a-s}] \\
\mathcal{L}[e^{at}](s) &= \frac{1}{s-a}
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.5 *Se tiene la función $f(t) = \sin \beta t$ calcule su transformada de Laplace utilizando su definición.*

Solución:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}[\sin \beta t](s) = \int_0^\infty \sin \beta t e^{-st} dt = \lim_{\tau \to \infty} \int_0^\tau \sin \beta t e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \lim_{\tau \to \infty} [-\frac{e^{-s\tau}}{s^2+\beta^2}(s \sin \beta\tau + \beta \cos \beta\tau) + \frac{\beta}{s^2+\beta^2}]$$

$$\mathcal{L}[\sin \beta t](s) = \frac{\beta}{s^2+\beta^2}$$

A partir de la definición se puede obtener las transformaciones de las funciones en el dominio s, pero al ser un proceso largo y en muchas ocasiones complejo se suele utilizar tablas que resumen y generalizan estas transformaciones. En la tabla 5.1 se detalla las transformadas más utilizadas que son útiles para la solución de ecuaciones diferenciales.

$f(t)$	$F(s)$
c	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\frac{1}{T}e^{-\frac{1}{T}}$	$\frac{1}{1+sT}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-at}t^n$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\sin \alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$
$\cos \alpha t$	$\frac{s}{s^2+\alpha^2}$

Tabla 5.1: Transformadas más utilizadas

A continuación se utilizará la tabla 5.1 para transformar directamente la función que así se requiera, como en los ejemplos a continuación:

Ejemplo 5.6 *Se tiene la función $f(t) = \cos 6t$ calcule su transformada de Laplace utilizando la tabla.*

Solución:

$$\mathcal{L}[\cos 6t](s) = \frac{s}{s^2+36}$$

Ejemplo 5.7 *Se tiene la función $f(t) = \sin 5t$ calcule su transformada de Laplace utilizando la tabla.*

Solución:

$$\mathcal{L}[\sin 5t](s) = \frac{5}{s^2+25}$$

Ejemplo 5.8 *Se tiene la función $f(t) = t^4$ calcule su transformada de Laplace utilizando la tabla.*

Solución:

$$\mathcal{L}[t^2](s) = \frac{24}{s^5}$$

Ejemplo 5.9 *Se tiene la función $f(t) = e^{4t}$ calcule su transformada de Laplace utilizando la tabla.*

Solución:

$$\mathcal{L}[e^{4t}](s) = \frac{1}{s-4}$$

5.2. Propiedades de la Transformada de Laplace

En esta sección se verificarán las propiedades de la Transformada de Laplace que permitirán aplicarlas para la resolución de ecuaciones diferenciales.

5.2.1. Propiedad de Linealidad

Se tiene dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ cuyas transformadas son $F(s)$ y $G(s)$ entonces, la propiedad de linealidad es:

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s) \tag{5.2}$$

Donde a y b son constantes arbitrarias.

Ejemplo 5.10 *Se tiene la función $f(t) = t^2 + 4t - 2$ calcule su transformada de Laplace aplicando la propiedad de linealidad:*

Solución:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t^2 + 4t - 2\} &= \mathcal{L}\{t^2\} + \mathcal{L}\{4t\} - \mathcal{L}\{2\} \\ \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{t^2\} + \mathcal{L}\{4t\} - \mathcal{L}\{-2\} \\ \mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} - \frac{2}{s} \end{aligned}$$

Ejemplo 5.11 *Se tiene la función $g(t) = e^{2t} + \cos t - t^3$ calcule su transformada de Laplace aplicando la propiedad de linealidad:*

Solución:

$$\mathcal{L}\{e^{2t} + \cos t - t^3\} = \mathcal{L}\{e^{2t}\} + \mathcal{L}\{\cos t\} - \mathcal{L}\{t^3\}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{e^{2t}\} + \mathcal{L}\{\cos t\} - \mathcal{L}\{t^3\}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s-2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{6}{s^4}$$

5.2.2. Propiedad de la derivada

Propiedad de primera la derivada

Se tiene una función $f(t)$ y su derivada es $f'(t)$, la Transformada de Laplace de la función derivada es:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0) = sF(s) - f(0) \tag{5.3}$$

Propiedad de segunda la derivada

Se tiene una función $f(t)$ y sus derivadas son $f'(t)$, $f''(t)$ la Transformada de Laplace de la función derivada segunda es:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\}(s) = s^2\mathcal{L}\{f\}(s) - sf(0) - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \tag{5.4}$$

Propiedad de la n-ésima derivada

Se puede generalizar la Transformada para las funciones de n-ésimo orden:

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\}(s) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \tag{5.5}$$

En resumen, esta propiedad indica que el dominio transformado, la derivación t se convierte en una multiplicación por s.

5.2.3. Propiedad de la integral

Si se tiene una función $f(t)$ que es una función continua que posee Transformada de Laplace $F(s)$,entonces:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau d\tau)\right\} = \frac{F(s)}{s} \tag{5.6}$$

En resumen, el dominio de las funciones transformadas al integrar con respecto de t es dividir por s.

5.2.4. Propiedad de la multiplicación por t

Si se tiene una función $f(t)$ que es una función con transformada $F(s)$,entonces:

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s) \tag{5.7}$$

Se puede decir que esta propiedad es recíproca de la derivación, pero con signo negativo, por lo tanto, derivar en el dominio transformado es equivalente a multiplicar por t en el dominio del tiempo.

5.2.5. Propiedad de la división por t

Si se tiene una función $f(t)$ con transformada $F(s)$,entonces:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_{s}^{+\infty} F(\nu)d\nu \tag{5.8}$$

En resumen, dividir por t en el dominio temporal equivale a integrar en el dominio transformado.

5.2.6. Propiedad de la traslación en el dominio transformado

Si se tiene una función $f(t)$ de orden exponencial es α, que tiene transformada; entonces:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a) \tag{5.9}$$

Para todo $s > \alpha + a$

5.3. Inversa de la Transformada de Laplace

La función inversa de Laplace se utiliza para regresar a las variables originales, normalmente se requiere regresar del dominio transformado al dominio del tiempo. La notación para la inversa de Laplace es:

$$\mathcal{L}^{-1}$$

Para resolver estos este tipo de problemas se tiene dos alternativas:

1. Método de Fracciones Parciales.

2. Método de Heaviside.

5.3.1. Fracciones parciales

Se tiene una función racional del tipo:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \to F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \tag{5.10}$$

$Q(s) \to$ Polinomio

$P(s) \to$ Otro polinomio de grado mucho menor que $Q(s)$

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

$$n \geq 1 \to coeficientes \begin{cases} \#reales \\ \#complejos \end{cases}$$

$$Q(s) = a_n(s-r_1)^{m_1}(s-r_2)^{m_2}\dots(s-r_k)^{m_k}$$

$$Q(s) = m_1 + m_2 + \cdots + m_{k-n}$$

$$\frac{P(s)}{Q(s)} \Rightarrow \frac{A}{s-r} \cdot \frac{B}{(s-r)^m} \cdot \frac{Cs+D}{(s-\alpha)^2+\beta^2} \cdot \frac{Ks+L}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^m}$$

$$\text{Número por determinar} = \begin{cases} K \\ A \\ B \\ C \\ D \\ L \end{cases}$$

Ejemplo 5.12 *Hallar la inversa de Laplace utilizando el método fracciones parciales de:*

$$F(s) = \frac{3s-7}{(s-1)(s-3)}$$

Solución:

$$\frac{3s-7}{(s-1)(s-3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-3}$$

$$3s-7 = A(s-3) + B(s-1)$$

$$3s-7 = As - 3A + Bs - B$$

$$3s-7 = s(A+B) + (-3A-B)$$

$$A + B = 3$$

$$-3A - B = -7$$

Se resuelve el sitema de ecuaciones para determinar los coeficientes:

$$-2A = -4$$

$$A = 2$$

$$B = 3 - A$$

$$B = 1$$

Se reemplaza los coeficientes en las fracciones parciales:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1} + \frac{1}{s-3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$$
$$= 2e^{t} + e^{3t}$$

Ejemplo 5.13 *Hallar la inversa de Laplace utilizando el método fracciones parciales de:*

$$F(s) = \frac{2s-8}{s^2-5s+6}$$

Solución:

Aplicamos fracciones parciales:

$$\frac{2s-8}{(s-3)(s-2)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s-2}$$

$$2s-8 = A(s-2) + B(s-3)$$

Se resuelve el sitema de ecuaciones para determinar los coeficientes:

$$\begin{aligned}
s &= 2 \\
2(2) - 8 &= A(2-2) + B(2-3) \\
-4 &= -B \\
B &= 4 \\
s &= 3 \\
2(3) - 8 &= A(3-2) + B(3-3) \\
A &= -2
\end{aligned}$$

Se reemplaza los coeficientes en las fracciones parciales:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{2}{s-3} + \frac{4}{s-2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{2}{s-3}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-2}\right\} \\
&= -2e^{3t} + 4e^{2t} \\
&= 2(2e^{2t} - e^{3t})
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.14 *Hallar la inversa de Laplace utilizando el método fracciones parciales de:*

$$F(s) = \frac{8s^2 - 7s + 6}{s^2(s-2)}$$

Solución:

Aplicamos fracciones parciales:

$$\begin{aligned}
\frac{8s^2 - 7s + 6}{s^2(s-2)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-2} \\
8s^2 - 7s + 6 &= As(s-2) + B(s-2) + Cs^2
\end{aligned}$$

Se resuelve el sitema de ecuaciones para determinar los coeficientes:

$$\begin{aligned}
s &= 2\\
8(4) - 7(2) + 6 &= 4C\\
24 &= 4C\\
C &= 6\\
s &= 0\\
6 &= -2B\\
B &= -3\\
s &= 1\\
8 - 7 + 6 &= -A + 3 + 6\\
A &= 2
\end{aligned}$$

Se reemplaza los coeficientes en las fracciones parciales:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s} - \frac{3}{s^2} + \frac{6}{s-2}\right\} &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + 6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}\\
&= 2 - 3t + 6e^{2t}
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.15 *Hallar la inversa de Laplace utilizando el método fracciones parciales de:*

$$F(s) = \frac{9s^4 - 16s^3 - 29s^2 + 154s - 99}{(s-2)^3(s+3)^2}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-2)^2} + \frac{C}{(s-2)^3} + \frac{D}{s+3} + \frac{E}{(s+3)^2}\\
9s^4 - 16s^3 - 29s^2 + 154s - 99 &= A(s-2)^2(s+3)^2 + B(s-2)(s+3)^2 + C(s+3)^2\\
&\quad + D(s-2)^3(s+3) + E(s-2)^3
\end{aligned}$$

Se resuelve el sitema de ecuaciones para determinar los coeficientes:

$$s = 2$$

$$25C = 9(2)^4 - 16(2)^3 - 25(2)^2 + 154(2) - 99$$

$$C = 5$$

$$s = -3$$

$$-125E = 9(-3)^4 - 16(-3)^3 - 25(-3)^2 + 154(-3) - 99$$

$$E = -3$$

$$2A(s-2)(s+3)^2 + 2A(s-2)^2(s+3) + B(s+3)^2 + 2B(s-2)(s+3)$$

$$+2C(s+3) + 3D(s-2)^2(s+3) + D(s-2)^3 + 3E(s-2)^2 = 36s^3$$

$$-48s^2 - 50s + 154$$

$$s = 2$$

$$25B + 10C = 36(2)^3 - 48(2)^2 - 50(2) + 154$$

$$25B = 150 - 50$$

$$B = 4$$

$$s = -3$$

$$-125D + 75E = 36(-3)^3 - 48(-3)^2 - 50(-3) + 154$$

$$-125D = -1100 + 225$$

$$D = 7$$

$$S = 0$$

$$36A - 18B + 9C - 24D - 8E = -99$$

$$36A = -99 + 18(4) - 9(5) + 24(7) + 8(-3)$$

$$A = 2$$

Se reemplaza los coeficientes en las fracciones parciales:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-2}+\frac{4}{(s-2)^2}+\frac{5}{(s-2)^3}+\frac{7}{s+3}-\frac{3}{(s+3)^2}\right\}$$
$$=2e^{2t}+4te2t+\frac{5}{2}t^2e^{2t}+7e^{-3t}-3te^{-3t}$$
$$=e^{2t}(2+4t+\frac{5}{2}t^2)+e^{-3t}(7-3t)$$

Ejemplo 5.16 *Hallar la inversa de Laplace utilizando el método fracciones parciales de:*

$$F(s)=\frac{5s^3-s^2+2s+5}{s^2(s^2+9)}$$

Solución:

Aplicamos fracciones parciales:

$$F(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{Cs+D}{s^2+9}$$
$$As(s^2+2)+B(s^2+9)+s^2(Cs+D)=5s^3-s^2+2s+5$$
$$As^3+9As+Bs^2+9B+Cs^3+Ds^2=5s^3-s^2+2s+5$$
$$s^3(A+C)+s^2(B+D)+s(9A)+9B=5s^3-s^2+2s+5$$

Se resuelve el sitema de ecuaciones para determinar los coeficientes:

$$9A=2$$
$$A=\frac{2}{9}$$
$$9B=5$$
$$B=59$$
$$A+C=5$$
$$C=5-\frac{2}{9}$$
$$C=\frac{43}{9}$$
$$B+D=-1$$
$$D=-1-\frac{5}{9}$$
$$D=-\frac{14}{9}$$

Se reemplaza los coeficientes en las fracciones parciales:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{9}\frac{1}{s}-\frac{5}{9}\frac{1}{s^2}+\frac{\frac{43}{9}s-\frac{14}{9}}{s^2+9}\right\}=\frac{2}{9}+\frac{5}{9}t+\frac{43}{9}\cos 3t-\frac{14}{27}\sin 3t$$

Ejemplo 5.17 *Hallar la inversa de Laplace utilizando el método fracciones parciales y las raíces imaginarias del ejercicio anterior:*

$$F(s)=\frac{5s^3-s^2+2s+5}{s^2(s^2+9)}$$

Solución:

$$F(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s-3i}+\frac{D}{s+3i}$$

$$As(s^2+9)+B(s^2+9)+Cs^2(s+3i)+Ds^2(s-3i)=5s^3-s^2+2s+5$$

Se resuelve el sitema de ecuaciones para determinar los coeficientes:

$$s=0$$

$$9B=5$$

$$B=\frac{5}{9}$$

$$s=3i$$

$$C(3i)^2(6i)=5(3i)^3-(3i)^2+2(3i)+9$$

$$-54iC=14-129i$$

$$C=\frac{14-129i}{-54i}=\frac{43}{18}+\frac{7}{27}i$$

$$s=-3i$$

$$D(-3i)^2(-6i)=5(-3i)^2-(-3i)^2+2(3i)+5$$

$$54i=14+129i$$

$$D=\frac{43}{18}-\frac{7}{27}i$$

$$s=1$$

$$10A+\frac{50}{9}+\left(\frac{43}{18}+\frac{7}{27}i\right)(1+3i)+\left(\frac{43}{18}-\frac{7}{27}i\right)(1-3i)=11$$

$$10A+\frac{50}{9}+\frac{24}{9}=11$$

$$A=\frac{2}{9}$$

Se reemplaza los coeficientes en las fracciones parciales:

$$F(s) = \frac{2}{9} + \frac{5}{9}s^2 + \frac{\frac{43}{18} + \frac{7}{27}i}{5 - 3i} + \frac{\frac{43}{18} - \frac{7}{27}i}{5 + 3i}$$

$$F(s) = \frac{2}{9} + \frac{5}{9}s^2 + \frac{(5 + 3i)\left(\frac{43}{18} + \frac{7}{27}i\right) + (5 - 3i)\left(\frac{43}{18} - \frac{7}{27}i\right)}{s^2 + 9}$$

$$F(s) = \frac{2}{9} + \frac{5}{9}s^2 + \frac{\frac{43}{9}s - \frac{14}{9}}{s^2 + 9}$$

$$F(s) = \frac{2}{9} + \frac{5}{9}s^2 + \frac{43}{9}\frac{s}{s^2 + 9} - \frac{14}{(3)(9)}\frac{3}{s^2 + 9}$$

$$f(t) = \frac{2}{9} + \frac{5}{9}t + \frac{43}{9}\cos 3t - \frac{14}{27}\sin 3t$$

5.3.2. Método de Heaviside

Es un método alternativo al de fracciones parciales que permite el cálculo de la inversa de la Transformada de Laplace a través de usar límites y derivadas con el fin de llegar a los valores de las constantes de forma más eficiente. En este texto se explicará el método asociada a los factores que se muestran a continuación [20]:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \begin{cases} \to \text{Factores lineales no repetidos} \\ \\ \to \text{Factores lineales repetidos} \\ \\ \to \text{Factores cuadráticos irreducibles no repetidos} \\ \\ \to \text{Factores cuadráticos irreducibles repetidos} \end{cases}$$

1. Factores lineales no repetidos:

   Pasos

   - Determinar las raíces a_i $i = 1, 2, 3, ..., n$
   - Calcular los coeficientes C_i usando la definición
   - Sumar a la transformada inversa el término $C_1e^{a_1t} + C_2e^{a_2t} + \cdots + C_ne^{a_nt}$

   Fórmula de Heaviside para factores lineales no repetidos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(a_i)}{Q_i(a_i)}e^{a_it}$$

$$F(s) = \frac{P(S)}{Q(s)} \to (s - a_i)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = C_1 e^{a_1 t} + C_2 e^{a_2 t} + \cdots + C_n e^{a_n t}$$

$$a_1, a_2 \ldots a_n \to \text{Raíces de } Q(s)$$

$$C_i = \lim_{s \to a_i} (s - a_i) F(s)$$

$$C_i \to \text{multiplicar por el factor } (s - a_i) \text{ y evaluando } s = a_i$$

Ejemplo 5.18 *Hallar la inversa de Laplace de:*

$$F(s) = \frac{4s+2}{(s-7)(s+8)}$$

Solución:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = C_1 e^{7t} + C_2 e^{-8t}$$

$$F(s) = \frac{C_1}{s-7} + \frac{C_2}{s+8}$$

$$F(s)(s-7) = C_1 + \frac{C_2(s-7)}{s+8}$$

Reemplazando la función $F(s)$ en el término anterior:

$$\frac{(4s+2)(s-7)}{(s-7)(s+8)} = C_1 + \frac{C_2(s-7)}{s+8}$$

$$\frac{(4s+2)}{(s+8)} = C_1 + \frac{C_2(s-7)}{s+8}$$

$$s = 7$$

$$C_1 = \frac{30}{15}$$

$$C_1 = 2$$

$$s = -8$$

$$\frac{(4s+2)}{(s-7)} = \frac{C_1(s+8)}{s-7} + C_2$$

$$C_2 = \frac{-30}{-15}$$

$$C_2 = 2$$

Reemplazando los coeficientes encontrados C_1 y C_2

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = 2e^{7t} + 2e^{-8t}$$

Ejemplo 5.19 *Hallar la inversa de Laplace de:*

$$F(s) = \frac{s^2 + 3s - 7}{(s+3)(s+4)(s-1)}$$

Solución:

$$s_1 = -3; \quad s_2 = -4; \quad s_3 = 1$$

$$C_1 = \lim_{s \to -3} \frac{(s^2 + 3s - 7)}{(s+4)(s-1)} = \frac{(-3)^2 + 3(-3) - 7}{(-3+4)(-3-1)}$$

$$C_1 = \frac{7}{4}$$

$$C_2 = \lim_{s \to -4} \frac{(s^2 + 3s - 7)}{(s+3)(s-1)}$$

$$C_2 = -\frac{3}{5}$$

$$C_3 = \lim_{s \to 1} \frac{(s^2 + 3s - 7)}{(s+3)(s+4)}$$

$$C_3 = -\frac{3}{20}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-4t} + C_3 e^{t}$$

La solución es:

$$f(t) = \frac{7}{4}e^{-3t} - \frac{3}{5}e^{-4t} - \frac{3}{20}e^{t}$$

2. Factores lineales repetidos:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A}{(s-\alpha)^2} + \frac{B}{s-\alpha} \Rightarrow Ate^{\alpha t} + Be^{\alpha t}$$

$$A = \lim_{s \to \alpha} (s-a)^2 F(s)$$

$$B = \lim_{s \to \alpha} \frac{d}{ds}[(s-\alpha)^2 F(s)]$$

$$Q(s) \to (s-a)^n$$

$$\to A_1 e^{at} + A_2 t e^{at} + A_3 t^2 e^{at} + \cdots + A_n t^{n-1} e^{at}$$

$$A_k = \frac{1}{(n-k)!} \lim_{s \to a} \frac{d^{n-k}}{ds^{n-k}}[(s-a)^n F(s)]$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Pasos

- Determinar las raíces reales $s = a$ de multiplicidad n de $Q(s)$.
- Calcular los coeficientes A_k usando la definición.
- Usar los coeficientes y sumarlos a la transformada inversa.

Ejemplo 5.20 *Hallar la inversa de Laplace de:*

$$F(s) = \frac{1}{s(s-4)^2}$$

$$\begin{aligned}
F(s) = \frac{1}{s(s-4)^2} &= \frac{A}{(s-4)^2} + \frac{B}{s-4} + \frac{C}{s} \\
\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) &= Ate^{4t} + Be^{4}t + C \\
A &= \lim_{s\to 4} \frac{1}{s} = \frac{1}{4} \\
B &= \lim_{s\to 4} \frac{d}{ds}[\frac{1}{s} = A + B(s-4) + \frac{C(s-4)^2}{s}] \\
B &= \lim_{s\to 4}[\frac{1}{s^2} = B + \frac{25C(s-4) - C(s-4)^2}{s^2}] \\
B &= -\frac{1}{16} \\
C &= \lim_{s\to 0} \frac{1}{(s-4)^2} = \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

Reemplazando los coeficientes encontrados:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{4}te^{4t} - \frac{1}{16}e^{4t} + \frac{1}{16}$$

3. Factores cuadráticos irreducibles no repetidos:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

$$Q(s) \Rightarrow \text{Factores cuadráticos}$$

$$Q(s) = (s-a)^2 + b^2$$

$$b(s) \rightarrow \text{tiene raíces complejas}$$

$$a + bi$$

$$a - bi$$

Pasos

- Determinar las raíces reales, en caso de existan $s = a$ de multiplicidad n de $Q(s)$.
- Se tiene además factores cuadráticos irreductibles de la forma $(s^2 + a^2)^2$ que para este caso se repiten dos veces pero el proceso se puede ampliar para cualquier valor de multiplicidad.
- Se factora el elemento usando números complejos y queda de la forma $(s - ai)(s + ai)$.
- Se coloca en factores y se resuelve como factores linea no repetidos que ya se explicó en la sección anterior.

Ejemplo 5.21 *Hallar la inversa de Laplace de:*

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2+1)^2}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
Q(s) &= s(s^2+1)^2 = s(s-i)^2(s+i)^2 \\
s &= 0; s = i; s = -i \\
f_1(t) &= \lim_{s\to 0}[sF(s)e^{st}] = \frac{1e^{st}}{(s^2+)^2} = 1 \\
f_2(t) &= \lim_{s\to i}\frac{d}{ds}[(s-i)^2F(s)e^{st}] \\
f_2(t) &= \lim_{s\to i}\frac{d}{ds}\left[(s-i)^2\frac{1}{s(s-i)^2(s+i)^2}e^{st}\right] \\
f_2(t) &= \lim_{s\to i}\frac{d}{ds}\left[\frac{e^{st}}{s(s+i)^2}\right] \\
f_2(t) &= \lim_{s\to i}\frac{te^{st}s(s+i)^2 - e^{st}[(s+i)^2+2s(s+i)]}{s^2(s+i)^4} \\
f_2(t) &= \frac{te^{it}i(2i)^2 - e^{it}[(2i)^2+2i(2i)]}{i^2(2i)^4} \\
f_2(t) &= \frac{-4ite^{it}+8e^{it}}{-16}
\end{aligned}$$

$$f_2(t) = \frac{1}{4}ite^{it} - \frac{1}{2}e^{it}$$

$$f_3(t) = \lim_{s \to -i} \frac{d}{ds}[(s+i)^2 F(s)e^{st}]$$

$$f_3(t) = \lim_{s \to -i} \frac{d}{ds}\left[(s+i)^2 \frac{1}{s(s-i)^2(s+i)^2}e^{st}\right]$$

$$f_3(t) = \lim_{s \to -i} \frac{d}{ds}\left[\frac{e^{st}}{s(s-i)^2}\right]$$

$$f_3(t) = \lim_{s \to -i} \frac{te^{st}s(s-i)^2 - e^{st}[(s-i)^2 + 2s(s-i)]}{s^2(s-i)^4}$$

$$f_3(t) = \frac{te^{-it}(-i)(-2i)^2 - e^{-it}[(-2i)^2 + 2(-i)(-2i)]}{(-i)^2(-2i)^4}$$

$$f_3(t) = \frac{4ite^{-it} + 8e^{-it}}{-16}$$

$$f_3(t) = -\frac{1}{4}ite^{-it} - \frac{1}{2}e^{-it}$$

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$$

$$f(t) = 1 + \frac{1}{4}ite^{it} - \frac{1}{2}e^{it} - \frac{1}{4}ite^{-it} - \frac{1}{2}e^{-it}$$

$$f(t) = 1 + \frac{1}{4}it(2i)\frac{(e^{it} - e^{-it})}{2i} - \frac{1}{2}(2)\frac{(e^{it} + e^{it})}{2}$$

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

La solución es:

$$f(t) = 1 - \frac{1}{2}t\sin t - \cos t$$

5.4. Resolución de ecuaciones diferenciales aplicando la Transformada de Laplace

A través de este operador [21] se puede convertir una ecuación diferencial en una ecuación algebraica cuyo procedimiento de resolución se muestra en los siguiente ejemplos:

Ejemplo 5.22 *Resolver la siguiente ecuación diferencial aplicando la Transformada de Laplace.*

$$y'' + 4y = 0$$

Solución:

Se aplican las propiedades y tablas:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y''\} + 4\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{0\} \\
s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + 4\mathcal{L}\{y\} &= 0 \\
\mathcal{L}\{y\}(s^2+4) &= sy(0) - y'(0) \\
\mathcal{L}\{y\} &= \frac{s}{s^2+4}y(0) - \frac{y'(0)}{s^2+4} \\
y &= \cos 2ty(0) - \frac{y'(0)}{2}\sin 2t
\end{aligned}
$$

Se supondrá:

$$
\begin{aligned}
y(0) &= c_1 \\
\frac{y'(0)}{2} &= c_2
\end{aligned}
$$

La solución es:

$$
y = c_1 \cos t - c_2 \sin 2t
$$

Ejemplo 5.23 *Resolver la siguiente ecuación diferencial aplicando la Transformada de Laplace.*

$$
y' - y = x + 1, \quad y(0) = 1
$$

Solución:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y'\} - \mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{x\} + \mathcal{L}\{1\} \\
s\mathcal{L}\{y\} - y(0) - \mathcal{L}\{y\} &= \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} \\
\mathcal{L}\{y\}(s-1) &= \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} + 1 \\
\mathcal{L}\{y\} &= \frac{1}{s-1}(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} + 1) \\
&= \frac{1}{s-1}(\frac{1+s+s^2}{s^2}) \\
\mathcal{L}\{y\} &= \frac{s^2+s+1}{s^2(s-1)}
\end{aligned}
$$

Se aplica el método de Heaviside:

$$\frac{s^2+s+1}{s^2(s-1)} = \frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s-1}$$
$$\lim_{s\to 0}\frac{s^2+s+1}{s-1} = As+B$$
$$B=-1$$
$$\lim_{s\to 0}\frac{(2s+1)(s-1)-(s^2+s+1)}{(s-1)^2} = A$$
$$A=-2$$
$$\lim_{s\to 0}\frac{s^2+s+1}{s^2} = C$$
$$C=3$$

Reemplazando se tiene:

$$\mathcal{L}\{y\} = -\frac{2}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{3}{s-1}$$

Aplicando la inversa de Laplace:

$$y=-2-x+3e^x$$

Ejemplo 5.24 *Resolver la siguiente ecuación diferencial aplicando la Transformada de Laplace.*

$$y''+4y'+13y=2, \quad y(0)=1, \quad y'(0)$$

Solución:

Se aplican las propiedades y tablas:

$$s^2y(s)-s+4sy(s)-4+13y(s) = \frac{2}{s}$$
$$y(s)(s^2+4s+13) = \frac{2}{s}+s+4$$
$$y(s) = \frac{2}{s(s^2+4s+13)}+\frac{s+4}{(s^2+4s+13)}$$

Se aplica el método de Heaviside:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{s(s^2+4s+13)} &= \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4s+13} \\
\lim_{s\to 0} \frac{2}{s^2+4s+13} &= A \\
A &= \frac{2}{13} \\
\lim_{s\to -2+3i} \frac{2}{s} &= Bs+C \\
\frac{2}{-2+3i} &= -2B+3Bi+C \\
B &= -\frac{2}{13} \\
C &= -\frac{8}{13}
\end{aligned}$$

Reemplazando se tiene:

$$y(s) = \frac{2}{13s} + \frac{11}{13}[\frac{s+2}{(s+2)^2+9} + \frac{2}{(s+2)^2+9}]$$

Aplicando la inversa de Laplace:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{2}{13} + \frac{11}{13}e^{-2t}\cos 3t + \frac{22}{39}e^{-2t}\sin 3t \\
y &= \frac{1}{13}[2+11e^{-2t}(\cos 3t + 2/3\sin 3t)]
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.25 *Resolver la siguiente ecuación diferencial aplicando la Transformada de Laplace.*

$$y'' + 2y' + 2y = 2\cos t - \sin 2t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

Solución:

Se aplican las propiedades y tablas:

$$\begin{aligned}
s^2y(s) - sy(0) - y'(0) + 2sy(s) - 2y(0) + 2y(s) &= \frac{2s}{s^2+4} - \frac{2}{s^2+4} \\
y(s)(s^2+2s+2) &= \frac{2s-2}{s} + (s^2+4) \\
y(s) &= \frac{2s-2}{s^2+2s+2}
\end{aligned}$$

Se aplica el método de Heaviside:

$$\frac{2s-2}{s^2+2s+2} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+2}$$

$$\lim_{s\to 2i} \frac{2s-2}{s^2+2s+2} = As+B$$

$$A = 0$$

$$B = 1$$

$$\lim_{s\to -1-i} \frac{2s+2}{s^2+4} = Cs+D$$

$$C = 0$$

$$D = -1$$

Reemplazando se tiene:

$$y(s) = \frac{1}{s^2+4} - \frac{1}{(s+1)^2+1}$$

Aplicando la inversa de Laplace:

$$y = \frac{1}{2}\sin 2t - e^{-t}\sin t$$

Referencias

[1] E. E. Ramos, *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones.* Servicios Gráficos JJ, 2004.

[2] P. J. P. Martínez and J. L. L. García, *Cálculo en varias variables y ecuaciones diferenciales: una aproximación intuitiva.* Univ Públic Navarra/Nafarroako Unib Publik, 2017.

[3] G. J. Castaño Chica, "Notas de clase para un curso de ecuaciones diferenciales," 2019.

[4] J. E. Nápoles Valdés, "El legado histórico de las ecuaciones diferenciales ordinarias. consideraciones (auto) críticas," *Boletín de Matemáticas.*

[5] L. Á. Z. Cruz, "Curvas en el plano y ecuaciones paramétricas,"

[6] S. L. Ross, *Ecuaciones diferenciales.* Reverté, 2021.

[7] D. G. Zill and M. R. Cullen, *Ecuaciones diferenciales.* McGraw-Hill Interamericana, 2013.

[8] I. C. Jover, *Ecuaciones diferenciales.* Pearson Educación, 1992.

[9] A. Carmona, *Ecuaciones diferenciales estocásticas.* PhD thesis, Tesis de grado. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Departamento de . . . , 2009.

[10] Y. Chalco-Cano, M. Rojas-Medar, and H. Román-Flores, "Sobre ecuaciones diferenciales difusas," *Bol Soc Esp Mat Apl*, vol. 41, pp. 91–99, 2007.

[11] D. Gutiérrez Calzada, M. d. C. Hernández Maldonado, and L. E. Manjarrez Garduño, *Ecuaciones diferenciales para carreras de ingeniería.* Grupo Editorial Patria.

[12] M. Á. García Hernández *et al.*, "Evaluación de la rigidez lateral efectiva de marcos rígidos con columnas compuestas embebidas," Master's thesis, Universidad Autónoma Metropolitana (México). Unidad Azcapotzalco . . . , 2015.

[13] R. T. Chen, Y. Rubanova, J. Bettencourt, and D. K. Duvenaud, "Neural ordinary differential equations," *Advances in neural information processing systems*, vol. 31, 2018.

[14] R. K. Miller and A. N. Michel, *Ordinary differential equations.* Academic press, 2014.

[15] P. Hartman, *Ordinary differential equations.* SIAM, 2002.

[16] M. Boix García, "Ecuaciones diferenciales. bernoulli. mathematica," 2020.

[17] M. Vergel Ortega, O. L. Rincón Leal, and E. Ibarguen Mondragón, "Ecuaciones diferenciales y aplicaciones," 2022.

[18] C. J. H. Castrillo, "Aprendizaje de ecuaciones diferenciales aplicadas en física utilizando tecnología," *Revista Torreón Universitario*, vol. 11, no. 31, 2022.

[19] A. J. Guzmán, D. F. G. Cataño, J. O. S. Arcila, and J. C. C. Acosta, "Ecuaciones diferenciales en el análisis de fenómenos térmicos obtenidos por sensores equações diferenciais na análise de fenômenos térmicos derivados de sensores," *Brazilian Journal of Development*, vol. 8, no. 3, pp. 21450–21461, 2022.

[20] E. Abi Jaber, "The laplace transform of the integrated volterra wishart process," *Mathematical Finance*, vol. 32, no. 1, pp. 309–348, 2022.

[21] C. Burgos, J.-C. Cortés, L. Villafuerte, and R. J. Villanueva, "Solving random fractional second-order linear equations via the mean square laplace transform: Theory and statistical computing," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 418, p. 126846, 2022.

CIDE
EDITORIAL

ISBN: 978-9942-844-88-0
9789942844880