

Potenciales electrostáticos:

aplicaciones del método

GSR y MATLAB

Santiago Linder Rubiños Jiménez

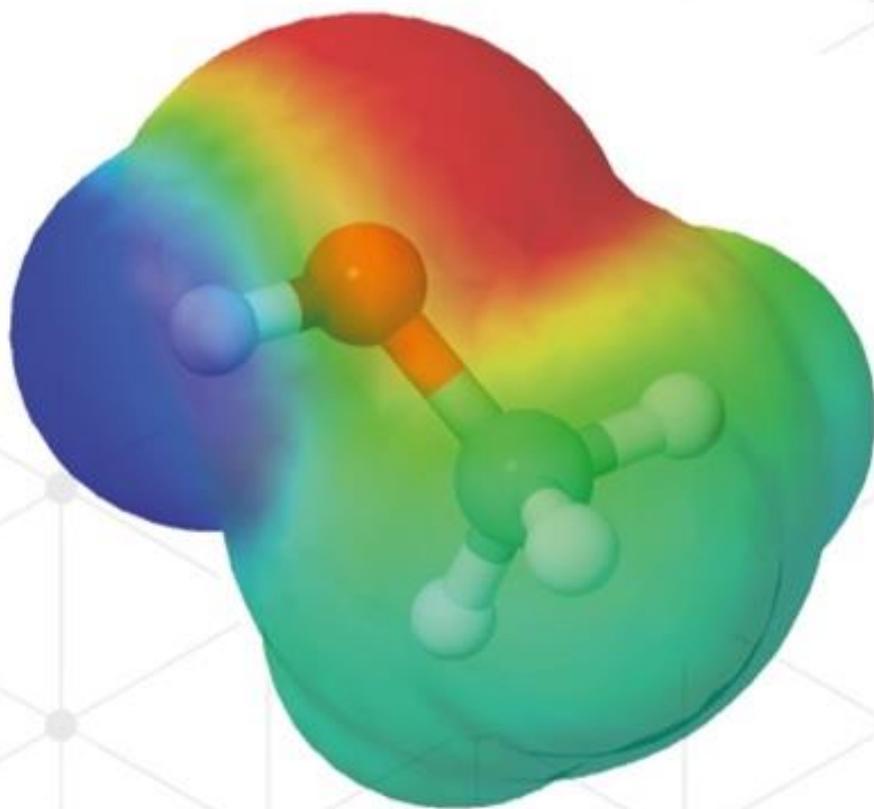
Abilio Bernardino Cuzcano Rivas

Adán Almircar Tejada Cabanillas

Fernando Mendoza Apaza

Antenor Leva Apaza

Raúl Pedro Castro Vidal



CIDE
EDITORIAL

Potenciales electrostáticos:

aplicaciones del método GSR y MATLAB

Potenciales electrostáticos: aplicaciones del método GSR y MATLAB



Autores

Santiago Linder Rubiños Jiménez
Abilio Bernardino Cuzcano Rivas
Adán Almircar Tejada Cabanillas
Fernando Mendoza Apaza
Antenor Leva Apaza
Raúl Pedro Castro Vidal

Potenciales electrostáticos: aplicaciones del método GSR y MATLAB

Reservados todos los derechos. Está prohibido, bajo las sanciones penales y el resarcimiento civil previstos en las leyes, reproducir, registrar o transmitir esta publicación, íntegra o parcialmente, por cualquier sistema de recuperación y por cualquier medio, sea mecánico, electrónico, magnético, electroóptico, por fotocopia o por cualquiera otro, sin la autorización previa por escrito al Centro de Investigación y Desarrollo Ecuador (CIDE).

Copyright © 2023
Centro de Investigación y Desarrollo Ecuador
Tel.: + (593) 04 2037524
<http://www.cidecuador.org>

ISBN: 978-9942-636-38-6
<https://doi.org/10.33996/cide.ecuador.PE2636386>

Dirección editorial: Lic. Pedro Misacc Naranjo, Msc.
Coordinación técnica: Lic. María J. Delgado
Diseño gráfico: Lic. Danissa Colmenares
Diagramación: Lic. Alba Gil
Fecha de publicación: noviembre, 2023



Guayaquil, Ecuador

La presente obra fue evaluada por pares académicos experimentados en el área.

Catalogación en la Fuente

Potenciales electrostáticos: aplicaciones del método GSR y MATLA / Santiago Linder Rubiños Jiménez, Abilio Bernardino Cuzcano Rivas, Adán Almircar Tejada Cabanillas, Fernando Mendoza Apaza, Antenor Leva Apaza, Raúl Pedro Castro Vidal - Ecuador: Editorial CIDE, 2023.

89 p.: incluye tablas, figuras; 17,6 x 25 cm.

ISBN: 978-9942-636-38-6

1. Método Gauss Seidel 2. Potenciales Electrostáticos 3. Matlab

Acerca de los autores

Santiago Linder Rubiños Jiménez

Correo: r.rservice@yahoo.es; slrubinosj@unac.edu.pe

<https://orcid.org/0000-0003-0095-6988>

Doctor en Ingeniería Eléctrica, Doctor en Gestión Pública y Gobernabilidad, Maestro en Gestión Pública, Maestro en Ingeniería Eléctrica con mención en Gestión de Sistemas de Energía Eléctrica, Bachiller de la carrera profesional en Ingeniería Eléctrica. Titulado con experiencia laboral en el área de docencia, proyectos de Ingeniería e Investigación. Persona formada humanista, científica y tecnológicamente, caracterizada por cualidades, como:



responsable, emprendedor, puntual, comunicativo con capacidad de trabajar en equipo, colaborador, respetuoso y principalmente honrado. Actualmente se desempeña como Director del Instituto de Investigación del Vicerrectorado de Investigación de la Universidad Nacional del Callao.

Abilio Bernardino Cuzcano Rivas

Correo: acuzcano75@gmail.com; abcuzcanor@unac.edu.pe

<https://orcid.org/0000-0002-9823-8740>

Doctor en Ingeniería Eléctrica, Maestro en Ingeniería electrónica con mención en Biomédica, Bachiller de la carrera profesional en Ingeniería Electrónica. Titulado con experiencia laboral en el área de docencia, proyectos de Ingeniería e Investigación. Persona formada humanista, científica y tecnológicamente, caracterizada por cualidades, como: responsable,



emprendedor, puntual, comunicativo con capacidad de trabajar en equipo, colaborador, respetuoso y principalmente honrado. Actualmente se desempeña como Director en la Unidad de Posgrado de la Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica de la Universidad Nacional del Callao.

Adán Almirar Tejada Cabanillas

Correo: atejadacabanillas@yahoo.es; aatejadac@unac.edu.pe

<https://orcid.org/0000-0002-9736-3654>

Doctor en Ingeniería Eléctrica, Maestro en Economía con mención en Métodos Cuantitativos de la Economía y en Ingeniería Eléctrica con mención en Gestión de Sistemas de Energía Eléctrica, Bachiller y Licenciado en Estadística. Directivo académico con una sólida experiencia en liderar y gestionar una Facultad de Ingeniería. 30 años de dedicación al fomento de la excelencia educativa y el desarrollo de programas innovadores en



Ingeniería. Destacado por la mejora de la calidad de la enseñanza-aprendizaje y el aumento de la investigación. Experto en la administración de recursos y la planificación estratégica para el crecimiento sostenible de la Facultad. Comunicador eficaz y líder inspirador, capaz de promover la colaboración entre profesores, estudiantes y personal administrativo. Comprometido con el avance continuo de la Facultad y la preparación de futuros líderes en Ingeniería. Actualmente se desempeña como director del Departamento de Ingeniería Eléctrica y Director de Escuela de Ingeniería Eléctrica de la Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica de la Universidad Nacional del Callao.

Fernando Mendoza Apaza

Correo: mastermetric@gmail.com; fmendozaa@unac.edu.pe

<https://orcid.org/0000-0001-7981-8291>

Ingeniero Electrónico de la Universidad Nacional del Callao. Con estudios en Doctorado en Educación, y Maestría en Ingeniería Eléctrica, a través del Ministerio de Energía y Minas, Maestría en Telecomunicaciones, Estudios de Maestría en Ingeniería de Sistemas, con especializaciones y certificaciones en Normas de Calidad ISO9001 Quality Management Systems Associate, ISO/IEC2000 IT Service Management Associate, ISOIEC27001 Information Security Associate, SCRUM Foundation Professional Certificate y certificación Lean Foundations Professional Certification, Help Desk Professional Certificate HDPC y Capacitación en IT Service Management Basado en ITIL 4. Con experiencia en diferentes empresas e institucional desempeñando funciones en las áreas de Gestión de Proyectos y licitación, construcción y ejecución, Adquisición y puesta en marcha de Equipos de Telecomunicaciones, Control y Automatización, Networking, Servidores, Redes Cisco, Radioenlaces Wireless y CATV (Diseño y optimización). En el área automotriz con conocimientos en Electrónica Automotriz, en diagnóstico y mantenimiento con equipos LAUNCH. En el área eléctrica con desempeño en planeamiento Eléctrico, Planeamiento y Soporte. En Planta en Sistemas de Control y Automatización Neumáticos e Hidráulicos, Scada y PLC. En el ámbito Industrial Minero e Impacto Ambiental en mantenimiento de planta e Instrumentación. Capacidad en la planificación y organización de actividades dirigidas al cumplimiento de objetivos, manteniendo y estableciendo adecuadas relaciones a todo nivel, conocimientos bajo las normas con efectividad y dedicación a la labor profesional.



Antenor Leva Apaza

Correo: aleva116@gmail.com; alevaa@unac.edu.pe

<https://orcid.org/0000-0002-0973-0240>

Maestro en Investigación y docencia universitaria de la Universidad Peruana de Ciencias e Informática. Matemático de la Universidad Nacional de San Antonio de Abad del Cusco. Actualmente desempeña labores en la Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica de la Universidad Nacional del Callao. Perfilado como



investigador activo mediante la producción de artículos científicos de conferencias internacionales y revistas de alto impacto.

Raúl Pedro Castro Vidal

Correo: rcastro235357@gmail.com; rpcastrov@unac.edu.pe

<https://orcid.org/0000-0002-2901-0101>

Maestro en Ciencias de la Electrónica con mención en Control y Automatización de la Universidad Nacional del Callao. Licenciado en Matemáticas por la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Bachiller en Educación (UNMSM-Física y Matemáticas), con estudios de Maestría en Matemáticas (UNMSM) y estudios de Doctorado en Ingeniería Eléctrica en la Universidad Nacional del Callao. Con



experiencia laboral en Gestión de proyectos de Inversión de Infraestructura Educativa y Gestión curricular. Es docente universitario en el área de Ecuaciones Diferenciales y Variable Compleja desde el año 1996 a la fecha. Con competencias académicas, pedagógicas y digitales. Se caracteriza por tener integridad ética y moral, es proactivo, empático, responsable, dinámico, confiable y organizado; con capacidad de aprender continuamente, creativo y con liderazgo para gestionar procesos administrativos y académicos. Actualmente se desempeña como director del Departamento Académico de Ingeniería Electrónica en la Universidad Nacional del Callao.

Contenido

Semblanza de autores	5
Introducción	13

Capítulo 1 Métodos numéricos

1.1 Introducción al capítulo	18
1.2 Los métodos numéricos	19
1.3 Método de Gauss Seidel	23
1.4 Ejemplo	28
1.5 Consideraciones finales del capítulo	32

Capítulo 2 Potencial electrostático

2.1 Introducción al capítulo	34
2.2 Definición de potencia electrostático	35
2.3 Cálculo del gradiente del potencial	42
2.4 Optimizando la convergencia usando relajación	44
2.5 Solución a la problemática	45
2.6 Muestreo temporal.....	49
2.7 Consideraciones finales del capítulo	50

Capítulo 3

Aplicaciones de Matlab al análisis numérico

3.1 Introducción al capítulo	52
3.2 Solución mediante Matlab	53
3.3 Materiales y métodos	54
3.4 Muestra	55
3.5 Técnicas de análisis	56
3.5.1 Algoritmo	56
3.5.2 Método iterativo	58
3.6 Consideraciones finales del capítulo	61

Capítulo 4

Aplicaciones

4.1 Introducción al capítulo	64
4.2 Aplicación del Método GSR en una malla	65
4.3 Análisis de los resultados	70
4.4 Consideraciones finales del capítulo	73
Referencias	76
Anexos	78

Introducción

El análisis de los potenciales electrostáticos es importante en las ciencias y la ingeniería, entre otras áreas del saber. Este análisis se utiliza para describir el fenómeno de la energía potencial eléctrica de una carga en un campo eléctrico. El cual es útil para la comprensión de la distribución de las cargas eléctricas en un sistema y cómo interactúan entre sí. Asimismo, se utiliza para calcular la energía necesaria para mover una carga de un punto a otros dentro de un campo eléctrico (Calzada, 2011), es por lo tanto, un importante campo del saber en las áreas de la ingeniería eléctrica y electrónica.

El presente material se permite profundizar en el estudio sobre los potenciales electrostáticos. En este sentido, se hace necesario para el estudio de este fenómeno, aprender a modelarlos a través de expresiones matemáticas, que permitan conceptualizar los diversos abordajes y estudios que se quieran realizar acerca de los potenciales electrostáticos. Generalmente, en

los estudios que se desarrollan a nivel de pregrado universitario, sólo se calculan los potenciales electrostáticos en una sola dimensión tal como lo indica Rubiños (2018), en muchos casos idealizándolos por lo complejo que los mismos resultan para estudiantes e investigadores noveles.

El cálculo particularmente en el caso de los potenciales electrostáticos atiende a condiciones particulares, emanadas de la Ley de Coulomb, correspondiendo ésta a una expresión matemática que encuentra dentro de sus alternativas resolutivas a las ecuaciones de Poisson y Laplace. Implicando la resolución sistemas de ecuaciones diferenciales, y estas ecuaciones tienen soluciones por diferentes procedimientos matemáticos uno analítico y el otro de análisis numérico. Este último método mencionado, reduce tiempos de cálculo, con procedimientos de resolución programables ya que son procesos diseñados como operaciones que siguen un protocolo de resolución, al final se producen sistemas de ecuaciones lineales, en la que se espera una solución eficaz en el menor tiempo posible.

De los métodos numéricos mencionados en el párrafo anterior un método particular que presenta condiciones adecuadas para la resolución de las ecuaciones asociadas al fenómeno

eléctrico como el potencial eléctrico, es el Método Gauss Seidel-Relajación, el cual en el resto del documento podremos abreviar (GSR), es un procedimiento iterativo que fácilmente se puede convertir en un algoritmo, y que adicionalmente puede ser llevado a un software como el MATLAB, para calcular en el caso que nos ocupa en este libro los potenciales electrostáticos de forma correcta y en el menor tiempo posible.

Este documento investigativo muestra el modelaje y cálculo, aplicando el Método GSR, a una distribución superficial tipo malla de potenciales electrostático. Para el desarrollo, primero se revisará la documentación existente sobre modelación de campos electrostáticos en una y dos dimensiones, se formulará el marco teórico con la información recolectada, se procesará esta información para un caso en particular (muestra) y, finalmente, se obtendrán los resultados simulando todo en el MATLAB.

El material que se presenta a continuación al lector, es de naturaleza teórica y experimental, tiene el propósito mostrar el modelado, unido al cálculo de los potenciales electrostáticos en dos dimensiones, teniendo como dominio de referencia el sistema de coordenadas rectangular. Para efectos de análisis y cálculos, se escoge al método GSR, es cual es un método numérico

computacional que permite obtener resultados rápidos, adicionalmente permite interpretar los diferentes fenómenos, colaborando con sus posteriores análisis bien sea con fines educativos o de aplicaciones científico tecnológicas. La importancia de este documento es que se constituye en un trabajo de no solo de divulgación científica, sino que realiza la implementación de aplicaciones que permitan analizar el comportamiento de los potenciales electrostáticos, desde su modelado, hasta su resolución utilizando el método de GSR.

Capítulo 1

Métodos numéricos



Métodos numéricos

1.1 Introducción al capítulo

Los métodos numéricos son herramientas matemáticas que se utilizan para resolver problemas complejos en las ciencias naturales, ciencias aplicadas y otras disciplinas. Estos se basan en la utilización de algoritmos de cálculos, que permiten aproximar soluciones a problemas que no pueden ser resueltos de manera analítica. Son importantes porque permiten resolver problemas que de otra manera sería imposible hacerlo, siendo esenciales para el diseño y simulación de sistemas eléctricos, mecánicos y químicos. Adicionalmente, son importantes para la optimización de procesos y toma de decisiones en la industria y la investigación. El presente capítulo está dedicado a los métodos numéricos, entre

ellos el de Gauss Seidel, incluyendo un ejemplo sencillo de aplicación manual.

1.2 Los métodos numéricos

Todos los métodos de análisis numérico, se pueden considerar como una realidad dialéctica del análisis matemático cualitativo y cuantitativo. Una antigua disputa por la comprensión del mundo desde dos abordajes que influyen directamente en el régimen de variables utilizadas. En particular el análisis matemático favorece el campo de lo medible, pues afirma que bajo ciertas condiciones algo existe y que es único, entre otros preceptos. Sin embargo, se complementa calculando aproximadamente el valor de aquello que existe, completando aquella vieja creencia de las ciencias naturales que solo existe aquello a lo que se le puede medir o asignar un valor.

En resumen, se puede decir que el análisis numérico es una reflexión sobre el análisis matemático, en otras palabras, se deja hablar y abordar expresiones fundadas sobre el álgebra lineal, ecuaciones diferenciales y otras. Desde el punto de vista numérico, tiene como sinergia una serie de métodos o algoritmos cuyo estudio y uso en diferentes áreas de ingeniería es importante. (Song, 2000)

En Rubiños (2018) encontramos la siguiente descripción para los métodos numéricos son técnicas para formular problemas y solucionarlos usando operaciones lógicas aritméticas, contando como herramienta determinante la computadora y los lenguajes de alto nivel (fortran, Basic, Pascal, entre otros). La importancia del método numérico está asociada a la capacidad de generar una operación algorítmica que facilita el cálculo y que al ser codificable se pueda traducir a un lenguaje de programación para hacer la cantidad de iteraciones necesarias hasta alcanzar la solución que satisface las condiciones impuestas por el problema abordado.

Continúa agregando Rubiños (2018) que, en el comienzo, que las personas interesadas con esta área del conocimiento sólo contaban con las siguientes condiciones:

1. Determinaban la solución usando métodos exactos o analíticos, pero en realidad estas soluciones sólo son para un número limitado de problemas. En consecuencia, las soluciones analíticas tienen valores prácticos limitados, porque la gran mayoría de los problemas implican formas y procesos complejos.
2. Cuando se requería analizar el comportamiento de sistemas se usaban soluciones gráficas cuyos resultados no son muy

precisos. Además, que sus representaciones son tediosas sin el uso de computadoras. Estas técnicas gráficas son limitadas a problemas que pueden describirse usando tres dimensiones o menos.

3. Para implementar métodos numéricos se usaban calculadoras y reglas de cálculo. Estos instrumentos presentan una diversidad de dificultades como consecuencia de su lentitud al realizar los cálculos. Además, que sus resultados no son muy consistentes por que surgen equivocaciones al realizar su proceso de cálculo.
4. Actualmente, los métodos numéricos cuentan con una herramienta como la computadora que ofrece alternativas para el cálculo de problemas complejo que en oportunidades el análisis matemático tendría mucha dificultad. Sin embargo, se debe resaltar que el análisis numérico es de importancia tanto para solucionar problemas y para dar mayor comprensión.
5. Después de la aparición de la computadora, los métodos numéricos a explotado, están directamente relacionados con el tiempo de máquina, en consecuencia, limitados por el costo de procesamiento de las grandes computadoras

(mainframes), lo que induce que aun algunos continúen usando métodos analíticos en sus trabajos. Sin embargo, actualmente, con el avance de la tecnología y como la aparición de las computadoras personales a bajo costo permiten cumplir con capacidades complejas.

Entre otras razones del uso de los métodos numéricos se pueden citar:

6. Su capacidad para solucionar sistemas de ecuaciones lineales de grande porte, el manejo de no linealidades y la solución de geometrías complejas, retos muy usuales en la sociedad ingenieril del presente siglo, que se tornan dificultosos o imposibles de ser manipulados por el análisis matemático.
7. Los métodos numéricos permiten reforzar la comprensión matemática por ser experimental. En este marco, diría permite la creatividad principalmente en temas oscuros ocasionando un aumento de la capacidad de comprensión y entendimiento de las matemáticas.
8. Los métodos numéricos dan la oportunidad de construir sus propios programas para resolver los problemas, sin tener

que comprar softwares costosos y de una complejidad para su comprensión y aplicación.

9. Los métodos numéricos es un medio para aprender usar las computadoras, como para estructurar programas y demostrar las limitaciones de las computadoras. Finalmente, se puede afirmar que los métodos numéricos permiten reconocer y controlar los errores de aproximación.

1.3 Método de Gauss Seidel

El método de Gauss-Seidel es un proceso de aproximación sucesiva para resolver sistemas de ecuaciones lineales compatibles determinados. Este requiere de la verificación de un criterio de convergencia, comúnmente conocido como diagonal pesada. Es una alternativa interesante para ser programadas por su relativa simplicidad (Cortés et al., 2019).

Al ser un método iterativo, suele ser eficaz y muy preciso para dar resultado a sistemas lineales. Estos sistemas de ecuaciones, cumplen con la siguiente forma (Matthew, 2009):

$$\begin{array}{rcccccl}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\
& \vdots & & & & \vdots \\
a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +\cdots & +a_{nn}x_n & = & b_n \quad (1)
\end{array}$$

Sí de la ecuación (1) despejemos x_1 , hacemos lo propio en la ecuación (2) despejemos x_2 , ..., hasta que de la ecuación (n) despejemos x_n . Como resultado obtendremos lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl}
x_1 & = & \frac{b_1 - a_{22}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \\
x_2 & = & \frac{b_2 - a_{21}x_1 - \cdots - a_{2n}x_n}{a_{22}} \\
& \vdots & \\
x_n & = & \frac{b_n - a_{n1}x_1 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}}{a_{nn}} \quad (2)
\end{array}$$

Es un conjunto de expresiones, que serán utilizarlas en el método iterativo que se ha escogido. El inicio del proceso iterativo, se realiza asignando el valor de cero (0) a las variables x_2, \dots, x_n . Lo cual produce un primer valor para x_1 y, de allí se obtiene la ecuación (3):

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \quad (3)$$

Acto seguido, se sustituye este valor de x_1 en la ecuación (2) y las variables x_3, \dots, x_n siguen teniendo el valor de cero (0). Esto da el siguiente valor para x_2 :

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21} \left(\frac{b_1}{a_{11}} \right)}{a_{22}}$$

Los valores de x_1 y x_2 , se sustituye en la ecuación (3), mientras tanto los valores que van desde x_4, \dots, x_n siguen teniendo el valor de cero (0). Y se van repitiendo lo pasos sucesivamente hasta llegar a la última ecuación. Este procedimiento, nos arrojará una lista de primeros valores para cada una de nuestras incógnitas, esto se constituye en el primer paso del proceso iterativo,

$$\begin{aligned}x_1 &= \alpha_1 \\x_2 &= \alpha_2 \\&\vdots \\x_n &= \alpha_n\end{aligned}$$

Se vuelve a repetir el proceso, pero ahora sustituyendo estos últimos datos en vez de ceros (0) como al inicio, se obtendrá una segunda lista de valores para cada una de las incógnitas. Se puede decir que ahora se tiene:

$$\begin{aligned}x_1 &= \beta_1 \\x_2 &= \beta_2 \\&\vdots \\x_n &= \beta_n\end{aligned}$$

Con los valores de alfa y beta conocidos, se procede a calcular los errores aproximados relativos, con respecto a cada una de las incógnitas. Se muestra la lista de errores como sigue:

$$\begin{aligned}
|\epsilon_{a,1}| &= \left| \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\beta_1} \times 100\% \right| \\
|\epsilon_{a,2}| &= \left| \frac{\beta_2 - \alpha_2}{\beta_2} \times 100\% \right| \\
&\vdots \\
|\epsilon_{a,n}| &= \left| \frac{\beta_n - \alpha_n}{\beta_n} \times 100\% \right|
\end{aligned}$$

La condición de repitencia en el proceso es hasta que se satisfaga la siguiente expresión:

$$|\epsilon_{a,i}| < \epsilon_s, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Donde ϵ_s es una cota suficiente prefijada.

El método de Gauss-Seidel converge a la solución del sistema sí se cumple la condición de que la matriz de coeficientes del sistema sea una matriz *diagonalmente dominante*, es decir, sí se cumple la siguiente condición (Fink & Mathews, 2008):

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, n$$

El hecho que una matriz sea diagonalmente dominante significa que los elementos de la diagonal son mayores numéricamente desde su valor absoluto y la suma de los valores

absolutos de los demás elementos del mismo renglón. Se puede apreciar que, en la muestra anterior, la matriz si es diagonalmente dominante y, por lo tanto, el método de Gauss-Seidel converge a la solución del sistema.

Por otro lado, es importante la condición de la matriz diagonalmente dominante; sin embargo, es solo es una condición que es suficiente, aunque no necesaria. Ya que hay evidencia de que existen sistemas de ecuaciones que *no* cumplen con la condición de ser una matriz diagonalmente dominante, pero que *sí* convergen a la solución y al igual que existen sistemas de ecuaciones que *no* cumplen con la condición y que *no* convergen a la solución.

Por último, es importante prestar atención a que, aunque un sistema no cumpla con la condición de ser diagonalmente dominante, existe la posibilidad de que *sí* se cumpla con esta condición mediante un intercambio de renglones, para ello revisemos en el siguiente ejemplo.

1.4 Ejemplo

A través del método de Gauss-Seidel aproxime la solución del siguiente sistema:

$$\begin{array}{rcl}
-5x_1 & +1.4x_2 & -2.7x_3 = 94.2 \\
0.7x_1 & -2.5x_2 & +15x_3 = -6 \\
3.3x_1 & -11x_2 & +4.4x_3 = -27.5
\end{array}$$

Hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$.

En la solución de este caso, vemos que la matriz de coeficientes del sistema no es diagonalmente dominante, como ya hemos citado en los párrafos anteriores en su diagonal son numéricamente en valor absoluto mayor a la suma de los elementos de su región. Sin embargo, si intercambiamos las líneas de ecuaciones 2 y 3 entonces si es diagonalmente dominante. Por lo tanto, hacemos el intercambio de renglones y luego el sistema queda de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcl}
-5x_1 & +1.4x_2 & -2.7x_3 = 94.2 \\
3.3x_1 & -11x_2 & +4.4x_3 = -27.5 \\
0.7x_1 & -2.5x_2 & +15x_3 = -6
\end{array}$$

Se despeja x_1, x_2 y x_3 de las ecuaciones 1, 2 y 3 respectivamente. Tenemos:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{94.2 - 1.4x_2 + 2.7x_3}{-5} \\
 x_2 &= \frac{-27.5 - 3.3x_1 - 4.4x_3}{-11} \\
 x_3 &= \frac{-6 - 0.7x_1 + 2.5x_2}{15}
 \end{aligned}$$

Se da inicio al proceso iterativo sustituyendo los valores de $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$ en la ecuación 1 para obtener x_1 :

$$x_1 = -18.84$$

Seguidamente sustituimos $x_1 = -18.84$ y $x_3 = 0$ en la ecuación 2 para obtener x_2 :

$$x_2 = -3.152$$

Al finalizar la primera iteración, sustituimos $x_1 = -18.84$ y $x_2 = -3.152$ en la ecuación 3 para obtener x_3 :

$$x_3 = -0.04613$$

Y los valores obtenidos en la primera iteración son:

$$\begin{aligned}x_1 &= -18.84 \\x_2 &= -3.152 \\x_3 &= -0.04613\end{aligned}$$

Sólo tenemos la primera aproximación a la solución del sistema, debemos seguir avanzando en el proceso iterativo. Sustituyendo $x_2 = -3.152$ y $x_3 = -0.04613$ en la ecuación 1, obtenemos $x_1 = -19.69765$; sustituyendo $x_1 = -19.69765$ y $x_3 = -0.04613$ en la ecuación 2, obtenemos $x_2 = -3.42775$; sustituyendo $x_1 = -19.69765$ y $x_2 = -3.42775$ en la ecuación 3, obtenemos $x_3 = -0.05207$. Por lo tanto, nuestra segunda aproximación es:

$$\begin{aligned}x_1 &= -19.69765 \\x_2 &= -3.42775 \\x_3 &= -0.05207\end{aligned}$$

Se calculan entonces los errores aproximados para cada una de las incógnitas. Se tiene:

$$\begin{aligned}
|\epsilon_{a,1}| &= \left| \frac{-19.69765 + 18.84}{19.69765} \times 100\% \right| = 4.35\% \\
|\epsilon_{a,2}| &= \left| \frac{-3.42775 + 3.152}{-3.42775} \times 100\% \right| = 8.04\% \\
|\epsilon_{a,3}| &= \left| \frac{-0.05207 + 0.04613}{-0.05207} \times 100\% \right| = 11.4\%
\end{aligned}$$

Puesto que no se ha cumplido el objetivo, se debe seguir avanzando en el proceso iterativo.

1.5 Consideraciones finales del capítulo

Como se ha podido observar en este Capítulo, el método de Gauss-Seidel es un procedimiento iterativo utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Este se aplica a matrices cuadradas con elementos no nulos en sus diagonales y la convergencia se garantiza sí la matriz es diagonalmente dominante. Lo cual es importante en el análisis numérico y resulta particularmente útil, ya que nos permite encontrar la solución de un sistema de ecuaciones con una precisión arbitrariamente elegida por el operador del algoritmo. Este es un método esencial en la ingeniería eléctrica y electrónica, además, es específicamente útil en la resolución de problemas de flujo de carga en sistemas eléctricos de potencia.

Capítulo 2

Potencial electrostático



Potencial electrostático

2.1 Introducción al capítulo

El potencial eléctrico o potencial electrostático es la energía potencial electrostática por unidad de carga de prueba asociada al campo eléctrico. El estudio de la interacción entre dos cargas puede abordarse de dos formas diferentes: fuerza electrostática o campo eléctrico. En la primera forma, la fuerza mutua que experimentan las cargas viene dada por la Ley de Coulomb y esta fuerza, al ser conservativa, tiene asociada una energía potencial electrostática. En la segunda forma, la fuerza electrostática tiene asociada una energía potencial.

Como se dijo anteriormente, el análisis del potencial electrostático es importante en las diferentes ciencias naturales

como lo son la física, la química y en ciencias aplicadas como la ingeniería e incluso la medicina, entre otras áreas del saber, que se sirven de este potencial para desarrollo de tecnologías o procesos biológicos.

Por otro lado, hemos presentado a los métodos numéricos los cuales son herramientas matemáticas que se utilizan para resolver problemas complejos en cualquiera de estas disciplinas. El análisis del potencial electrostático con métodos numéricos es útil para entender la distribución de cargas eléctricas en un sistema y cómo interactúan entre sí. También se utiliza para calcular la energía necesaria para mover una carga de un punto a otro en un campo eléctrico. El análisis del potencial electrostático con métodos numéricos es particularmente útil en la simulación de sistemas moleculares y en el diseño de dispositivos electrónicos, como capacitores, diodos y transistores (Valencia, Molina, & Correa, 2008). Este capítulo estará dedicado a la definición e importancia del análisis del potencial electrostático.

2.2 Definición de potencia electrostático

El potencial electrostático es una propiedad intrínseca y propia del campo eléctrico. Desde una perspectiva matemática la derivada direccional del potencial electrostático, indica la dirección

en la se dirige y apunta el vector del campo eléctrico (Argáez, 2008). Es así, que ambas propiedades están relacionadas, esta relación se representa de la forma:

$$\nabla V = -E$$

En donde el potencial se representa con la letra (V) y es un campo escalar que representa al potencial electrostático, y E es un campo vectorial que representa al campo eléctrico y ∇ es el operador gradiente. Se debe considerar que todos los campos eléctricos tienen la propiedad de ser irrotacionales y de forma matemática se conoce que el rotacional del gradiente de una función escalar es siempre cero (Sadiku, 1998) ejemplo:

$$\nabla \times (\nabla V) = 0$$

Teniendo en cuenta el resultado anterior y considerando el hecho de que los campos eléctricos satisfacen la condición del flujo como lo establece la Ley de Gauss (Sadiku, 1998):

$$\nabla E = -\rho / \epsilon_r$$

Del mismo modo, la expresión matemática que establece la relación entre el potencial electrostático y la densidad volumétrica

de carga que corresponde a la Ecuación de Poisson, como se puede apreciar (Sadiku, 1998):

$$\nabla^2 V = \rho / \epsilon_r$$

Donde ρ es la densidad de carga y ϵ_r es la permitividad eléctrica del medio. La expresión de la ecuación de Poisson en coordenadas cartesianas se expresa de la forma (Sadiku, 1998):

$$\frac{d^2 V(x, y)}{dx^2} + \frac{d^2 V(x, y)}{dy^2} = \frac{\rho(x, y)}{\epsilon_0}$$

Las condiciones de frontera en el caso de estudio propuesto toman la forma:

$$V(x) = 0, \forall x = 0, \wedge, 0 \leq y \leq a$$

$$V(x) = 0, \forall x = b, \wedge, 0 \leq y \leq a$$

$$V(y) = 0, \forall 0 \leq x \leq b, \wedge, y = 0$$

$$V(y) = V_0, \forall 0 < x < b, \wedge, y = a$$

Cada una de estas ecuaciones se corresponden a las condiciones de frontera de Dirichlet. Adicionalmente, se selecciona una función $u(x, y)$ y se condiciona a pesos residual sobre el dominio de la función sea cero, de la siguiente forma:

$$\int_{\Omega} u(x, y) \left(\frac{d^2 V(x, y)}{dx^2} + \frac{d^2 V(x, y)}{dy^2} = \frac{\rho(x, y)}{\epsilon_0} \right) d\Omega = 0$$

Aplicando el teorema de Green al teorema de Gauss se obtiene una expresión que logra dividir el dominio en región interior y fronteras, del siguiente modo:

$$-\int_{\Omega} \left(\frac{du(x, y)}{dx} \frac{dV(x, y)}{dx} + \frac{du(x, y)}{dy} \frac{dV(x, y)}{dy} \right) d\Omega - \int_{\Omega} u(x, y) \rho(x, y) d\Omega + \int_{\Gamma_n} \left(\frac{dV(x, y)}{dn} \right) d\Gamma = 0$$

Para realizar la discretización de la expresión anterior se alcanza usando elementos finitos bidimensionales triangulares lineales que es la figura más pequeña y permite los mayores ajustes a superficies estudiadas, para los cuales las variables de interpolación son lineales en x y y en la forma de:

$$\omega = \omega(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y$$

o

$$\omega = \omega(x, y) = [1xy] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

Se deben determinar los coeficientes desconocidos a_i para la función de interpolación, a partir de las ecuaciones anteriores

debe representar las variables nodales en los tres nodos del elemento triangular. Sustituyendo los valores de las coordenadas cartesianas de los nodos se obtiene (Kwon & Bang, 1997):

$$\omega_c = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x_1y_1 \\ 1x_2y_2 \\ 1x_3y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

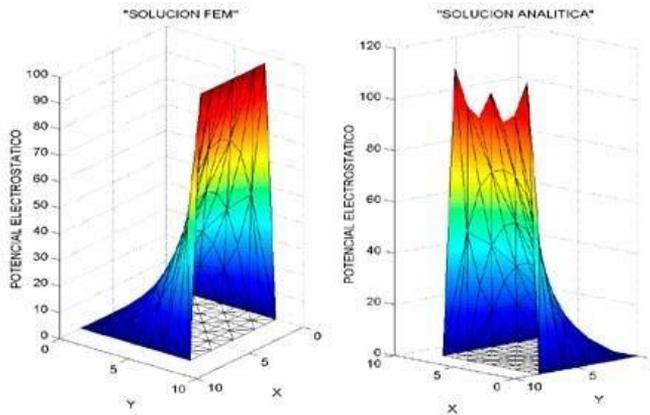
Es desde este último arreglo que es posible determinar los valores de cada una de las constantes a_i . Además, en un elemento triangular la matriz del elemento se calcula por la siguiente ecuación:

$$[K^e] = \int_{\Omega_e} \left(\frac{du(x,y)}{dx} \frac{dV_e(x,y)}{dx} + \frac{du(x,y)}{dy} \frac{dV_e(x,y)}{dy} \right) d\Omega$$

El resultado es una superficie que podemos observar en la Figura 1. En dicha figura, se presenta el relieve y el color representan el valor del potencial en cada parte de la región. Se presenta a su vez un contraste entre la figura ubicada a la derecha y la figura de la izquierda, tres picos en la solución analítica y la solución numérica se ve sin esos picos.

Figura 1.

Distribución del potencial electrostático



La solución analítica es calculada a partir de la solución de la ecuación diferencial. Al evaluar en esta las condiciones de frontera de Dirichlet descritas en las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$v(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}{n - \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}$$

Es importante en este aparte indicar que ambas soluciones, son aproximaciones numéricas. Sin embargo, la solución calculada en este ejercicio está más acorde con las condiciones iniciales del problema que la que se obtiene de manera analítica. Y la respuesta a la diferencia que aparecen en la Figura 1 derecha e izquierda, es

decir los picos que aparece en la parte derecha de la Figura 1, tiene su explicación el en hecho que es una aproximación realizada a partir de ecuación sinusoidal para las coordenadas correspondientes a cada nodo del dominio. Por otro lado, el porcentaje de error calculado se determina a partir de los valores del potencial electrostático calculado por los dos métodos de solución (GSR y analítico), de la siguiente manera:

$$\% E (1_*) = \frac{\|V - V_a\|_*}{\|V_a\|_*}$$

Tabla 1.

Porcentajes de error entre la solución analítica y solución FEM

% Error (l ∞)	15.2759
% Error (l2)	8.7674

Donde:

% Error l∞: indica el porcentaje de error con respecto a la norma infinita (García, 2004).

% Error l2: indica el porcentaje de error con respecto a la norma euclidiana.

2.3 Cálculo del gradiente del potencial

El gradiente es en si mismo la representa la magnitud y la dirección de la máxima rapidez de incremento espacial del potencial escalar V . Este cálculo parte desde la función que describe el potencial escalar y puede escribirse en cada región del dominio de la forma

$$V(x, y) = \sum_i V_i(x, y) \omega(x, y)$$

En consecuencia su gradiente es:

$$\nabla V(x, y) = \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \hat{j}$$

Al realizar un manejo matematico con ambas ecuaciones tenemos:

$$\nabla V(x, y) = \sum_i V_i(x, y) \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial x} \hat{i} + \sum_i V_i(x, y) \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial y} \hat{j}$$

En donde $V_i(x, y)$ es el valor del potencial calculado en la sección anterior para el nodo i y es una constante calculada, de tal manera que en las ecuaciones, queda pendiente por calcular la

derivada parcial de la función base descrita para cada elemento, y para un elemento lineal triangular:

$$\frac{\partial \omega_i(x, y)}{\partial x} = a_{2i}$$

$$\frac{\partial \omega_i(x, y)}{\partial y} = a_{3i}$$

Trabajando en ambas ecuaciones nos queda:

$$\sum_i V_i(x, y) \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial x} \hat{i} + \sum_i V_i(x, y) a_{2i} \hat{i}$$

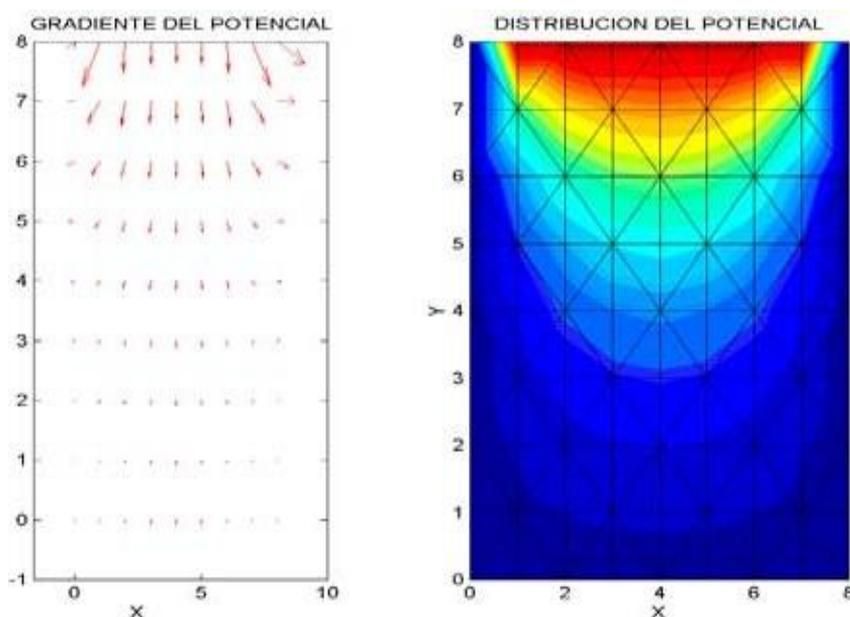
$$\sum_i V_i(x, y) \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial y} \hat{j} + \sum_i V_i(x, y) a_{3i} \hat{j}$$

Estas son ecuaciones definen el comportamiento en cada nodo de los elementos triangulares que corresponden a cada una de sus posiciones ocupadas en la superficie, recordemos que desde el punto de vista geométrico los elementos triangulares se integran tal como un rompecabezas y cada coordenada nodal que es un vértice de estos diminutos triángulos son definidos por el promedio de los valores del gradiente que les ha sido asignado.

En la parte izquierda de la Figura 2, se aprecia la distribución de los gradientes en el dominio y en la parte derecha se muestra la distribución del potencial ilustrado por el color asignado.

Figura 2.

Líneas de campo eléctrico y distribución del potencial electrostático



2.4 Optimizando la convergencia usando relajación

Se hace referencia al proceso de relajación, en el método de Gauss Seidel a una ligera modificación que permite mejorar la convergencia. Y la misma consiste en que posteriormente que se calcula cada nuevo valor de x por medio de las ecuaciones

estudiadas, ese valor se modifica mediante un promedio ponderado que es el resultado de las iteraciones pasadas y en curso, para comprender lo indicado veamos la ecuación:

$$x_i^{nuevo} = \omega x_i^{nuevo} + (1 - \omega) x_i^{anterior}$$

En la ecuación tenemos que ω es un factor ponderado que toma valores entre 0 y 2. Por lo cual debemos considerar las siguientes condiciones: Si $\omega = 1$, $(1 - \omega)$ es igual a cero y el resultado no se modifica. Sin embargo, si a ω se le asigna un valor entre 0 y 1, el resultado es un promedio ponderado de los resultados actuales y anteriores. Este tipo de modificación se conoce como *sobrelajación*. Se emplea comúnmente para hacer un sistema no convergente, converja o apresure la convergencia al amortiguar sus oscilaciones. Y para ω de 1 a 2, se le da una ponderación extra al valor actual, en este caso el nuevo valor se mueve en la dirección correcta hacia la solución verdadera, a este tipo de modificación se le llama *sobrerrelajación*.

2.5 Solución a la situación problemática planteada

El paso inicial reside en obtener una adaptación discretizada del operador de Laplace que nos admita utilizar numéricamente. La fórmula para $f''(x)$ es:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

De tal manera, que al emplear esta fórmula a la función Φ para aproximar Φ_{xx} y Φ_{yy} y sumar los resultados, se obtiene:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= \frac{\Phi(x+h, y) + \Phi(x-h, y) - 2\Phi(x, y)}{h^2} \\ &+ \frac{\Phi(x, y+h) + \Phi(x, y-h) - 2\Phi(x, y)}{h^2} \\ &+ O(h^2) \end{aligned}$$

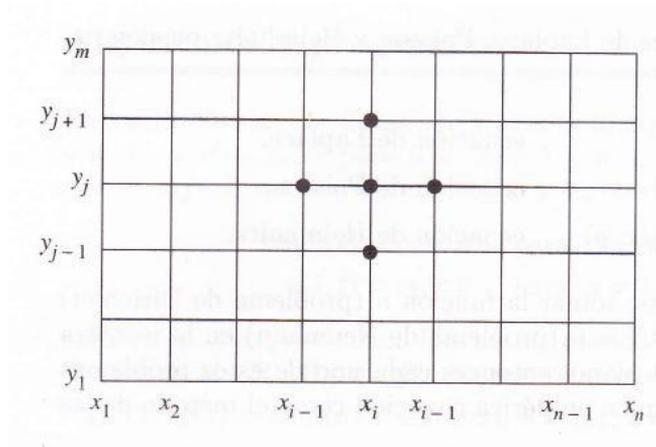
Seguidamente se divide el rectángulo:

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$$

En $(n - 1) \times (m - 1)$ cuadrados de lado h ($a = nh$ y $b = mh$), como se muestra en la Figura 3.

Figura 3.

Malla usada en la ecuación en diferencias de Laplace



Para resolver la ecuación de Laplace, se impone la aproximación:

$$\frac{\Phi(x+h, y) + \Phi(x-h, y) + \Phi(x, y+h) + \Phi(x, y-h) - 4\Phi(x, y)}{h_2} = 0$$

Que tiene una precisión de orden $O(h^2)$ los puntos interiores de la malla (x_i, y_j)

Para $i=2, \dots, n-1$ y $j=2, \dots, m-1$.

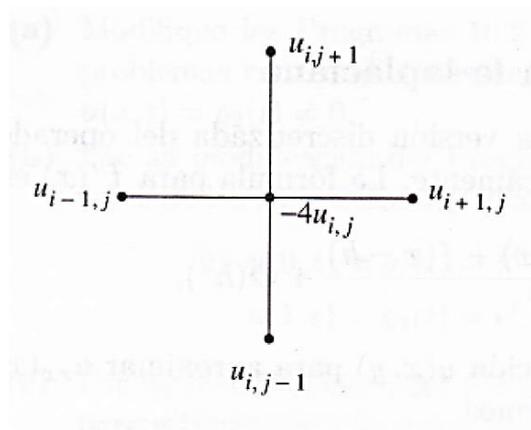
Como los puntos de la malla están espaciados uniformemente: $x_{i+1} = x_i + h$, $x_{i-1} = x_i - h$, $y_{j+1} = y_j + h$ e $y_{j-1} = y_j - h$; denotando por Φ_{ij} la aproximación al valor $\Phi_{(x_i, y_j)}$, la ecuación (9) queda:

$$\nabla^2 \Phi_{ij} = \frac{\Phi_{i+1j} + \Phi_{i-1j} + \Phi_{ij+1} + \Phi_{ij-1} - 4\Phi_{ij}}{h_2} = 0$$

Expresión que se conoce como la fórmula de diferencias con cinco puntos para la laplaciana. Esta fórmula relaciona el valor de la función u_{ij} con sus cuatro valores adyacentes u_{i+1j} , u_{i-1j} , u_{ij+1} y u_{ij-1} como se muestra en la Figura 4.

Figura 4.

Esquema para la ecuación de Laplace



Eliminando de la ecuación (10) h^2 se obtiene la fórmula de aproximación para la ecuación de Laplace:

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0$$

2.6 Muestreo temporal

Para el muestreo temporal tocas imaginar que tenemos un problema de Dirichlet, y además, que conocemos los valores de la función $u(x, y)$ en la frontera de la región R . Para determinar la solución aproximada de la ecuación de Laplace en el rectángulo:

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$$

Donde $u(x, y)$ denota el potencial en un punto (x, y) , los valores en la frontera son:

$$u(x, y) = 20V \quad u(x, 4) = 180V$$

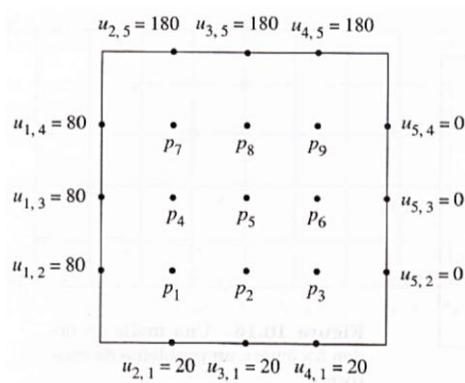
para $0 < x < 4$

$$u(0, y) = 80V \quad u(4, y) = 0V$$

para $0 < y < 4$

Figura 5.

La malla de orden 5×5



2.7 Consideraciones finales del capítulo

Como se pudo apreciar en el transcurso del capítulo el método de Gauss-Seidel se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones lineales y como se indicó al principio de este apartado aplica en el análisis numérico de problemas de potencial electrostático. Este método es particularmente útil en la simulación de sistemas moleculares y en el diseño de dispositivos electrónicos, como capacitores, diodos y transistores. A continuación, se presentan algunos ejemplos de aplicaciones del método de Gauss-Seidel en el cálculo de potenciales electrostáticos en:

1. Simulación de sistemas moleculares.
2. Diseño de dispositivos electrónicos.
3. Simulación de sistemas eléctricos y electrónicos.

Capítulo 3

*Aplicaciones de Matlab
al análisis numérico*



Aplicaciones de Matlab al análisis numérico

3.1 Introducción al capítulo

Matlab es un software de análisis numérico que se utiliza en la ingeniería, la física, la química y otras disciplinas para resolver problemas complejos. Es una herramienta poderosa que permite a los ingenieros y científicos analizar y visualizar datos, crear algoritmos personalizados, simular sistemas complejos y desarrollar modelos numéricos. Es importante en la investigación y el desarrollo de nuevos productos y tecnologías, así como en la optimización de procesos y la toma de decisiones en la industria y la investigación. Algunas de las ventajas de usar Matlab son:

1. Análisis y visualización de datos.
2. Procesamiento de señales.
3. Modelado y simulación.
4. Desarrollo de algoritmos.
5. Optimización de procesos.

Esta sección se ha dedicado a describir el uso de Matlab para el análisis numérico de potenciales electrostáticos.

3.2. Solución mediante Matlab

Ahora se proporciona la solución con el programa (Ver Anexo), desarrollado en Matlab para calcular los potenciales del problema estudiado para cualquier mallado. Al correr el programa los resultados son:

$$p_1 = 55.7141$$

$$p_2 = 43.2142$$

$$p_3 = 27.1428$$

$$p_4 = 79.6428$$

$$p_5 = 69.9999$$

$$p_6 = 45.3571$$

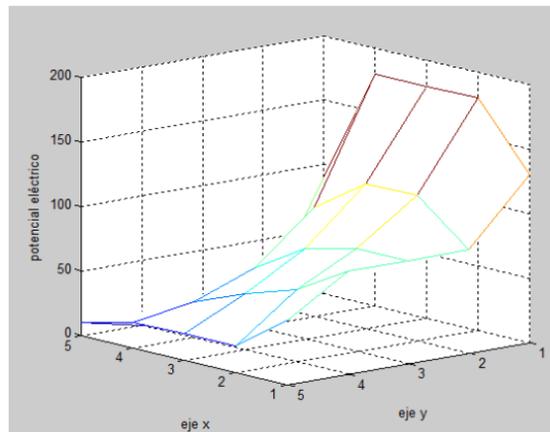
$$p_7 = 112.8571$$

$$p_8 = 111.7857$$

Los resultados son iguales a los obtenidos con el método de la matriz en banda, la Figura 6 muestra el potencial en forma gráfica.

Figura 6.

Potencial eléctrico en función de las coordenadas x y y



3.3. Materiales y métodos

Los materiales utilizados son:

a) Equipos

- ✓ 1 medidor de potencial eléctrico

b) Instrumentos

- ✓ 1 placa de capacitor
- ✓ 1 fuente de alto voltaje 0-25KV

c) Materiales

- ✓ esfera conductora de 4 cm de diámetro
- ✓ 1 varilla aislante

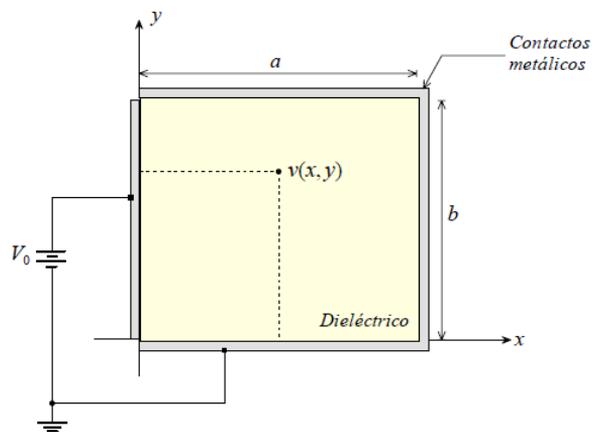
3.4. Muestra

Nuestra muestra en el caso particular es el siguiente problema con valores en la frontera de Dirichlet:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= 0 \\ V(x, 0) &= V_1 \quad V(a, y) = V_2 \\ V(x, b) &= V_3 \quad V(0, y) = V_4 \end{aligned} \right\}$$

Figura7.

Placas rectangulares Condición de frontera



3.5 Técnicas de análisis

3.5.1 Algoritmo

El algoritmo implementado en MATLAB es el siguiente:

```
function
    U=laplace1(funcion1,funcion2,funcion3,funcion4,a,b,h,t
        ol,max1)
% Datos
% funcion1,funcion2,funcion3,funcion4 son las funciones en
    el contorno,
% almacenadas como cadenas de caracteres
% a y b son los extremos superiores de los intervalos [0,a] y
    [0,b]
% h es el incremento
% tol es la tolerancia
% U es la matriz, aqui se almacena la solución numerica´
% Inicialización de los parametros´ y de U
    n=fix(a/b)+1;
    m=fix(b/h)+1;
    ave=(a*(feval('funcion1',0)+feval('funcion2',0))...
        +b*(feval('funcion3',0)+feval('funcion4',0)))/(2*a
        +2*b);
    U=ave*ones(n,m)
% Condiciones de contorno
    U(1,1:m)=feval('funcion3',0:h:(m-1)*h);
    U(n,1:m)=feval('funcion4',0:h:(m-1)*h);
    U(1:n,1)=feval('funcion1',0:h:(n-1)*h);
    U(1:n,m)=feval('funcion2',0:h:(n-1)*h);
    U(1,1)=(U(1,2)+U(2,1))/2;
    U(1,m)=(U(1,m-1)+U(2,m))/2;
```

```

U(n,1)=(U(n-1,1)+U(n,2))/2;
U(n,m)=(U(n-1,m)+U(n,m-1))/2;
% Parametro´ de
sobrerelajacion´
w=4/(2+sqrt(4-
(cos(pi/(n-
1))+cos(pi/(m-
1)))^2));

% Mejora de las aproximaciones err=1;
cnt=0;
while((err>tol)&&(cnt<=max1))
err=0; for j=2:m-1
    for i=2:n-1
        relx=w*(U(i,j+1)
            +U(i,j-
            1)+U(i+1,j)+U(i
            -1,j)...
            4*U(i,j))/4; U(i,j)=U(i,j)+relx; if (err<=abs(relx))
err=abs(relx); end

        end

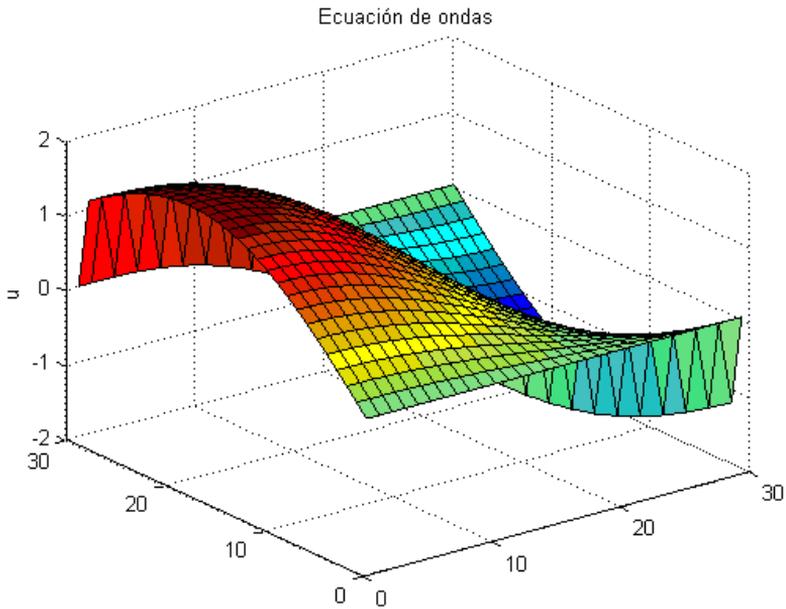
    end cnt=cnt+1; end U=flipud(U'); mesh(U);
xlabel('eje x'); ylabel('eje y'); zlabel('Potencial
electrico');´

```

Al ejecutar esta función se obtiene la integración de la ecuación de ondas (ecuación hiperbólica) que se muestra en la Figura 8.

Figura 8.

Ecuación de ondas



3.5.2 Método iterativo

Consideremos la región rectangular de la figura 7. Así, el problema a solucionar es la ecuación diferencial parcial:

$$\nabla^2 V(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} V(x,y) = 0$$

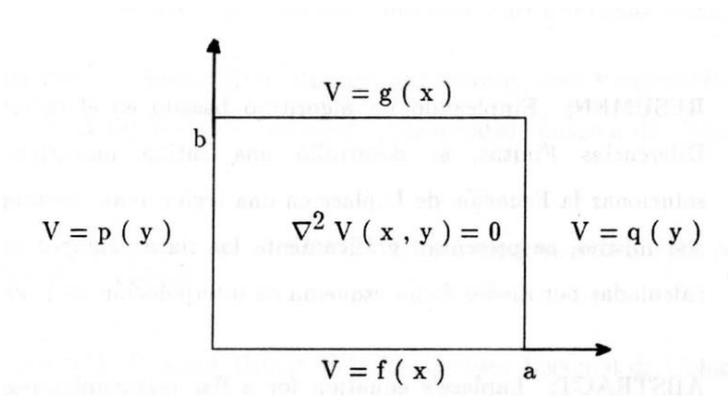
Con $0 < x < a; 0 < y < b$, sujeta a unas condiciones de frontera que en general pueden darse por:

$$V(x,0) = f(x); \quad V(x,b) = g(x)$$

$$V(0,y) = p(y); \quad V(a,y) = q(y)$$

Figura 9.

Definición de la región plana rectangular para la Ecuación de Laplace



Solucionar numéricamente la ecuación anterior por el método GSR implica reemplazar las derivadas presentes en el problema por sus correspondientes cocientes diferenciables.

Sea la función $V(x, y)$. al mantener fija y , la aproximación de la primera derivada de V respecto a x en el intervalo $x, x \pm \Delta x$, se expresa como:

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x, y) \approx \frac{1}{2\Delta x} (V_{x+\Delta x, y} - V_{x-\Delta x, y})$$

Usando la mitad de los incrementos anteriores se puede conseguir la aproximación para la segunda derivada:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x, y) \approx \frac{1}{(\Delta x)^2} (V_{x+\Delta x, y} - 2V_{x, y} + V_{x-\Delta x, y})$$

De igual manera se pueden obtener las aproximaciones para los valores numéricos de las derivadas parciales respecto a y . Reemplazando en la ecuación de Laplace y generalizando, se obtiene:

$$\begin{aligned} \nabla^2 V(x, y) \approx & \frac{1}{(\Delta x)^2} (V_{x+\Delta x, y} - 2V_{x, y} + V_{x-\Delta x, y}) \\ & + \frac{1}{(\Delta y)^2} (V_{x, y+\Delta y} - 2V_{x, y} + V_{x, y-\Delta y}) \end{aligned}$$

Si se divide la región en intervalos $\Delta x = \Delta y = h$, la ecuación toma la forma:

$$\nabla^2 V(x,y) \approx \frac{1}{g^2} (V_{x+\Delta x,y} + V_{x,y+\Delta y} - 4V_{x,y} + V_{x-\Delta x,y} + V_{x,y-\Delta y})$$

Lo que permite escribir la siguiente expresión:

$$V(x,y) \approx \frac{1}{4} (V_{x+\Delta x,y} + V_{x,y+\Delta y} + V_{x-\Delta x,y} + V_{x,y-\Delta y})$$

Que proporciona de manera aproximada el potencial electrostático en cualquier punto x,y dentro de la región, el cual está determinado por el promedio de los valores en los cuatro puntos adyacentes a lo largo de los respectivos ejes.

Una vez se hayan obtenido los primeros valores para la rejilla, el proceso se repite tantas veces como sea necesario hasta una última iteración en la cual las diferencias entre los valores previamente calculados y los hallados, difieren menos que un valor predeterminado.

3.6 Consideraciones finales del capítulo

Como se pudo observar, los métodos iterativos son herramientas matemáticas que se utilizan para resolver problemas complejos y se basan en la utilización de algoritmos y cálculos numéricos para aproximar soluciones a problemas que no pueden ser resueltos de manera analítica. El software MAT LAB brinda la

posibilidad de disminuir los tiempos de trabajo y las implicaciones de aplicar un algoritmo que genera sistemas extensos de ecuaciones en el que cualquier profesional por más cuidadoso que sea puede cometer errores inherentes a su condición humana, adicionalmente nos permite visualizar en unas hermosas formas graficas las características de la curvas que se logran de tan complejas ecuaciones lo cual representa una excelente oportunidad de visualización de un fenómeno que a simple vista es imperceptible. Este software ayuda a ser tangible lo intangible.

Capítulo 4

Aplicaciones



4

Aplicaciones

4.1 Introducción al capítulo

El potencial electrostático de una malla es una magnitud que describe la energía potencial eléctrica por unidad de carga de prueba asociada al campo eléctrico en una malla. Este se utiliza para entender la distribución de cargas eléctricas en una malla y cómo interactúan entre sí. Los métodos numéricos, como el método de las diferencias finitas, el método de elementos finitos, el método de las cargas discretas y el método de las imágenes, se utilizan para calcular el potencial electrostático en una malla. Además, el método de Gauss-Seidel por relajación es una modificación del método de Gauss-Seidel que permite mejorar la convergencia en el cálculo del potencial electrostático en una malla.

4.2 Aplicación del Método GSR en una malla

En este apartado determinaremos la solución más próxima de la ecuación de Laplace en el rectángulo

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$$

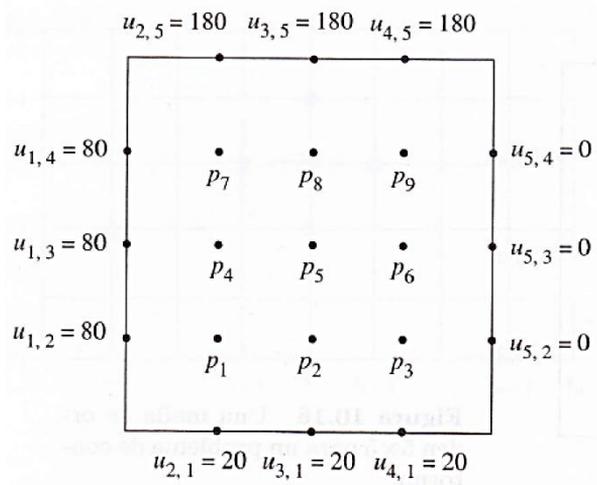
Donde $u(x, y)$ denota el potencial en un punto (x, y) , los valores en la frontera son:

$$\begin{aligned} u(x, y) = 20V & \quad u(x, 4) = 180V \\ \text{para } 0 < x < 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(0, y) = 80V & \quad u(4, y) = 0V \\ \text{para } 0 < y < 4 \end{aligned}$$

Figura 9.

La malla de orden 5×5



Al resolver con Matlab se obtiene los potenciales en los puntos interiores de la malla, expresada en forma vectorial, son:

$$P = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ p_5 \ p_6 \ p_7 \ p_8 \ p_9]'$$

$$P_1 = 55.70, P_2 = 43.21, P_3 = 27.14,$$

$$P_4 = 79.64, P_5 = 70.00, P_6 = 45.35,$$

$$P_7 = 112.5, P_8 = 111.78 \text{ y } P_9 = 84.28$$

Del método anterior se desprende una matriz en banda, ahora vamos a mostrar un método iterativo para aproximar los potenciales, a continuación, la primera iteración. Primero se despeja para u_{ij} de la ecuación:

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}]$$

Evaluando en p_1 :

$$\begin{aligned} p_1 = u_{2,2} &= \frac{1}{4} [u_{3,2} + u_{1,2} + u_{2,3} + u_{2,1}] \\ &= \frac{1}{4} [0 + 80 + 0 + 20] = 25 \end{aligned}$$

Evaluando en p_2

$$p_2 = u_{3,2} = \frac{1}{4} [u_{4,2} + u_{2,2} + u_{3,3} + u_{3,1}]$$
$$= \frac{1}{4} [0 + 25 + 0 + 20] = 11.25$$

Figura 10.

Sistema resultante

$-4p_1$	$+$	p_2	$+$	$0p_3$	$+$	p_4	$+$	$0p_5$	$+$	$0p_6$	$+$	$0p_7$	$+$	$0p_8$	$+$	$0p_9$	$=$	-100
p_1	$-$	$4p_1$	$+$	p_3	$+$	$0p_4$	$+$	p_5	$+$	$0p_6$	$+$	$0p_7$	$+$	$0p_8$	$+$	$0p_9$	$=$	-20
$0p_1$	$+$	p_2	$-$	$4p_3$	$+$	$0p_4$	$+$	$0p_5$	$+$	p_6	$+$	$0p_7$	$+$	$0p_8$	$+$	$0p_9$	$=$	-20
p_1	$+$	$0p_2$	$+$	$0p_3$	$-$	$4p_4$	$+$	p_5	$+$	$0p_6$	$+$	p_7	$+$	$0p_8$	$+$	$0p_9$	$=$	-80
$0p_1$	$+$	p_2	$+$	$0p_3$	$+$	p_4	$-$	$4p_5$	$+$	p_6	$+$	$0p_7$	$+$	p_8	$+$	$0p_9$	$=$	0
$0p_1$	$+$	$0p_2$	$+$	p_3	$+$	$0p_4$	$+$	p_5	$-$	$4p_6$	$+$	$0p_7$	$+$	$0p_8$	$+$	p_9	$=$	0
$0p_1$	$+$	$0p_2$	$+$	$0p_3$	$+$	p_4	$+$	$0p_5$	$+$	$0p_6$	$-$	$4p_7$	$+$	p_8	$+$	$0p_9$	$=$	-260
$0p_1$	$+$	$0p_2$	$+$	$0p_3$	$+$	$0p_4$	$+$	p_5	$+$	$0p_6$	$+$	p_7	$-$	$4p_8$	$+$	p_9	$=$	-180
$0p_1$	$+$	$0p_2$	$+$	$0p_3$	$+$	$0p_4$	$+$	$0p_5$	$+$	p_6	$+$	$0p_7$	$+$	p_8	$-$	$4p_9$	$=$	-180

Evaluando p_3 :

$$p_3 = u_{4,2} = \frac{1}{4} [u_{5,2} + u_{3,2} + u_{4,3} + u_{4,1}]$$
$$= \frac{1}{4} [0 + 11.25 + 0 + 20] = 7.81$$

Evaluando p_4 :

$$\begin{aligned} p_4 = u_{2,3} &= \frac{1}{4} [u_{3,3} + u_{1,3} + u_{2,4} + u_{2,2}] \\ &= \frac{1}{4} [0 + 80 + 0 + 25] = 26.25 \end{aligned}$$

Evaluando p_5 :

$$\begin{aligned} p_5 = u_{3,3} &= \frac{1}{4} [u_{4,3} + u_{2,5} + u_{3,4} + u_{3,2}] \\ &= \frac{1}{4} [0 + 26.25 + 0 + 11.25] = 9.375 \end{aligned}$$

Evaluando p_6 :

$$\begin{aligned} p_6 = u_{4,3} &= \frac{1}{4} [u_{5,3} + u_{3,3} + u_{4,4} + u_{4,2}] \\ &= \frac{1}{4} [0 + 9.375 + 0 + 7.81] = 4.296 \end{aligned}$$

Evaluando p_7 :

$$\begin{aligned} p_7 = u_{2,4} &= \frac{1}{4} [u_{3,4} + u_{1,4} + u_{2,5} + u_{2,3}] \\ &= \frac{1}{4} [0 + 80 + 180 + 26.25] = 71.56 \end{aligned}$$

Evaluando p_8 :

$$\begin{aligned} p_8 = u_{3,4} &= \frac{1}{4} [u_{4,4} + u_{2,4} + u_{3,5} + u_{3,3}] \\ &= \frac{1}{4} [0 + 71.56 + 180 + 9.375] = 65.23 \end{aligned}$$

Evaluando p_9 :

$$\begin{aligned} p_9 = u_{4,4} &= \frac{1}{4} [u_{5,4} + u_{3,4} + u_{4,5} + u_{4,3}] \\ &= \frac{1}{4} [0 + 65.23 + 180 + 4.296] = 62.38 \end{aligned}$$

Tras calcular p_9 se inicia la segunda iteración en el primer nodo:

$$\begin{aligned} p_1 = u_{2,2} &= \frac{1}{4} [u_{3,2} + u_{1,2} + u_{2,3} + u_{2,1}] \\ &= \frac{1}{4} [11.25 + 80 + 26.25 + 20] = 34.37 \end{aligned}$$

Evaluando en p_2 :

$$\begin{aligned} p_2 = u_{3,2} &= \frac{1}{4} [u_{4,2} + u_{2,2} + u_{3,3} + u_{3,1}] \\ &= \frac{1}{4} [7.87 + 34.37 + 9.375 + 20] = 17.90 \end{aligned}$$

Y así sucesivamente

4.3 Análisis de los resultados

Los resultados obtenidos para las equipotenciales se pueden apreciar en la Figura 11 para valores entre -5 y 5 V con un intervalo de 0.5V.

Figura 11.

Condiciones linealmente variables.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	*	*	*	*	*	*	*	*	9
3	*	*	*	*	*	*	*	*	8
4	*	*	*	*	*	*	*	*	7
5	*	*	*	*	*	*	*	*	6
6	*	*	*	*	*	*	*	*	5
7	*	*	*	*	*	*	*	*	4
8	*	*	*	*	*	*	*	*	3
9	*	*	*	*	*	*	*	*	2
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Figura 12.

Líneas equipotenciales de 1 a 10 V, para la configuración mostrada en la Figura 11.

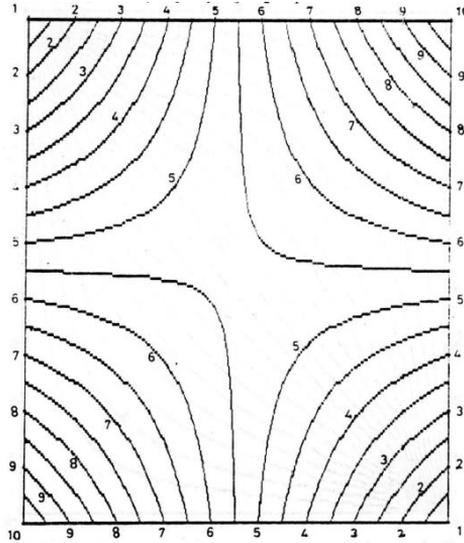


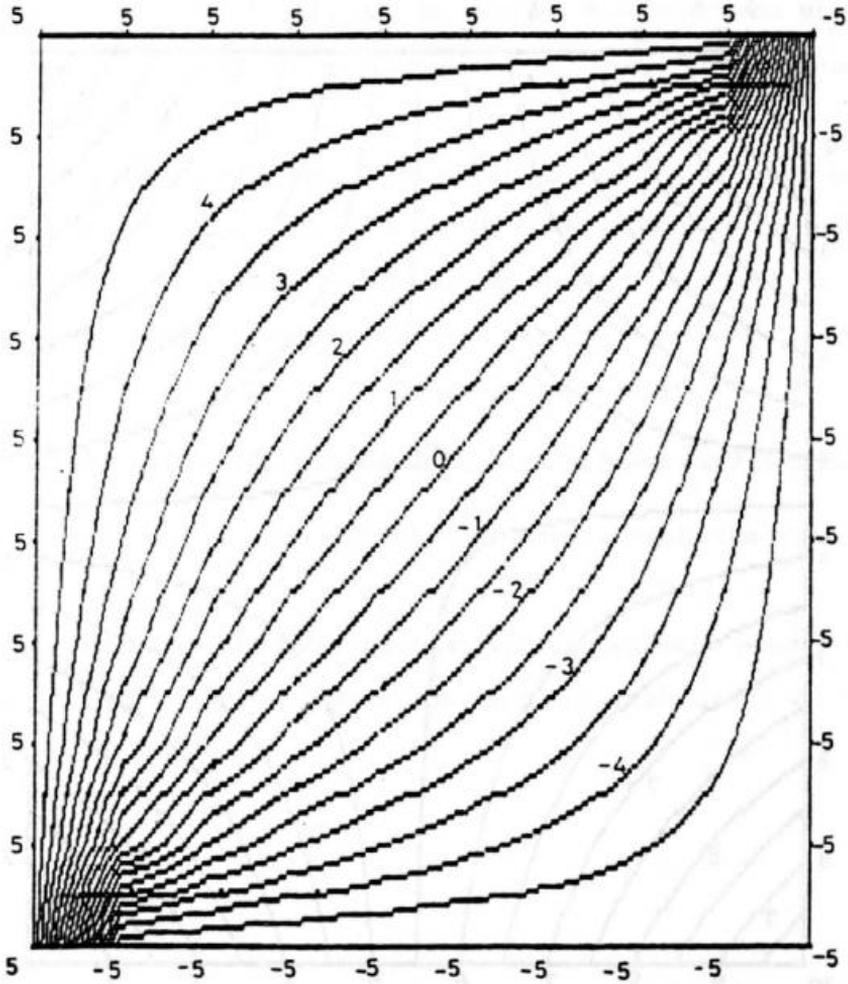
Figura 13.

Condiciones Constantes.

5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
5	*	*	*	*	*	*	*	*	-5
5	*	*	*	*	*	*	*	*	-5
5	*	*	*	*	*	*	*	*	-5
5	*	*	*	*	*	*	*	*	-5
5	*	*	*	*	*	*	*	*	-5
5	*	*	*	*	*	*	*	*	-5
5	*	*	*	*	*	*	*	*	-5
5	*	*	*	*	*	*	*	*	-5
5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5

Figura 14.

Líneas equipotenciales de -5 a +5 V, para las condiciones de frontera mostradas en la Figura 13.



4.4 Consideraciones finales del capítulo

El presente capítulo se ha dedicado al modelado y cálculo del potencial electrostático en una malla de 5x5 con el uso de Matlab. Este software tiene análisis numérico es una herramienta que permite analizar y visualizar datos, crear algoritmos personalizados, simular sistemas complejos y desarrollar modelos numéricos.

Asimismo, durante todo el avance de este material, se puede observar cómo se puede desarrollar un algoritmo para la visualización del potencial electrostático en dos dimensiones con la aplicación del Método GSR. La visualización de datos es un proceso fundamental para convertirlos en representaciones gráficas e identificar patrones y tendencias, incluso valores atípicos.

Ahora bien, en cuanto a las gráficas obtenidas, correspondiente a las Figuras 11 a la 14, se indica a continuación la importancia de la representación en el plano de las líneas potenciales y la presencia de los nodos de forma detallada:

En la Figura 11, se proporciona la base para la distribución del potencial eléctrico en la región estudiada. La información obtenida de estos puntos permite trazar las líneas equipotenciales que muestran cómo varía el potencial eléctrico en el espacio. Las condiciones linealmente variables indican una distribución uniforme y predecible del potencial a lo largo de la cuadrícula.

En la Figura 12, las líneas equipotenciales están más juntas en las regiones cerca del centro y las esquinas, lo que indica que el campo eléctrico es más fuerte en estas áreas. En las zonas donde las líneas están más separadas, el campo eléctrico es más débil. El gradiente de potencial es mayor donde las líneas están más juntas. Esto significa que el cambio en el potencial eléctrico por unidad de distancia es más grande en estas áreas.

En la Figura 13 se representa una cuadrícula de puntos con potenciales constantes. Esto sugiere que las condiciones de borde están fijadas en 5V y -5V en las partes superior e inferior de la cuadrícula, respectivamente.

En la Figura 14, las líneas equipotenciales tienden a curvarse hacia la región de mayor potencial, indicando la dirección del

campo eléctrico que va desde las regiones de mayor potencial (+5 V) hacia las de menor potencial (-5 V). La alta densidad de líneas equipotenciales en las esquinas superior derecha e inferior izquierda indica un campo eléctrico más intenso en estas áreas. El campo eléctrico es más débil en la región central y más intenso donde las líneas están más juntas.

Conclusión general:

Las condiciones de borde (linealmente variables versus constantes) afectan significativamente la distribución de las líneas equipotenciales y, por lo tanto, el comportamiento del campo eléctrico en el área de estudio. En condiciones constantes las líneas equipotenciales son más curvas y concentradas en ciertas áreas que cuando las condiciones son linealmente variables. Sin embargo, las condiciones constantes son útiles para aplicaciones donde se requiere mantener potenciales constantes en los bordes, como en ciertos dispositivos electrónicos.

Referencias

- Argáez, J. (2008). Distribución del potencial electrostático en una placa cuadrada utilizando el método de elementos finitos. *Revista Tecnológica 21*, 134-139.
- Calzada, R. (2011). *Estudi de la utilització dels mapes de potencial electrostàtic i de polarització com a descriptors moleculars*. UPC.
- Cortés, J., González, E., Pinilla, D., Salazar, M., & Tovar, P. (2019). *Métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel*. UNAM, 1-9.
- Fink, K., & Mathews, J. (2008). *Métodos numéricos usando Matlab*. Prentice Hall.
- García, J. (2004). Lecture Notes on Numerical Analysis. Department of Mechanical Engineering,. *EAFIT University Medellin, Colombia*, 21.
- Kwon, Y. W., & Bang, H. (1997). *The Finite Element Method Using Matlab*. Boca Raton: Crc Press.
- Matthew, N. (2009). *Numerical techniques in electromagnetics with Matlab*. CRC Press.

- Rubiños Jiménez, S. L. (2018). *Método G.S.R para el cálculo de potenciales electrostaticos en distribuciones bidimensionales tipo malla*. [Tesis, Universidad Nacional del Callao].
- Sadiku, M. (1998). *Elementos de Electromagnetismo*. (2da ed.). Compañía Editorial Continental, 157.
- Song, S. P. Schmidt and Agrawal, B. N. (2020). Active vibration suppression of a flexible structure using smart material and modular control patch. *Proc. Inst. Mech. Eng.* 214, 217–29.
- Valencia, J., Molina, A., & Correa, V. (2008). Método de elementos finitos en dos dimensiones para estudios de propagación en potenciales electrostáticos. *Scientia Et Technica*, 117-122.

Se incluye el Código Matlab que se ha utilizado para generar las gráficas

```
function
U=laplace1(funcion1,funcion2,funcion3,funcion4,a,b,h,tol,max1)
%Datos
%funcion1,funcion2,funcion3,funcion4 son las funciones en
el contorno,
%almacenadas como cadenas de caracteres
%a y b son los extremos superiores de los intervalos [0,a] y
[0,b]
%h es el incremento
%tol es la tolerancia
%U es la matriz, aqui se almacena la solución numerica
%Inicialización de los parametros y de U
n=fix(a/b)+1;
m=fix(b/h)+1;
ave=(a*(feval('funcion1',0)+feval('funcion2',0))...
+b*(feval('funcion3',0)+feval('funcion4',0)))/(2*a+2*b);
U=ave*ones(n,m)
% Condiciones de contorno
U(1,1:m)=feval('funcion3',0:h:(m-1)*h);
U(n,1:m)=feval('funcion4',0:h:(m-1)*h);
U(1:n,1)=feval('funcion1',0:h:(n-1)*h);
U(1:n,m)=feval('funcion2',0:h:(n-1)*h);
U(1,1)=(U(1,2)+U(2,1))/2;
U(1,m)=(U(1,m-1)+U(2,m))/2;
```

$$U(n,1)=(U(n-1,1)+U(n,2))/2;$$

$$U(n,m)=(U(n-1,m)+U(n,m-1))/2;$$

```

% Parametro´ de
sobrerelajacion´
w=4/(2+sqrt(4-(cos(pi/(n-
1))+cos(pi/(m-1)))^2));

%Mejora
de las
aproximaci
ones err=1;
cnt=0;
while((err>tol)&&(cnt<=max1))
    err=0; for
    j=2:m-1
        for i=2:n-1
            relx=w*(U(i,j+1)+U(i,j-
            1)+U(i+1,j)+U(i-1,j)...

            -4*U(i,j))/4;
            U(i,j)=U(i,j)+relx; if
            (err<=abs(relx))
                err=abs(relx); end

        end

    end cnt=cnt+1; end
U=flipud(U'); mesh(U);
xlabel('eje x'); ylabel('eje y');
zlabel('Potencial electrico');

```

Programa 2

```
% SOLUCION DE LA ECUACION DE POISSON POR METODO DE
  SOBRERELAJACION
%  $V_{xx} + V_{yy} = G$ 
% USO DEL METODO DE SOBRERELAJACION
% Nx : Numero de intervalos a lo largo del eje x
% Ny : Numero de intervalos a lo largo del eje y
% AXB : DIMENSION DE LA REGION SOLUCION
% V(I,J) : POTENCIAL EN LOS PUNTOS DE RED  $(X,Y) = H*(I,J)$ 
%           DONDE  $I = 0, 1, \dots, N_x$ ,  $J = 0, 1, \dots, N_y$ 
% H : Tamano de la malla
% ESPECIFICAR LAS CONDICIONES FRONTERA Y PARAMETROS
  NECESARIO
A=1;B=1;
V1=0;V2=10;V3=20;V4=-10;
NX=20; % 4 12 20
NY=NX;
H=A/NX;
% Configuración inicial de los valores fijos
for I=1:NX-1

    for J=1 : NY-1

        V(I+1,J+1)=(V1 + V2 + V3 + V4)/4.0;
    end
end
% Establecer los potenciales en los nodos fijos
for I = 1:NX-1
    V(I+1,1)=V1;
    V(I+1,NY+1)=V3;
end
for J=1:NY-1
```

```

    V(1,J+1)=V4;
    V(NX+1,J+1)=V2;
end
V(1,1)=(V1+V4)/2.0;
V(NX+1,1)=(V1+V2)/2.0;
V(1,NY+1)=(V3+V4)/2.0;
V(NX+1,NY+1)=(V2+V3)/2.0;

% ENCONTRAR EL FACTOR OPTIMO DE SOBRE RELAJACION

T = cos(pi/NX) + cos(pi/NY);
W = (8 - sqrt(64-16*T^2))/(T^2);
disp(['SOR Factor Omega = ',num2str(W)])
W4=W/4;

%COMIENZA LA
%ITERACION NCOUNT
= 0;
loop=1;
while loop == 1;
    RMIN = 0;
    for I =1:NX-1
        X = H*I;

        for J = 1:NY-1
            Y = H*J;
            G = -36.0*pi*X*(Y-1.0);
            R = W4*(V(I+2,J+1) + V(I,J+1) + V(I+1,J+2) +
            V(I+1,J)
            - 4.0*V(I+1,J+1)
            - - G*H*H); RMIN = RMIN + abs(R);
            V(I+1,J+1) = V(I+1,J+1) +
            R; end
        end
    end
end

```

```

end
RMIN = RMIN/(NX*NY);
if (RMIN>=0.0001)
    NCOUNT = NCOUNT + 1;
    if (NCOUNT>100)
        loop = 0;

disp ('LA SOLUCION NO CONVERGE DESPUES DE 100
      INTERACIONES')

    end
else
    %CUANDO RMIN SEA MENOR QUE 0.0001 Y
    LA SOLUCION ESTE CONVERGIENDO loop = 0;
    disp(['LA SOLUCION CONVERGE EN
    ',num2str(NCOUNT), 'iteraciones']) disp(['h =
    ',num2str(H)])
end
end
Vnum = V;
% GRABACION DE LOS PUNTOS ORIGINALES A TRAVES DE i
abc = zeros(1,9);
a_tic = 1;
vec = [0:H:1];
for ii = .25:.25:.75
    for jj = .25:.25:.75
        xind = find(vec==ii);
        yind = find(vec==jj);
        % disp([xind,yind])
        abc(a_tic) = Vnum(xind,yind);
        a_tic = a_tic + 1;
    end
end

```

```

end

%SALIDA DE RESULTADOS
APROXIMADOS POR DIFERENCIAS
FINITAS %-----
-----

%CALCULO DE LA SOLUCION EXACTA
%
%SOLUCION MEDIANTE EXPANSION DE SERIES DE LA
ECUACION DE POISSON CON

%CONDICIONES DE FRONTERA HOMOGENEAS

%
for I = 1:NX-1
    X = H*I;
    for J = 1:NY-1
        Y = H*J;
        SUM = 0;
        for M = 1:10 % TOMANDO
            SOLAMENTE 10 TERMINOS DE
            LA SERIE FM = M;
            for N = 1:10
                FN = N;
                FACTOR1 = (FM*pi/A)^2 + (FN*pi/B)^2;
                FACTOR2 = ( (-
                1)^(M+N))*144*A*B/(pi*FM*FN);
                FACTOR3 = 1-(1-(-1)^N)/B;
                FACTOR = FACTOR2*FACTOR3/FACTOR1;

                SUM = SUM +
                FACTOR*sin(FM*pi*X/A)*sin(FN*pi*Y/B);
            end
        end
    end
end

```

end

end

```
VH = SUM;  
C1=4*V1/pi;  
C2=4*V2/pi;  
C3=4*V3/pi;  
C4=4*V4/pi;
```

```
SUM=0;  
for K = 1:10 % TOMANDO LOS  
    PROMEROS 10 TERMINOS DE LA  
    SERIE N=2*K-1;  
    AN=N;  
    A1=sin(AN*pi*X/B);  
    A2=sin(AN*pi*(A-Y)/B);  
    A3=sinh(AN*pi*A/B);  
    TERM1=C1*A1*A2/A3;  
    B1=sinh(AN*pi*X/A);  
    B2=sin(AN*pi*Y/A);  
    B3=AN*sinh(AN*pi*B/A);  
    TERM2=C2*B1*B2/B3;  
    D1=sin(AN*pi*X/B);  
    D2=sinh(AN*pi*Y/B);  
    D3=AN*sinh(AN*pi*A/B);  
    TERM3=C3*D1*D2/D3;  
    E1=sinh(AN*pi*(B-X)/A);  
    E2=sin(AN*pi*Y/A);  
    E3=AN*sinh(AN*pi*B/A);  
    TERM4=C4*E1*E2/E3;  
    TERM = TERM1+TERM2+TERM3+TERM4;
```

```

        SUM=SUM + TERM;

    end
    VI = SUM;
    Vexact(I+1,J+1) = VH + VI;
end
end

%Grabando los puntos originales a traves de i
abc2 = zeros(1,9);
a_tic = 1;
vec = [0:H:1];
for ii = .25:.25:.75
    for jj = .25:.25:.75
        xind = find(vec==ii);
        yind = find(vec==jj);
        % disp([xind,yind])
        abc2(a_tic) = Vexact(xind,yind);
        a_tic = a_tic + 1;
    end
end
end
figure(1),
imagesc(flipud(Vnum')),
colorbar

ylabel('y'),      xlabel('x')
title('EJEMPLO DE LA ECUACION DE POISSON')
format short g
disp('    numerico    exacto')
disp([abc' abc2'])

```

Programa 3

```
%*****
%Usando el metodo´ de diferencias finitas
%Este programa calcula la impedancia de caracteristicas´
%de una linea de transmision´
%*****
*****

clear all; format compact;
%Salidas:
%
%      H              NT              Z0
%-----
%
%      0.25          700              49.05
%      0.1           500              58.074
%      0.05          500              65.817
%      0.05          700              63.103
%      0.05          1000             61.53

H = 0.1;
NT = 500;
A = 2.5; B = 2.5; D = 0.5; W = 1.0;
ER = 2.35;
EO = 8.81E-12;
U = 3.0E+8;
NX = A/H;
NY = B/H;
ND = D/H;
NW = W/H;
VD = 100.0;
```

```

%Calcular la carga
con y sin
dielectrico´ ERR =
1.0;
for L= 1:2 E1=E0; E2=E0*ERR;
%Inicializacion´

V = zeros(NX+2,NY+2);

%Establecer potencial en el conductor interno
(nodos fijos) igual a vd V(2:NW+2,ND+2) = VD;

%Calcular potencial en los nodos libres
P1= E1/(2*(E1+E2));
P2= E2/(2*(E1+E2));
for K=1:NT
for I=0: NX-1
for J=0:NY-1
if ((J==ND)&&(I<=NW))
%no hacer nada elseif(J==ND)
%Imponer condiciones de
contorno en la interfaz
V(I+2,J+2) = 0.25*(V(I+3,J+2)
+ V(I+1,J+2)) +...
P1*V(I+2,J+3) + P2*V(I+2,J+1);
elseif(I==0)
%Imponer condiciones de simetria´ a lo
largo del eje y V(I+2,J+2) =
(2*V(I+3,J+2) + V(I+2,J+3) +
V(I+2,J+1))/4.0;
elseif(J==0)

```

```

%Imponer condiciones de simetría a lo
    largo del eje X V(I+2,J+2) = (V(I+3,J+2)
    + V(I+2,J+2) + 2*V(I+2,J+3))/4.0; else
    V(I+2,J+2) = (V(I+3,J+2) + V(I+1,J+2) +
    V(I+2,J+3) + V(I+2,J+1))/4.0; end
    end
    end
%Animation of calculation
%figure(1), imagesc(v),
    colorbar,title([num2str(k),'/',num2str(NT)])
%drawnow
end
%Ahora calcula la carga total encerrada en A
%Trazado rectangular que rodea
    el conductor interno IOUT =
    round((NX+NW)/2);
    JOUT = round((NY+ND)/2);
%Potencial de suma en los bucles
    internos y externos for k=
    1:2
    SUM= E1*sum(V(3:IOUT+1,JOUT+2))...
        + E1*V(2,JOUT+2)/
    2 + E2*V(IOUT+2,2)/2;
    for J=1:JOUT-1
        if (J<ND)
            SUM=SUM + E2*V(IOUT+2,J+2);
        elseif(J==ND)
            SUM=SUM +(E1+E2)*V(IOUT+2,J+2)/2;
        else
            SUM= SUM + E1*V(IOUT+2,J+2);
        end
    end

end

```

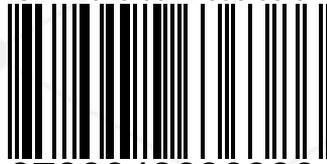
```

if K==1
    SV(1) = SUM;
end
IOUT= IOUT-1;
JOUT= JOUT-1;
end
SUM=SUM + 2.0*E1*V(IOUT+2,JOUT+2); SV(2)=SUM;
Q(L)= abs(SV(1)-SV(2)); ERR= ER;
end
%Finalmente calcular Z0 C0= 4.0*Q(1)/VD;
C1=4.0*Q(2)/VD; Z0=1.0/(U*sqrt(C0*C1));

disp([H,NT,Z0])

```

ISBN: 978-9942-636-38-6



9789942636386