Cálculo vectorial:

ejercicios resueltos con aplicaciones

ISBN: 978-9942-679-33-8

Leticia Chávez Arias

CIDE
EDITORIAL

Cálculo vectorial:

ejercicios resueltos con aplicaciones

Leticia Chávez Arias

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

Fundada en 1972

Riobamba - Ecuador

espoch

Dirección de Publicaciones

Cálculo vectorial:

ejercicios resueltos con aplicaciones

Leticia Chávez Arias

Autora:

Leticia Chávez Arias

Cálculo vectorial: ejercicios resueltos con aplicaciones

Centro de Investigación y Desarrollo Ecuador
Tel.: + (593) 04 2037524
http.: www.cidecuador.org

ISBN: 978-9942-679-33-8

http://doi.org/10.33996/cide.ecuador.CV2679338

Filiación:
Leticia Chávez Arias
Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH)

Dirección editorial: Lic. Pedro Misacc Naranjo, Msc.
Coordinación técnica: Lic. María J. Delgado
Diseño gráfico: Lic. Danissa Colmenares
Diagramación: Lic. Alba Gil
Fecha de publicación: marzo, 2025

Guayaquil - Ecuador

La presente obra fue evaluada por pares académicos experimentados en el área.

Catalogación en la Fuente

Cálculo vectorial: ejercicios resueltos con aplicaciones/ Leticia Chávez Arias - Ecuador: Editorial CIDE, 2025

259 p.: incluye tablas, figuras; 17,6 x 25 cm.

ISBN: 978-9942-679-33-8

1. Cálculo Vectorial

Semblanza de la autora

Leticia Enriqueta Chávez Arias
leticia.chavez@espoch.edu.ec
ORCID: 0009-0009-8502-0660

Ingeniera Mecánica, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (1989). Especialista en Computación Aplicada al Ejercicio Docente, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (2002).

Magister en Gerencia de proyectos Educativos y Sociales, Universidad Nacional de Chimborazo (2003). Magister en Matemática Básica, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (2015). Profesora Titular Principal en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, en la Facultad de Mecánica. Ha escrito libros y artículos relevantes de matemática en calidad de colaboradora y autora. Coordinadora del Área de Ciencias Básicas en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Miembro Principal del Directorio de la Asociación de Profesores en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Integrante del Directorio de la Cámara de la Pequeña Industria de Chimborazo.

AGRADECIMIENTO

Agradezco a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo por brindarme el espacio y los recursos para desarrollar este trabajo, así como por ser el hogar académico donde he compartido mi pasión por la enseñanza del cálculo vectorial.

A mis estudiantes, quienes con su entusiasmo, preguntas y desafíos constantes han sido la inspiración para este libro. Su curiosidad y esfuerzo han enriquecido mi labor docente y me han impulsado a seguir aprendiendo.

Agradezco a la vida por darme la oportunidad de compartir mi pasión por la matemática a través de este libro. Cada página escrita ha sido un reflejo del amor y el entusiasmo que deseo transmitir a las nuevas generaciones.

DEDICATORIA

A mi compañero de vida, mi esposo Kenol, cuya compañía y apoyo han sido mi ancla y motor en este viaje.

A mis hijos, Pierre y Kattelie, ahora persiguiendo sus propios sueños, con la esperanza de que siempre lleven con ellos la curiosidad y el amor por el conocimiento que siempre les inculqué.

A los jóvenes que sueñan con un mundo mejor, que este libro les recuerde que la lógica y la razón también son aliados en la construcción de un futuro más justo y equitativo.

Índice general

Introducción

El cálculo vectorial es una herramienta matemática esencial en el campo de la ingeniería, se enfoca en el estudio y manipulación de campos vectoriales y escalares, por lo que es fundamental en este campo, así como en física y otras ciencias aplicadas, pues juega un papel importante en la resolución de problemas desde los más simples hasta los más complejos en diversas disciplinas. Este libro de ejercicios con aplicaciones está diseñado para complementar el estudio teórico del cálculo vectorial y demostrar la importancia y la aplicabilidad práctica de esta herramienta matemática en situaciones reales.

Diseñado para estudiantes y profesionales de ingeniería, este trabajo ofrece una amplia gama de ejercicios resueltos que cubren el cálculo diferencial e integral de funciones vectoriales y de varias variables. A lo largo del libro se hace énfasis en los ejercicios relacionados con la interpretación física y geométrica de los conceptos, facilitando así una comprensión más intuitiva y profunda del material del cálculo vectorial, se exploran las aplicaciones de las integrales múltiples, así como las de integrales de línea, destacando su relevancia en el análisis y la solución de problemas ingenieriles.

Cada capítulo proporciona una variedad de ejercicios de dificultad creciente, comenzando con problemas básicos y avanzando hacia situaciones más complejas, acompañados de soluciones detalladas que permiten a los lectores seguir el razonamiento y la metodología de resolución. Además, se presentan ejemplos prácticos de aplicaciones que muestran cómo el cálculo vectorial se aplica en diversas ramas de la ingeniería, desde la mecánica y la electricidad hasta la dinámica de fluidos y la termodinámica.

Esperamos que este libro de ejercicios con aplicaciones sea una valiosa herramienta para estudiantes y profesionales de ingeniería, para los primeros proporcionar una comprensión sólida del cálculo vectorial y sus aplicaciones prácticas, ayudándolos a apreciar su valor y a desarrollar las habilidades necesarias para aplicarlo en problemas del mundo real, y para los segundos, mejorar su capacidad para abordar los desafíos técnicos y científicos de su carrera.

CAPÍTULO 1
Funciones vectoriales

Capítulo 1

Funciones vectoriales

1.1. Dominio, rango y gráfica

Una función vectorial de variable real es aquella que tiene m funciones componentes y una única variable independiente t. Las componentes son funciones reales de variable real (García, 2015).

$$\begin{aligned}&\vec{f}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow\ \mathbb{R}^m\\&\qquad t \rightarrow \vec{f}\,(t) = \langle f_1\,(t)\,, f_2\,(t)\,, \ldots, f_m\,(t)\rangle\end{aligned}$$

El dominio de $\vec{f}\,(t)$ lo determina la intersección de los dominios de las funciones componentes (García, 2015):

$$D\vec{f} = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap \cdots \cap D_{f_m} \tag{1.1}$$

Ejercicio 1.
Determinar el dominio de la función vectorial $\vec{f}\,(t) = \left(2 + 3t^2\right)\vec{\imath} + (t-1)\vec{\jmath}$
Solución
Calculando el dominio de cada componente:

$$\begin{aligned}f_1\,(t) = 2 + 3t^2 \Rightarrow D_{f_1}\,(t) = \mathbb{R}\\f_2\,(t) = t - 1 \Rightarrow D_{f_2}\,(t) = \mathbb{R}\end{aligned}$$

Por lo tanto, el dominio de $\vec{f}$ es la intersección de los dominios de sus componentes:

$$D_{\vec{f}} = D_{f_1}\,(t) \cap D_{f_2}\,(t) = \mathbb{R}$$

Ejercicio 2.
Hallar el dominio de la función vectorial $\vec{f}\,(t) = \left\langle |t-1|, \sqrt{t^2+5}\right\rangle$
Solución

$$\begin{aligned}&f_1\,(t) = |t-1|, \quad \text{por lo tanto } D_{f_1}\,(t) = \mathbb{R}\\&f_2\,(t) = \sqrt{t^2+5},\ \text{esta función estará definida } \forall\, t/t^2+5 \geq 0,\ \text{por lo tanto } D_{f_2}\,(t) = \mathbb{R}\end{aligned}$$

Entonces el dominio es:

$$D_{\vec{f}} = D_{f_1}\,(t) \cap D_{f_2}\,(t) = \mathbb{R}$$

Ejercicio 3.
Determinar el dominio de la función vectorial $\vec{f}\,(t) = \left\langle \sin(\ln t), \frac{1}{3-t^2}\right\rangle$
Solución

$$f_1\,(t) = \sin(\ln t)$$

Esta función está definida para $\forall\, t > 0$, por lo tanto el dominio es:

$$\begin{aligned}D_{f_1} &=]0, +\infty[\\f_2\,(t) &= \frac{1}{3-t^2}\end{aligned}$$

Esta función está definida para $\{\,\forall\, t\,/\,3-t^2\neq 0\}$, por lo tanto el dominio es:

$$D_{f_2}=\mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{3}\}$$

Entonces el dominio es:

$$D_{\vec{f}}=D_{f_1}\left(t\right)\cap D_{f_2}\left(t\right)=]0;\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3};+\infty[$$

Ejercicio 4.
Hallar el dominio de la función vectorial $\vec{f}\,(t)=\left\langle \operatorname{arc\,tg}(t-4),\sin^{-1}2t,\cosh e^t\right\rangle$
Solución

$$\begin{aligned}
&f_1\left(t\right)=\operatorname{arc\,tg}(t-4),\ \text{el dominio es } D_{f_1}\left(t\right)=\mathbb{R}\\
&f_2\left(t\right)=\sin^{-1}2t,\ \text{el dominio es } D_{f_2}\left(t\right)=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\\
&f_3\left(t\right)=\cosh e^t,\ \text{el dominio es } D_{f_3}\left(t\right)=\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$D_{\vec{f}}=D_{f_1}\left(t\right)\cap D_{f_2}\left(t\right)\cap D_{f_3}\left(t\right)=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

Ejercicio 5.
Determinar el dominio de la función vectorial $\vec{f}\,(t)=\left\langle\sqrt{|t^2-3t+2|},\ \ln\cosh 3t,\sqrt{\frac{t^4+1}{e^t-2}}\right\rangle$
Solución

$$\begin{aligned}
&f_1\left(t\right)=\sqrt{|t^2-3t+2|},\ \text{el dominio es} D_{f_1}\left(t\right)=\mathbb{R}\\
&f_2\left(t\right)=\ln\cosh 3t,\ \text{el dominio es } D_{f_2}\left(t\right)=\mathbb{R}\\
&f_3\left(t\right)=\sqrt{\frac{t^4+1}{e^t-2}},\ \text{el dominio es } \ D_{f_3}\left(t\right)=]\ln 2;+\infty[
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$D_{\vec{f}}=D_{f_1}\left(t\right)\cap D_{f_2}\left(t\right)\cap D_{f_3}\left(t\right)=]\ln 2;+\infty[$$

Ejercicio 6.
Hallar el dominio de la función vectorial $\vec{f}\,(t)=\left\langle\sqrt[3]{\frac{\tan t}{t^2+5}},\cos\left(\frac{1}{t}\right),\sinh\sqrt{t^3+2t-3}\right\rangle$
Solución

$$f_1\left(t\right)=\sqrt[3]{\frac{\tan t}{t^2+5}},\ \text{esta función estará definida } \forall\, t/\frac{\tan t}{t^2+5}\in\mathbb{R}$$

Por lo tanto el dominio es:

$$D_{f_1}\left(t\right)=\mathbb{R}\setminus\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

$$f_2\left(t\right)=\cos\left(\frac{1}{t}\right),\ \text{esta función estará definida }\{\,\forall\, t/\frac{1}{t}\in\mathbb{R}\},\ \text{el dominio es } D_{f_2}\left(t\right)=\mathbb{R}\backslash\{0\}$$

$$f_3\left(t\right)=\sinh\sqrt{t^3+2t-3},\ \text{esta función está definida }\{\forall t/t^3+2t-3\geq 0\,\},\ \text{el dominio es}$$
$$D_{f_3}\left(t\right)=[1;+\infty[$$

Por lo tanto:

$$D_{\vec{f}}=D_{f_1}\left(t\right)\cap D_{f_2}\left(t\right)\cap D_{f_3}\left(t\right)=[1;+\infty[\backslash\ \frac{\pi}{2}+k\pi,\text{donde k}\geq 0\wedge k\in\mathbb{Z}$$

El rango o imagen de $\vec{f}\,(t)$ son los valores de salida de la función vectorial, por lo que el rango es un conjunto de vectores (Stewart, 2012).
Son de especial interés aquellas funciones vectoriales con dos y tres componentes porque se las puede representar en el espacio bidimensional y tridimensional respectivamente.
Sea $\quad\vec{f}:I\subseteq\mathbb{R}\rightarrow\ \mathbb{R}^2$

$$t\rightarrow\ \vec{f}\,(t)=\langle f_1\left(t\right),f_2\left(t\right)\rangle$$

Estas componentes reciben el nombre de ecuaciones paramétricas (Palacios, 2017).

$$x=f_1\left(t\right)\ ,\ y=f_2\left(t\right)\tag{1.2}$$

Si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son continuas en I, el conjunto C de todos los puntos (x, y) se llama curva en el espacio bidimensional.
Para generar la curva C se tienen dos posibilidades:
1. Generar el campo vectorial C (se recomienda para intervalos pequeños).
2. Eliminar t en las ecuaciones paramétricas mediante métodos algebraicos o utilizando identidades trigonométricas para obtener una ecuación cartesiana en x e y.
Es importante que se tomen en la curva C solo aquellos puntos (x, y) que satisfagan las ecuaciones paramétricas.

Sea $\vec{f} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$t \rightarrow \vec{f}(t) = \langle f_1(t), f_2(t), f_3(t) \rangle$$

Estas componentes reciben el nombre de ecuaciones paramétricas (Palacios, 2017).

$$x = f_1(t) \ , \ y = f_2(t) \ , \ z = f_3(t) \tag{1.3}$$

Si $f_1(t)$, $f_2(t)$ y $f_3(t)$ son continuas en I, el conjunto C de todos los puntos (x, y, z) se llama curva en el espacio tridimensional (Stewart, 2012).
Para generar la curva C se tienen dos posibilidades:
1. Generar el campo vectorial C (se recomienda para intervalos pequeños).
2. Eliminar t en las ecuaciones paramétricas mediante métodos algebraicos o utilizando identidades trigonométricas obteniendo:
2.1. Las ecuaciones de dos superficies en x, y, z, cuya intersección es C.
2.2. La ecuación de una superficie en x, y, z en la cual se mueve la curva C para diferentes valores de una de las variables.
En ciertas ocasiones, para la curva C representada a partir de las ecuaciones cartesianas, se requiere escribir la función vectorial $\vec{f}(t)$. Esta se obtiene mediante la parametrización de las variables de la ecuación; dependiendo de cómo se haga la parametrización, la curva C tendrá un sentido y por ende no será única. Dada la gráfica de C (siempre y cuando no sea complicada), también se puede obtener la ecuación vectorial.

Ejercicio 7.
Describir el rango de la función vectorial $\vec{f}(t) = \left\langle 1 - t^2, t \right\rangle$
Solución

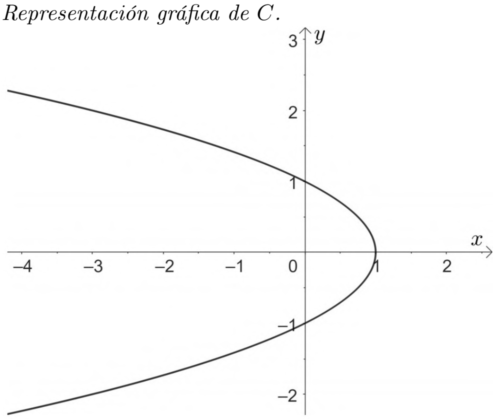
$$D_{\vec{f}} = \mathbb{R}$$

Ecuación paramétrica de C:

$$C : \begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t \end{cases}$$

Se elimina t y se obtiene la ecuación cartesiana $x = 1 - y^2$, esta es la curva C, cuya gráfica está en la Figura 1.1.

Figura 1.1
Representación gráfica de C.



Ejercicio 8.
Representar el rango de la función vectorial $\vec{f}(t) = \langle e^{4t}, 2t \rangle$
Solución

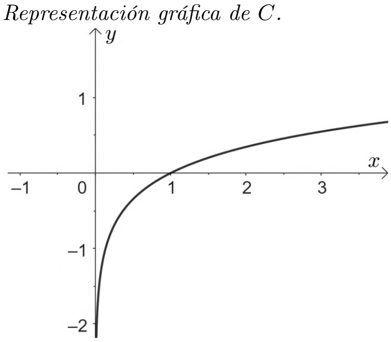
$$\mathrm{D}_{\vec{f}} = \mathbb{R}$$

Ecuación paramétrica de C:

$$\text{C: } \begin{cases} x = e^{4t} \\ y = 2t \end{cases}$$

Se elimina t y se obtiene la ecuación cartesiana $y = \frac{1}{2} \ln x$, esta es la curva C, cuya gráfica está en la Figura 1.2.

Figura 1.2
Representación gráfica de C.



Ejercicio 9.
Describir el rango de la función vectorial $\vec{f}(t) = \langle t^3, 3 - t \rangle$
Solución

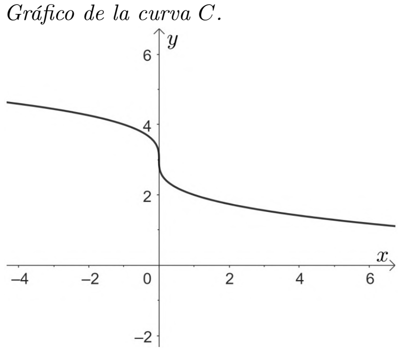
$$\mathrm{D}_{\vec{f}} = \mathbb{R}$$

Ecuación paramétrica de C:

$$\text{C: } \begin{cases} x = t^3 \\ y = 3 - t \end{cases}$$

Se elimina t y se obtiene la ecuación cartesiana $x = (3 - y)^3$, ésta es la curva C, cuya representación gráfica está en la Figura 1.3.

Figura 1.3
Gráfico de la curva C.



Ejercicio 10.
Si $\vec{f}(t) = \langle \cos \frac{t}{2}, \ \sin \frac{t}{2} \rangle$ demostrar que el rango de $\vec{f}$ es una circunferencia en R^2
Solución

$$\mathrm{D}_{\vec{f}} = \mathbb{R}$$

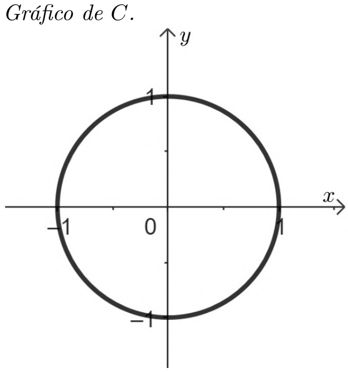
Ecuación paramétrica de C:

$$\text{C: } \begin{cases} x = \cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ y = \sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{cases} \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1$$

Que corresponde a la ecuación de una circunferencia, como se puede observar en la Figura 1.4.

Figura 1.4

Gráfico de C.



Ejercicio 11.
Si $\vec{f}(t) = \langle \sin t, \csc t \rangle$ describir el rango de $\vec{f}$
Solución

$$\text{El } D_{\vec{f}} = \mathbb{R} \backslash k\pi, k \in Z$$

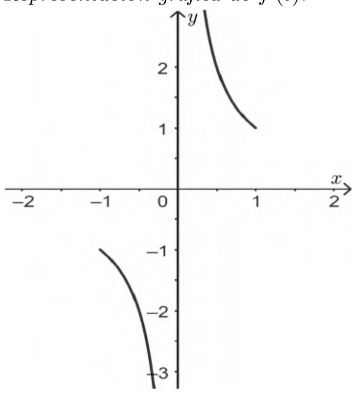
La ecuación paramétrica de C:

$$C : \begin{cases} x = \sin t \\ y = \csc t \end{cases}$$

Se elimina t y se obtiene la ecuación cartesiana $y = \frac{1}{x}$, sólo una parte de la gráfica de ésta es la curva C, como se indica en la Figura 1.5.

Figura 1.5

Representación gráfica de $\vec{f}(t)$.



Ejercicio 12.
Describa el rango de la función vectorial $\vec{f}(t) = \langle \cosh t, \sinh t + 2 \rangle$
Solución

$$D_{\vec{f}} = \mathbb{R}$$

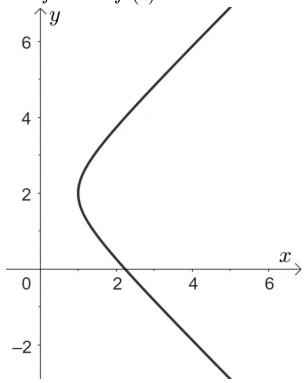
Ecuación paramétrica de C:

$$C : \begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sinh t + 2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{c} x^2 = \cosh^2 t \\ (y-2)^2 = \sinh^2 t \\ \hline x^2 - (y-2)^2 = 1 \end{array}$$

Corresponde a la ecuación de una rama de la hipérbola como se puede observar en la Figura 1.6.

Figura 1.6

Gráfico de $\vec{f}(t)$.



Ejercicio 13.
La ecuación cartesiana de una curva C está dada por:

$$C : y = 3x^2 - x - 2$$

Escribir una función vectorial que describa C.
Solución
Se parametriza C de la siguiente manera:

$$C : \begin{cases} x = t \\ y = 3t^2 - t - 2 \end{cases}$$

Por lo tanto la función vectorial buscada es: $\vec{f}(t) = \left\langle t, 3t^2 - t - 2 \right\rangle$
Ejercicio 14.
Una curva C está dada por la ecuación cartesiana:

$$C : 4(x-1)^2 + y^2 = 4$$

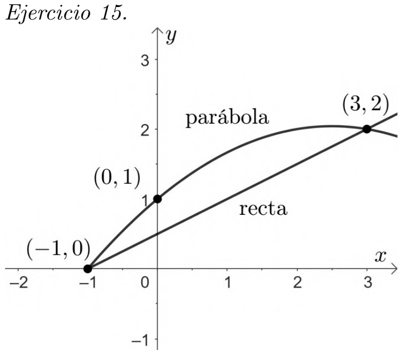
Escribir una función vectorial que describa C.
Solución
Se parametriza C de la siguiente manera:

$$C : \begin{cases} x = \cos t + 1 \\ y = 2\sin t \end{cases}$$

La función vectorial buscada es: $\vec{f}(t) = \langle \cos t + 1, 2\sin t \rangle$
Ejercicio 15.
El rango de una función vectorial está representado por la curva cerrada limitada por la parábola y la recta, representadas en la Figura 1.7.

Figura 1.7

Ejercicio 15.



Escriba una función vectorial que describa dicho rango
Solución
Se halla la ecuación cartesiana de la parábola, cuya expresión general es:

$$y = \mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$$

Se reemplazan los puntos $(-1,0),(0,1),$ y $(3,2)$ en la ecuación anterior y se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \mathrm{a} - \mathrm{b} + \mathrm{c} \ = 0 \\ \mathrm{c} \ = 1 \\ 9\mathrm{a} + 3\ \mathrm{b} + \mathrm{c} \ = 2 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, el valor de los coeficientes a, b y c son:

$$\mathrm{a} = -\frac{1}{6},\ \mathrm{b} = \frac{5}{6},\ \mathrm{c} = 1$$

Por lo tanto la ecuación cartesiana de la parábola es: $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{6}x + 1$, parametrizando:

$$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{1}{6}t^2 + \frac{5}{6}t + 1 \end{cases} \quad \text{para valores de } t \quad -1 \le t \le 3$$

Ahora se escribe la ecuación paramétrica de la recta que pasa por los puntos $(-1,0)$ y $(3,2)$:

$$C_2 : \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 2 + 2t \end{cases} \quad \text{para valores de } t \quad -1 \le t \le 0$$

La curva cerrada C está dada por:

$C : C_1 \cup C_2$ por lo tanto la función vectorial que describe C es

$$\vec{f}(t) = \begin{cases} \left\langle t, -\frac{1}{6}t^2 + \frac{5}{6}t + 1 \right\rangle & ; -1 \le t \le 3 \\ \langle 3 + 4t, 2 + 2t \rangle & ; -1 \le t \le 0 \end{cases}$$

Ejercicio 16.
Describir el rango de la función vectorial $\vec{f}(t) = \left\langle -\frac{1}{2}t, t - 3\ , et \right\rangle$
Solución

$$D_{\vec{f}} = \mathbb{R}$$

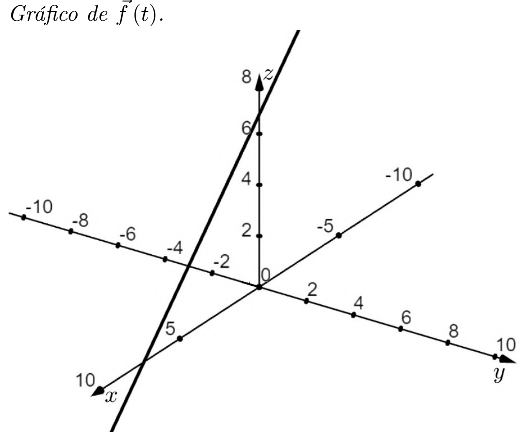
Ecuación paramétrica de C:

$$C : \begin{cases} x = -\frac{1}{2}t \\ y = t - 3 \\ z = et \end{cases} \quad \text{que corresponde a la ecuación de la recta}$$

Cuya gráfica está representada en la Figura 1.8.

Figura 1.8

Gráfico de $\vec{f}(t)$.



Ejercicio 17.
Describir el rango de la función vectorial $\vec{f}(t) = \left\langle \frac{1}{2}\cos t, \sin t, 2t \right\rangle$
Solución

$$D_{\vec{f}} = \mathbb{R}$$

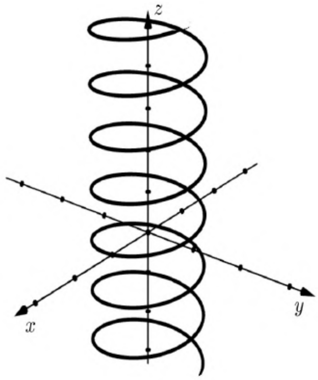
La ecuación paramétrica de C:

$$C: \begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos t \\ y = \sin t \\ z = 2t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} 4x^2 = \cos^2 t \\ \underline{y^2 = \sin^2 t} \\ 4x^2 + y^2 = 1 \end{array}$$

Por lo tanto, la gráfica corresponde a la curva que se mueve dentro del cilindro eliptico $4x^2 + y^2 = 1$ para valores de $z = 2t$, como se observa en la Figura 1.9.

Figura 1.9

Representación del rango de $\vec{f}(t)$.



Ejercicio 18.
Representar gráficamente el rango de la función vectorial

$$\vec{f}(t) = \left\langle \sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}\sin t, 2 - \sqrt{3}\sin t \right\rangle$$

Solución

$$D_{\vec{f}} = \mathbb{R}$$

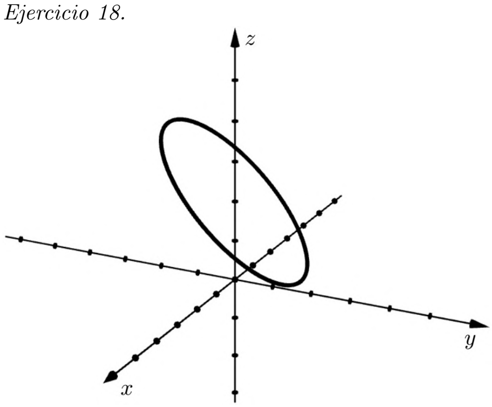
Ecuación parametrizada de C:

$$C: \begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t \\ y = \sqrt{3}\sin t \\ z = 2 - \sqrt{3}\sin t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 = 3\cos^2 t \\ \underline{y^2 = 3\sin^2 t} \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \quad \wedge \quad z = 2 - y$$

$x^2 + y^2 = 3$ representa un cilindro circular recto dirigido a lo largo del eje z. La ecuación $z = 2 - y$ es un plano perpendicular a yz.
Por lo tanto, la curva C que describe la función vectorial se debe interpretar como la intersección de las dos superficies, cuya gráfica está descrita en la Figura 1.10.

Figura 1.10

Ejercicio 18.



Ejercicio 19.
Describir el rango de la función vectorial $\vec{f}(t) = \left\langle \cosh \ln(t+1), e^t, \sqrt{t} \right\rangle$ para $t \in [0,1]$.
Solución
El dominio de $\vec{f}$ es:

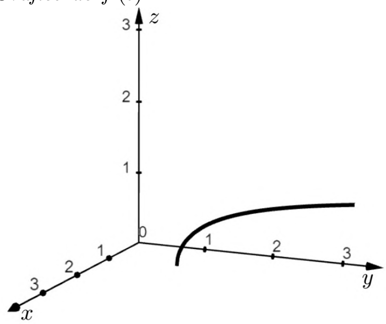
$$D_{\vec{f}} = [0, +\infty[$$

Ecuación paramétrica de C:

$$C : \begin{cases} x = \cosh \ln(t+1) \\ y = e^t \\ z = \sqrt{t} \end{cases}$$

Como no es posible hallar ecuaciones de superficies conocidas que permitan interpretar la curva C como la intersección de estas superficies, y además el intervalo donde se requiere graficar es relativamente pequeño, se dan valores de entrada del dominio de $\vec{f}$, obteniendo una sucesión de puntos, los mismos que generan la gráfica de la función vectorial, de la Figura 1.11.

Figura 1.11
Gráfico de $\vec{f}(t)$.

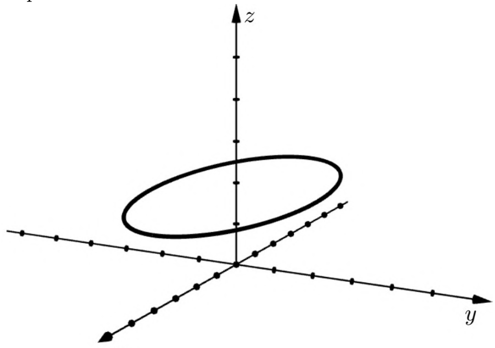


Ejercicio 20.
La curva C está dada por la intersección de las superficies: $x^2 + 4y^2 = 16$ y $z = \sqrt{3}$.
Escribir una función vectorial $\vec{f}(t)$ que describa C y representarla gráficamente.
Solución
Se parametriza como:

$$C : \begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = \sqrt{3} \end{cases}$$

Por lo tanto, $\vec{f}(t) = \langle 4\cos t, 2\sin t, \sqrt{3} \rangle$, $D_{\vec{f}} = \mathbb{R}$, cuya gráfica está representada en la Figura 1.12.

Figura 1.12
Representación de la curva C.

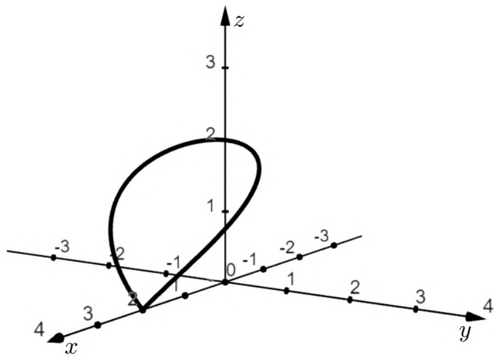


Ejercicio 21.
La curva C está dada por la intersección de las superficies: $x^2 + y^2 + z^2 = 4 \wedge (x-1)^2 + y^2 = 1$, para $z \geq 0$.
Escribir una función vectorial $\vec{f}(t)$ que describa C y representarla gráficamente
Solución
Se parametriza como:

$$C : \begin{cases} x = \cos t + 1 \\ y = \sin t \\ z = 2 \sin \frac{t}{2} \end{cases}$$

Por lo tanto $\vec{f}(t) = \left\langle \cos t + 1, \sin t, 2 \sin \frac{t}{2} \right\rangle, D_{\vec{f}} = \mathbb{R}$, cuya gráfica está dada en la Figura 1.13.

Figura 1.13
Gráfico de $\vec{f}(t)$.

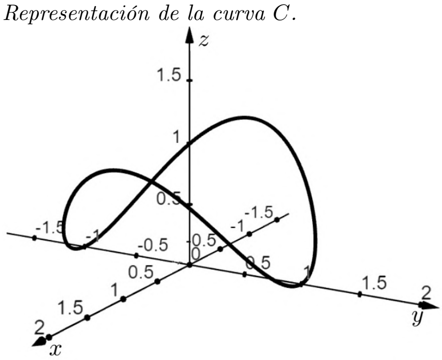


Ejercicio 22.
La curva C está dada por la intersección de las superficies: $x^2 + y^2 = 1 \wedge z = x^2$.
Escribir una función vectorial $\vec{f}(t)$ que describa C y representarla gráficamente
Solución
Se parametriza como:

$$C : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \cos^2 t \end{cases}$$

Por lo tanto $\vec{f}(t) = \left\langle \cos t, \sin t, \cos^2 t \right\rangle, D_{\vec{f}} = \mathbb{R}$, cuya gráfica está en la Figura 1.14.

Figura 1.14
Representación de la curva C.

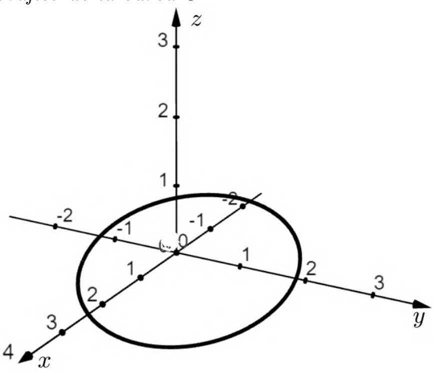


Ejercicio 23.
La curva C está dada por la intersección de las superficies: $y = 2 - \left(x^2 + z^2\right) \wedge x + y = 1$.
Escribir una función vectorial $\vec{f}(t)$ que describa C y representarla gráficamente
Solución
Se parametriza como:

$$C : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = \pm\sqrt{1 + t - t^2} \end{cases}$$

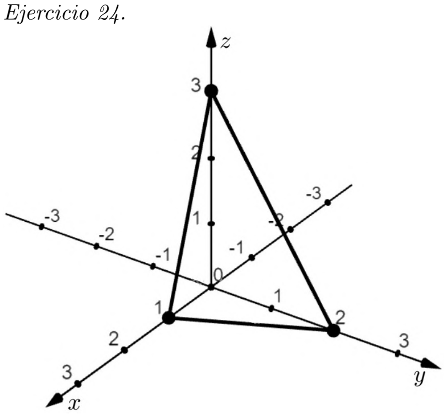
Por lo tanto $\vec{f}(t) = \left\langle t, 1 - t, \pm\sqrt{1 + t - t^2} \right\rangle, D_{\vec{f}} = \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$, cuya gráfica está en la Figura 1.15.

Figura 1.15
Gráfico de la curva C.



Ejercicio 24.
El rango de una función vectorial está representado en la Figura 1.16.

Figura 1.16
Ejercicio 24.



Escriba una función vectorial que describa dicho rango
Solución
La ecuación paramétrica de la recta C_1 que une los puntos $(1, 0, 0)$ y $(0, 2, 0)$ está dada por:

$$C_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{para} \quad t \in 0 \leq t \leq 1$$

La ecuación paramétrica de la recta C_2 que une los puntos $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 3)$ está dada por:

$$C_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 - 2t \\ z = 3t \end{cases} \quad \text{para} \quad t \in 0 \leq t \leq 1$$

La ecuación paramétrica de la recta C_3 que une los puntos $(0,0,3)$ y $(1,0,0)$ está dada por:

$$C_3 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 3 - 3t \end{cases} \qquad \text{para} \qquad t \in 0 \leq t \leq 1$$

Entonces $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, por lo tanto la función vectorial pedida es:

$$\vec{f}(t) = \begin{cases} \langle 1-t, 2t, 0 \rangle & ;\ 0 \leq t \leq 1 \\ \langle 0, 2-2t, 3t \rangle & ;\ 0 \leq t \leq 1 \\ \langle t, 0, 3-3t \rangle & ;\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

1.2. Límites y continuidad

Sea $\vec{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

$$t \mapsto \vec{f}(t) = \langle f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t) \rangle$$

El límite de $\vec{f}$ se define obteniendo los límites de sus funciones componentes (Stewart, 2012). Es decir:

$$\lim_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \left\langle \lim_{t \to t_0} f(t), \lim_{t \to t_0} f_2(t), \ldots, \lim_{t \to t_0} f_m(t) \right\rangle \tag{1.4}$$

Siempre que existan los límites de las funciones componentes. Si el límite de una de las componentes no existe, entonces el límite de $\vec{f}$ no existe.

Ejercicio 25.
Calcular $\lim\limits_{t \to -1} \langle 2t^2 + 3, t - 1 \rangle$.
Solución

$$\begin{aligned} \lim_{t \to -1} \langle 2t^2 + 3, t - 1 \rangle &= \lim_{t \to -1} \left\langle \lim_{t \to -1} 2t^2 + 3, \lim_{t \to -1} t - 1 \right\rangle \\ \lim_{t \to -1} \langle 2t^2 + 3, t - 1 \rangle &= \langle 5, -2 \rangle \end{aligned}$$

Ejercicio 26.
Calcular $\lim\limits_{t \to 2} \left\langle \frac{1}{3} e^{t+2}, \frac{t^2+4}{t-2} \right\rangle$
Solución

$$\lim_{t \to 2} \left\langle \frac{1}{3} e^{t+1}, \frac{t^2+4}{t-2} \right\rangle = \left\langle \lim_{t \to 2} \frac{1}{3} e^{t+1}, \lim_{t \to 2} \frac{t^2+4}{t-2} \right\rangle$$

Calculando el límite de las componentes:

$$\lim_{t \to 2} \frac{1}{3} e^{t+1} = \frac{1}{3} e^3$$

$$\lim_{t \to 2} \frac{t^2+4}{t-2} \nexists$$

$$\therefore \lim_{t \to 2} \left\langle \frac{1}{3} e^{t+1}, \frac{t^2+4}{t-2} \right\rangle \nexists$$

Ejercicio 27.
Calcular $\lim\limits_{t \to 0} \left\langle \frac{\sin^2 t - 1}{1 + \cos 2t}, \frac{\cos t - 1}{\operatorname{tg} t} \right\rangle$.
Solución
Calculando el límite de las componentes:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin^2 t - 1}{1 + \cos 2t} = -\frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{t \to 0} \frac{\cos t - 1}{\operatorname{tg} t} = \frac{0}{0}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital para levantar la forma indeterminada:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\cos t - 1}{\operatorname{tg} t} = \lim_{t\to 0} \frac{-\sin t}{\sec^2 t}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\cos t - 1}{\operatorname{tg} t} = 0$$

$$\therefore \lim_{t\to 0} \left\langle \frac{\sin^2 t - 1}{1+\cos 2t}, \frac{\cos t - 1}{\operatorname{tg} t} \right\rangle = \left\langle -\frac{1}{2}, 0 \right\rangle$$

Ejercicio 28.
Calcular $\lim\limits_{t\to\pi} \left\langle \frac{\cos(t+\frac{\pi}{2})}{t}, \frac{1}{\csc(t+\frac{\pi}{2})}, \frac{4^{t-\pi}+1}{3^{t-\pi}+1} \right\rangle$.
Solución
Calculando el límite de cada componente:

$$\lim_{t\to\pi} \frac{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{t} = 0$$
$$\lim_{t\to\pi} \frac{1}{\csc\left(t+\frac{\pi}{2}\right)} = -1$$
$$\lim_{t\to\pi} \frac{4^{t-\pi}+1}{3^{t-\pi}+1} = 1$$

$$\therefore \lim_{t\to\pi} \left\langle \frac{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{t}, \frac{1}{\csc\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}, \frac{4^{t-\pi}+1}{3^{t-\pi}+1} \right\rangle = \langle 0, -1, 1 \rangle$$

Ejercicio 29.
Calcular $\lim\limits_{t\to 1} \left\langle \frac{\arcsin(t-1)}{e^{t-1}}, \frac{|1-t|}{t-1}, \frac{\cos\frac{\pi}{4}t}{t^2-2} \right\rangle$.
Solución
Calculando el límite de las componentes:

$$\lim_{t\to 1} \frac{\arcsin(t-1)}{e^t - 1} = 0$$
$$\lim_{t\to 1} \frac{|1-t|}{t-1}$$

Para calcular este límite, se debe utilizar el concepto de valor absoluto para resolverlo, así:

$$|1-t| = \begin{cases} 1-t; 1-t \geq 0 & (t \leq 1) \\ t-1; 1-t < 0 & (t > 1) \end{cases}$$

Entonces se calcula el límite a la izquierda y derecha de 1:

$$\lim_{t\to 1} \frac{|1-t|}{t-1} = \lim_{t\to 1^-} \frac{1-t}{t-1} = \frac{0}{0}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{t\to 1^-} \frac{1-t}{t-1} = \lim_{t\to 1^-} -1 = -1$$
$$\lim_{t\to 1} \frac{|1-t|}{t-1} = \lim_{t\to 1^+} \frac{t-1}{t-1} = \frac{0}{0}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{t\to 1^+} \frac{t-1}{t-1} = \lim_{t\to 1^+} 1 = 1$$

Como:

$$\lim_{t\to 1^-} \frac{|1-t|}{t-1} \neq \lim_{t\to 1^+} \frac{|1-t|}{t-1}$$

Entonces:
$$\lim_{t\to 1}\frac{|1-t|}{t-1}\ \nexists$$
Por lo que al no existir el límite de una de las componentes, se concluye que:
$$\lim_{t\to 1}\left\langle \frac{\arcsin(t-1)}{e^t-1}, \frac{|1-t|}{t-1'}\frac{\cos\frac{\pi}{4}t}{t^2-2}\right\rangle\ \nexists$$
Una función vectorial $\vec{f}(t)$ es continua en t_0 si :
$$\lim_{t\to 0}\vec{f}(t)=\vec{f}(t_0) \tag{1.5}$$
Una función vectorial $\vec{f}(t)$ es continua en un intervalo I si lo es en todos los puntos del intervalo (Edwards y Larson, 2017). Si $\vec{f}$ no cumple la condición de continuidad, se dice que es discontinua. Se habla de una discontinuidad esencial cuando $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t)\quad\nexists, y$ una discontinuidad evitable cuando $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t)\quad\exists$ pero no es igual a $\vec{f}(t_0)$.

Ejercicio 30.
Sea $\vec{f}(t)=\left\langle 2t+1, 1-t^2\right\rangle$.
Es $\vec{f}(t)$ continua en t=2 ?
Solución
1. $\vec{f}(2)=\langle 5,-3\rangle$
2. $\lim\limits_{t\to 2}\left\langle 2t+1,1-t^2\right\rangle=\langle 5,-3\rangle\ \exists$
3. $\lim\limits_{t\to 2}\left\langle 2t+1,1-t^2\right\rangle=\vec{f}(2)$

$\therefore \vec{f}(t)$ es continua en t=2

Otra forma de estudiar la continuidad en $t=2$, es a partir del dominio de $\vec{f}$, puesto que los posibles puntos de discontinuidad son aquellos que no son parte del dominio de $\vec{f}$, pero que sin embargo, la función existe alrededor de estos.
Entonces $D_{\vec{f}}=\mathbb{R}$, por lo que $\vec{f}$ es continua $\forall t\in\mathbb{R}$.

Ejercicio 31.
Sea $\vec{f}(t)=\begin{cases}\left\langle e^{t-2},\frac{1}{1+t^2}\right\rangle; t\neq 1\\ \langle 1,0\rangle; t=1\end{cases}$
Es $\vec{f}(t)$ continua en $t=1$?
Solución
1. $\vec{f}(1)=\langle 1,0\rangle$
2. $\lim\limits_{t\to 1}\left\langle e^{t-2},\frac{1}{1+t^2}\right\rangle=\left\langle\frac{1}{e},\frac{1}{2}\right\rangle$
3. $\lim\limits_{t\to 1}\vec{f}(t)\neq\vec{f}(1)$

$\therefore\ \vec{f}$ no es continua en $t=1$, presentando una discontinuidad evitable.

Para que la función se vuelva continua en $t=1$, se tiene que redefinir de la siguiente manera:
$$\vec{f}(t)=\begin{cases}\left\langle e^{t-2},\frac{1}{1+t^2}\right\rangle & ; t\neq 1\\ \left\langle\frac{1}{e},\frac{1}{2}\right\rangle & ; t=1\end{cases}$$

Ejercicio 32.
Sea $\vec{f}(t)=\begin{cases}\left\langle\frac{1-t}{\ln t^2},\frac{\cos\pi t+1}{t-1},\frac{e^t}{sh(z-1)}\right\rangle; t\neq 1\\ \langle -1,1,1\rangle; t=1\end{cases}$
Es $\vec{f}(t)$ continua en $t=1$?
Solución
1. $\vec{f}(1)=\langle -1,1,1\rangle$
2. $\lim\limits_{t\to 1}\left\langle\frac{1-t}{\ln t^2},\frac{\cos(\pi t+1)}{t-1},\frac{e^t}{sh(t-1)}\right\rangle\quad\nexists$

porque $\lim\limits_{t\to 1}\frac{e^t}{sh(1-t)}\quad\nexists$

$\therefore\ \vec{f}$ presenta una discontinuidad esencial en t=1

Ejercicio 33.
Es $\vec{f}(t)$ continua en $t = -1$? Si no lo es, que clase de discontiniudad presenta?
Trazar la gráfica de $\vec{f}$.

$$\vec{f}(t) = \left\langle t, \frac{1}{t+1} \right\rangle$$

Solución

$$D\vec{f} = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \Rightarrow t = -1 \text{ es un punto de discontinuidad.}$$

$$\lim_{t \to -1} \frac{1}{t+1} \nexists \Rightarrow \lim_{t \to -1} \vec{f}(t) \quad \nexists$$

$$\therefore \; \vec{f} \text{ presenta una discontinuidad esencial en t=-1}$$

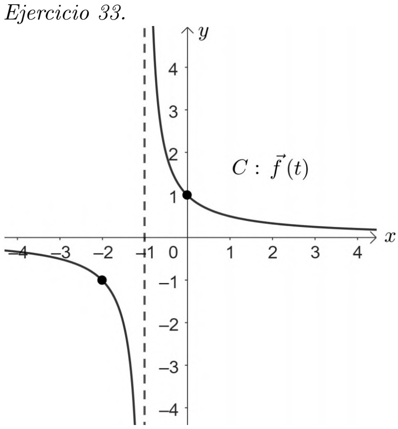
Al escribir $\vec{f}$ en forma paramétrica: $\quad C : \begin{cases} x = t \\ y = t + 1 \end{cases}$

Eliminando t en las ecuaciones paramétricas, se obtiene la siguiente ecuación cartesiana:

$$y = \frac{1}{x+1}$$

Cuya gráfica es:

Figura 1.17
Ejercicio 33.



Que corresponde también a la gráfica de $\vec{f}$ en todo su dominio.

Ejercicio 34.
Para la función $\vec{f}$ del ejercicio 33, determinar si es continua $\forall t \in [-2, 0]$.

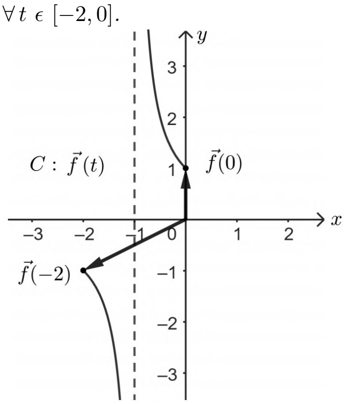
Solución

Como $t = -1 \in [-2; 0] \Rightarrow \vec{f}$ tiene una discontinuidad esencial en este punto.
Para la gráfica en el intervalo solicitado, tomamos la gráfica de $\vec{f}$ en todo su dominio y se lo reduce para los valores de t comprendidos entre -2 y 0, (ambos inclusive) tal como se ve en la Figura 1.18.

$$\vec{f}(-2) = \langle -2, -1 \rangle$$

$$\vec{f}(0) = \langle 0, 1 \rangle$$

Figura 1.18
$\forall t \in [-2, 0]$.



Ejercicio 35.
Es $\vec{f}(t)$ continua en $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi\right]$? Si no lo es, indicar que clase de discontinuidad presenta y trazarla gráfica en el intervalo dado.
Solución

$$\vec{f}(t) = \left\langle \cos t, \sec^2 t \right\rangle$$

$D\vec{f} = \mathbb{R}\,|\{\frac{\pi}{2} + K\pi\}$
$t = \frac{\pi}{2} \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi\right] \Rightarrow$ es un punto de discontinuidad.
Como $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}} \sec^2 t \quad \nexists \quad \Rightarrow \lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}} \vec{f}(t) \quad \nexists$

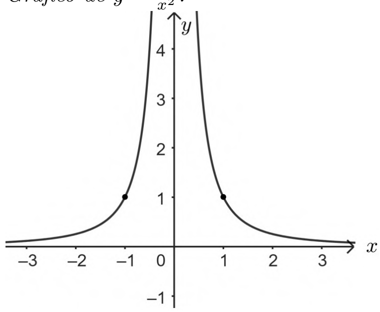
$\therefore$ en $t = \frac{\pi}{2}$ $\vec{f}$ presenta una discontinuidad esencial. Para graficar se escribe $\vec{f}$ en su forma paramétrica, así:

$$C : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sec^2 t \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{\cos^2 t} \Rightarrow y = \frac{1}{x^2} \text{ ec. cartesiana}$$

Cuya gráfica está en la Figura 1.19.

Figura 1.19

Gráfico de $y = \frac{1}{x^2}$.



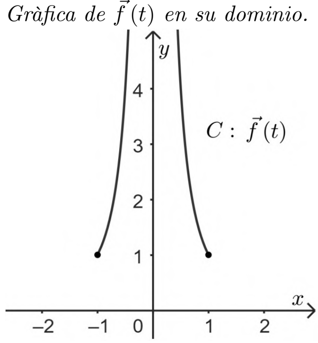
En este caso no todos los puntos de la gráfica de la ecuación cartesiana, corresponden a la gráfica de $\vec{f}$ en su dominio, debido a que:

$$C : \begin{cases} x = \cos t, \quad -1 \le \cos t \le 1 \quad \Rightarrow \quad x \in [-1; 1] \\ y = \sec^2 t, \quad -\infty < \sec t \le -1 \quad \vee \quad 1 \le \sec t < +\infty, \quad 1 \le \sec^2 t < +\infty. \quad \Rightarrow \quad y \in [1; +\infty[\end{cases}$$

Lo cual se observa en la Figura 1.20.

Figura 1.20

Gràfica de $\vec{f}(t)$ en su dominio.



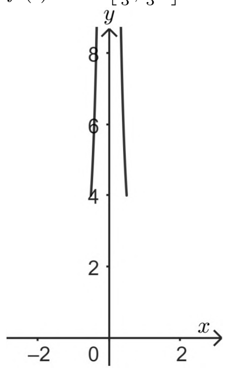
Ahora la gráfica $\forall\, t \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi\right]$ está en la Figura 1.21.

$$\vec{f}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left\langle \frac{1}{2}, 4 \right\rangle$$

$$\vec{f}\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \left\langle -\frac{1}{2}, 4 \right\rangle$$

Figura 1.21

$\vec{f}(t)\ \forall t \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi\right]$.



1.3. Derivadas

Sea $\vec{f}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto \vec{f}(t) = f_1(t)\vec{\imath} + f_2(t)\vec{\jmath}$$

Donde f_1 y f_2 son funciones derivables de t, entonces:

$$\vec{f}'(t) = f_1'(t)\vec{\imath} + f_2(t)\vec{\jmath} \tag{1.6}$$

Sea $\vec{f}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow R^3$ donde f_1, f_2 y f_3 son funciones derivables de t, entonces:

$$\vec{f}'(t) = f_1'(t)\vec{\imath} + f_2'(t)\vec{\jmath} + f_3'(t)\vec{k} \tag{1.7}$$

Geométricamente $\vec{f}'(t)$ es un vector tangente a la curva dada por $\vec{f}(t)$ y apunta en la dirección de los valores crecientes de t (Edwards y Larson, 2017).
Las funciones vectoriales, ecuaciones paramétricas, curvas y vectores permiten describir el movimiento de un objeto a lo largo de una curva C. Para el movimiento de un objeto a lo largo de una curva C en el espacio bidimensional:

$$\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{\imath} + f_2(t)\vec{\jmath} \quad \text{Vector posición} \tag{1.8}$$

$$\text{Velocidad } = \vec{v}(t) = \vec{f}'(t) = f_1'(t)\vec{\imath} + f_2'(t)\vec{k} \tag{1.9}$$

$$\text{Aceleración } = \vec{a}(t) = \vec{f}''(t) = f_1''(t)\vec{\imath} + f_2''(t)\vec{\jmath} \tag{1.10}$$

$$\text{Rapidez } = \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{\left[f_1(t)'\right]^2 + \left[f_2'(t)\right]^2} \tag{1.11}$$

Para el movimiento de un objeto a lo largo de una curva C en el espacio tridimensional:

$$\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{\imath} + f_2(t)\vec{\jmath} + f_3(t)\vec{k} \tag{1.12}$$

$$\text{Velocidad } = \vec{v}(t) = f_1'(t)\vec{\imath} + f_2'(t)\vec{\jmath} + f_3'(t)\vec{k} \tag{1.13}$$

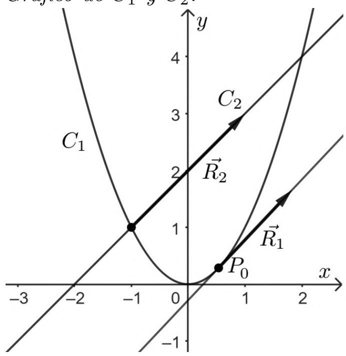
$$\text{Aceleración } = \vec{a}(t) = f_1''(t)\vec{\imath} + f_2''(t)\vec{\jmath} + f_3''(t)\vec{k} \tag{1.14}$$

$$\text{Rapidez } = \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{\left[f_1'(t)\right]^2 + \left[f_2'(t)\right]^2 + \left[f_3'(t)\right]^2} \tag{1.15}$$

Este modelo vectorial $\vec{f}(t)$ que sirve para representar el movimiento de un objeto a lo largo de C es importante porque se puede usar la primera y segundas derivadas de $\vec{f}(t)$ para hallar la velocidad y la aceleración del objeto (Edwards y Lanson, 2017).

Ejercicio 36.
¿En qué punto de la curva $C_1 : y = x^2$, la recta tangente es paralela a la recta $C_2 : \vec{g}\,(t) = \langle t-1, 2t\rangle$?
Solución
Graficando la curva C_1 y la C_2, como se muestra en la Figura 1.22:

Figura 1.22
Gráfico de C_1 y C_2.



$$\begin{aligned} C_1 :&\quad \vec{f}\,(t) = \langle t, t^2\rangle \Rightarrow \vec{f}'\,(t) = \langle 1, 2t\rangle \\ C_2 :&\quad \vec{g}\,(t) = \langle t-1, 2t\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{R_2} &= \langle 1, 2\rangle && (\text{ vector que da dirección a } C_2) \\ \vec{R_1} &= \vec{f}'\,(t_0) = \langle 1, 2t_0\rangle && (\text{ vector tangente a } C_1) \end{aligned}$$

$$\vec{R_1} \parallel \vec{R_2}$$

$$\begin{aligned} \langle 1, 2t_0\rangle &= \lambda\langle 1, 2\rangle \\ 1 &= \lambda \\ 2t_0 &= 2 \Rightarrow t_0 = 1 \end{aligned}$$

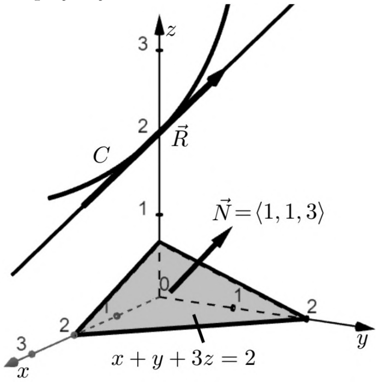
$$\begin{aligned} &\vec{f}\,(t_0) = \vec{f}(1) = \langle 1, 1\rangle \\ &\therefore P_{c_1}(1,1) \end{aligned}$$

Ejercicio 37.
Hallar si es que existen puntos (x, y, z) en la curva C en donde las rectas tangentes sean perpendiculares al plano $x + y + 3z = 2$

$$C : \begin{cases} y = x \\ z = x^3 \end{cases}$$

Solución
Se realiza un bosquejo de C y el plano dado, como se indica en la Figura 1.23:

Figura 1.23
Bosquejo ejercicio 37.



Donde $\vec{R}$ es el vector tangente a C y $\vec{N}$ la normal al plano, luego se procede a parametrizar la curva de la siguiente manera:

$$C : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t^3 \end{cases}$$

Escrita en forma vectorial es:

$$\vec{f}(t) = \langle t, t, t^3 \rangle$$
$$\vec{R} = \overrightarrow{f\prime}(t_0) = \langle 1, 1, 3{t_0}^2 \rangle$$
$$\vec{R} \parallel \vec{N}$$
$$\vec{R} = \lambda \vec{N}$$
$$\langle 1, 1, 3t_0^2 \rangle = \lambda \langle 1, 1, 3 \rangle$$
$$\begin{cases} 1 = \lambda \\ 1 = \lambda \\ 3t_0^2 = 3 \Rightarrow t_0 = \pm 1 \end{cases}$$
$$\therefore \quad \exists \quad P_1(1,1,1) \quad P_2(-1,-1,-1)$$

Ejercicio 38.
Una partícula se mueve siguiendo la trayectoria de la curva C descrita por $\vec{f}(t) = \langle 0, t, 4 - t^2 \rangle$ en el intervalo $[0; 2]$.
¿Se pregunta en qué punto (x, y, z) la partícula atraviesa el plano $y = 1$ y para qué valor de t? Trazar la gráfica de C.
Solución
La curva C escrita en forma paramétrica está dada por:

$$C : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 4 - t^2 \Rightarrow z = 4 - y^2 \end{cases}$$

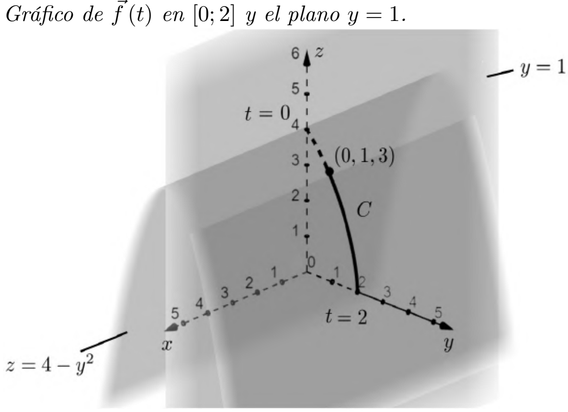
Por lo que la curva C está dada por la intersección de las superficies:

$$C : \begin{cases} x = 0 \\ z = 4 - y^2 \end{cases}$$

Cuya representación gráfica la observamos en la figura 1.24.

Figura 1.24

Gráfico de $\vec{f}(t)$ en $[0; 2]$ y el plano $y = 1$.



Por lo que para $y = 1$, $\quad z = 4 - 1^2 = 3$, $\quad x = 0$; entonces C, atraviesa el punto $y = 1$ en el plano $P(0, 1, 3)$. este punto se reemplaza en:

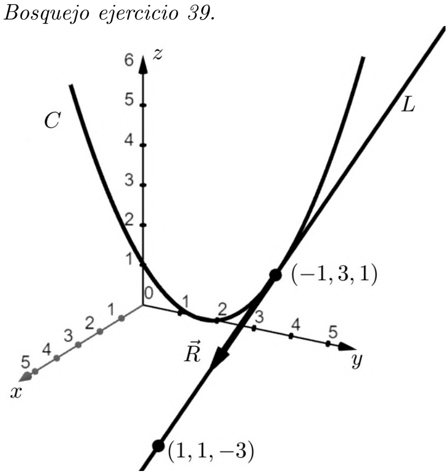
$$C : \begin{cases} 0 = 0 \\ 1 = t \\ 3 = 4 - t^2 \end{cases} \Rightarrow t = 1$$

Ejercicio 39.
Existe una recta que sea tangente en el punto $(-1,3,1)$ a la curva C y que pase por el punto $(1,1,-3)$?

$$C : \begin{cases} x+y=2 \\ z=x^2 \end{cases}$$

Solución
Se realiza un esquema de la cuva C y la recta tg como se muestra en la Figura 1.25:

Figura 1.25
Bosquejo ejercicio 39.



Parametrizando C :

$$C : \begin{cases} x=t \\ y=2-t \\ z=t^2 \end{cases}$$

$$\vec{f}(t)=\left\langle t, 2-t, t^2\right\rangle$$

$$\vec{f}'(t)=\langle 1,-1,2t\rangle$$

El valor de t para el punto $(-1,3,1)$ es:

$$C : \begin{cases} -1=t \\ 3=2-t \\ 1=t^2 \end{cases} \quad \Rightarrow t=-1$$

$$\vec{R}=\vec{f}'(-1)=\langle 1,-1,-2\rangle. \quad (\vec{R} \text{ vector tg a } C \text{ y da dirección a L})$$

La ecuación de la recta L es:

$$L : \begin{cases} x=-1+t \\ y=3-t \\ z=1-2t \end{cases}$$

Ahora, el punto $(1,1,-3)$ es parte de L ?
Si hallamos un único t en L para este punto, entonces se concluirá que la recta tangente L a C si pasa por el punto dado, así:

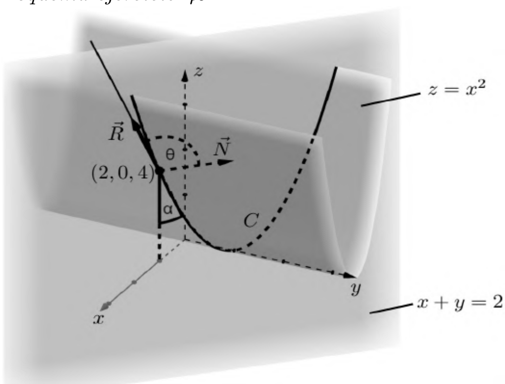
$$\begin{cases} 1=-1+t \\ 1=3-t \\ -3=1-2t \end{cases} \quad \Rightarrow t=2$$

Ejercicio 40.
¿Qué ángulo forma con el plano xz la tangente a la curva C en el punto $(2, 0, 4)$?

$$C : \begin{cases} z = x^2 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Solución
Se realiza un esquema de la curva C como se observa en la Figura 1.26:

Figura 1.26
Esquema ejercicio 40



La curva C se parametriza como:

$$C : \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = t^2 \end{cases}$$

Cuya función vectorial es:

$$\vec{f}\,(t) = \langle t, 2 - t, t^2 \rangle$$
$$\vec{f}'\,(t) = \langle 1, -1, 2t \rangle$$

El punto $(2, 0, 4)$ corresponde a:

$$\begin{cases} 2 = t \\ 0 = 2 - t \quad \Rightarrow \; t = 2 \\ 4 = t^2 \end{cases}$$

$$\vec{R} = \vec{f}'(2) = \langle 1, -1, 4 \rangle$$

Siendo $\vec{N}$ el vector nomal al plano xz:

$$\vec{N} = \langle 0, 1, 0 \rangle$$

Por lo que:

$$\cos\theta = \frac{\vec{R} \cdot \vec{N}}{\|\vec{R}\|\|\vec{N}\|}$$
$$\cos\theta = \frac{\langle 1, -1, 4 \rangle \cdot \langle 0, 1, 0 \rangle}{\sqrt{18}}$$
$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{18}}$$
$$\cos\theta \approx 103{,}7^\circ$$
$$\therefore \alpha = \theta - 90^\circ \approx 13{,}7^\circ$$

Ejercicio 41.
Hallar si es que existe al menos un punto (x, y, z) en la Curva C, en donde la recta tangente a C sea perpendicular al plano $y = 2$.

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 + 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$$

Solución
Las ecuaciones dadas no son fáciles de parametrizar, por lo que se va a buscar otras superficies cuya curva de intersección sea C:

$$C:\begin{cases} x^2+y^2+2z=0 \\ x^2+y^2+z^2=3 \end{cases}$$

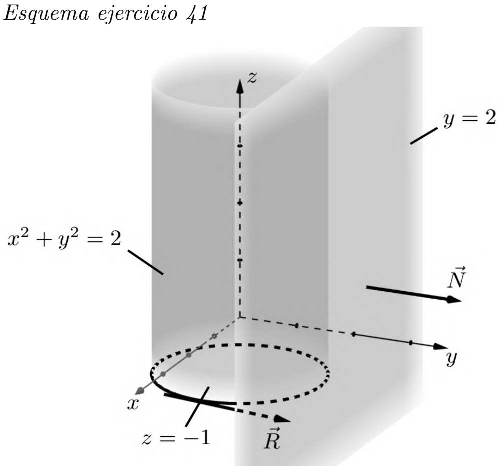
Restando la segunda de la primera:

$$\begin{aligned} 2z-z^2 &= -3 \\ z^2-2z-3 &= 0 \\ (z-3)(z+1) &= 0 \\ z=3 \quad ; &\quad z=-1 \end{aligned}$$

Con $z=3$ no es posible hallar la ecuación de otra superficie; con $z=-1 \Rightarrow x^2+y^2=2$ por lo que las dos nuevas superficies cuya curva de interseción es la curva C queda como lo representado en la Figura 1.27.

$$C:\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z=-1 \end{cases}$$

Figura 1.27
Esquema ejercicio 41



Se parametriza C como:

$$C:\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t \\ y=\sqrt{2}\sin t \\ z=-1 \end{cases}$$

$$\vec{f}\,(t)=\langle\sqrt{2}\cos t,\sqrt{2}\sin t,-1\rangle$$

$$\vec{f'}\,(t)=\langle-\sqrt{2}\sin t,\sqrt{2}\cos t,0\rangle$$

$$\vec{R}=\vec{f'}\,(t_0)=\left\langle-\sqrt{2}\sin t_0\sqrt{2}\cos t_0,0\right\rangle$$

$$\vec{R}\parallel\vec{N}$$

$$\vec{N}=\langle 0,1,0\rangle$$

$$\vec{R}=\lambda\vec{N}$$

$$\left\langle-\sqrt{2}\sin t_0,\sqrt{2}\cos t_0,0\right\rangle=\lambda\langle 0,1,0\rangle$$

$$\left\langle-\sqrt{2}\sin t_0,\sqrt{2}\cos t_0,0\right\rangle=\langle 0,\lambda,0\rangle$$

$$\begin{cases} -\sqrt{2}\sin t_0 = 0 & \Rightarrow\ t_0 = 0 \quad \text{(hay varias soluciones, se toma una)} \\ \sqrt{2}\cos t_0 = \lambda & \Rightarrow\ \lambda = \sqrt{2} \\ 0 = 0 & \end{cases}$$

$$\vec{f}(0) = \langle \sqrt{2}, 0, -1 \rangle$$

$\therefore$ el punto que cumple con las condiciones dadas es $P(\sqrt{2}, 0, -1)$.

Ejercicio 42.
Un misil sale de la ciudad A siguiendo la trayectoria descrita por $C_1 : \vec{f}(t) = \left\langle 2t^2 - 1, t^3, 3t \right\rangle \quad (t \geq 0)$, pero en un cierto t debe cambiar su trayectoria y seguir la de una recta que pasa por el punto $(9, 7, 9)$ con la finalidad de interceptar un misil que sale de la ciudad B siguiendo la trayectoria descrita por $C_2 : \vec{g}(t) = \langle t + 1, t + 7, t + 9 >$¿Cuál es el valor de t?
Solución
Sea t_1 : tiempo de intersección de C_3 (recta) con C_2
t_2 : tiempo de intersección de C_2 con C_3 (recta)
t_0: tiempo en el cual C_1 debe cambiar de trayectoria (recta).

$$C_1 : \vec{f}(t) = \left\langle 2t^2 - 1, t^3, 3t \right\rangle$$
$$\vec{f'}(t) = \left\langle 4t, 3t^2, 3 \right\rangle$$

Sea $\vec{R}$ el vector que es tangente a C_1 y va a dar dirección a la recta:

$$\vec{R} = \vec{f'}(t_0) = \left\langle 4t_0, 3t_0^2, 3 \right\rangle$$

La ecuación de la recta cuya dirección es $\vec{R}$ y pasa por el punto $(9, 7, 9)$ es:

$$C_3 : \begin{cases} x = 9 + 4t_0 \cdot t \\ y = 7 + 3t_0^2 t \\ z = 9 + 3t \end{cases}$$

$$C_3 : \vec{h}(t) = \left\langle 9 + 4t_0 \cdot t, 7 + 3t_0^2 t, 9 + 3t \right\rangle$$

Por lo que los t_1 y t_2 de interseción, de C_3 y C_2 con:

$$\vec{h}(t_1) = \vec{g}(t_2)$$
$$\left\langle 9 + 4t_0 t_1, 7 + 3t_0^2 t_1, 9 + 3t_1 \right\rangle = \langle t_2 + 1, t_2 + 7, t_2 + 9 \rangle$$

$$\begin{cases} 9 + 4t_0 t_1 = t_2 + 1 \\ 7 + 3t_0^2 t_1 = t_2 + 7 \\ 9 + 3t_1 = t_2 + 9 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

$$t_1 = 2\ ,\ t_2 = 6\ ,\ t_0 = 1$$

$\therefore$ El misil que sale de la ciudad A debe cambiar su trayactoria en $t = 1$

Ejercicio 43.
Una partícula se mueve siguiendo la trayectoria descrita por la curva $C : ky^2 - y - x = 0$¿ Cúal debe ser el valor de k para que $\vec{a}(1) = \langle 3, 0 \rangle$¿cuál es la velocidad en $t = 1$?
Solución
Se parametriza C como:

$$C : \quad x = ky^2 - y$$

$$C : \quad \begin{cases} x = kt^2 - t \\ y = t \end{cases}$$

$$\vec{f}(t) = \left\langle kt^2 - t, t \right\rangle$$
$$\vec{f'}(t) = \vec{v'}(t) = \langle 2kt - 1, 1 \rangle$$
$$\vec{f''}(t) = \vec{a'}(t) = \langle 2k, 0 \rangle$$

Se sabe que:
$$\vec{a}(1) = \langle 3, 0\rangle$$
$$\langle 3, 0\rangle = \langle 2k, 0\rangle$$
$$\begin{cases} 3 = 2k \\ 0 = 0 \end{cases}$$
$$\therefore\ k = \frac{3}{2}$$
$$\vec{v}\,(t) = \langle 3t - 1, 1\rangle$$
$$\vec{v}(1) = \langle 2, 1\rangle$$

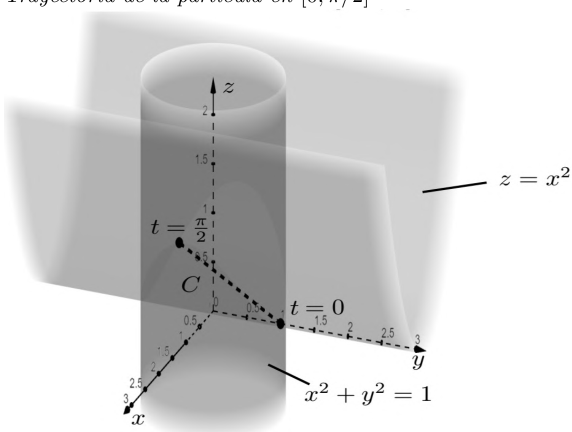
Ejercicio 44.
Sea el vector de posición, de una partícula en cualquier tiempo t dado por:
$$\vec{f}\,(t) = \left\langle \sin t, \cos t, \sin^2 t\right\rangle \qquad (t \geq 0)$$
a) Describa la forma geométrica de la trayectoria para $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

b) Hallar $\vec{v}\,(t)$, $\overrightarrow{a}\,(t)$ y la rapidez para $t = \frac{\pi}{3}$ si la distancia se mide en metros y el tiempo en segundos.

Solución
a) La función vectorial escrita en forma paramétrica:
$$C : \begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \\ z = \sin^2 t \end{cases}$$
Eliminando t :
$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = x^2 \end{cases}$$
La intersección de estas dos superficies es la curva C representada en la Figura 1.28.

Figura 1.28

Trayectoria de la partícula en $[0, \pi/2]$



b)
$$\vec{v}\,(t) = \vec{f}'\,(t) = \langle \cos t, -\sin t, \sin 2t\rangle$$
$$\vec{v}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left\langle \cos\frac{\pi}{3}, -\sin\frac{\pi}{3}, \sin\frac{2\pi}{3}\right\rangle$$
$$\vec{v}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\rangle$$
$$\vec{a}\,(t) = \vec{v}'\,(t) = \vec{f}''\,(t) = \langle -\sin t, -\cos t, 2\cos 2t\rangle$$
$$\vec{a}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left\langle -\sin\frac{\pi}{3}, -\cos\frac{\pi}{3}, 2\cos\frac{2}{3}\pi\right\rangle$$
$$\vec{a}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right\rangle$$

$$\text{rapidez } = \left\|\vec{v}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

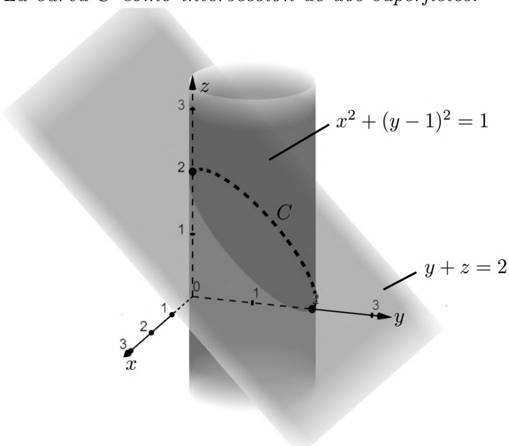
$$\text{rapidez } = \frac{\sqrt{7}}{2} \text{ m/seg.}$$

Ejercicio 45.
Una partícula se desplaza siguiendo la trayectoria de la curva C.Determinar ¿en qué punto de la trayectoria alcanza una rapidez de. $\sqrt{2}$ m/seg ? Representar la curva C.

$$C : \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ y + z = 2 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

Solución
Representando las superficies y la curva C en la Figura 1.29:

Figura 1.29
La curva C como intersección de dos superficies.



Parametrizando C :

$$C : \begin{cases} x = -\sqrt{2t - t^2} \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

Expresado en forma vectorial:

$$\vec{f}(t) = \left\langle -\sqrt{2t - t^2}, t, 2 - t \right\rangle$$

Hallando la velocidad:

$$\vec{v}(t) = \vec{f}'(t) = \left\langle \frac{t-1}{\sqrt{2t-t^2}}, 1, -1 \right\rangle$$

Ahora:

$$\text{Rapidez } = \|\vec{v}(t)\|$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{\frac{(t-1)^2}{2t-t^2} + 2}$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{\frac{t^2 - 2t + 1 + 4t - 2t^2}{2t - t^2}}$$

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\sqrt{\frac{1 + 2t - t^2}{2t - t^2}}\right)^2$$

$$2 = \frac{1 + 2t - t^2}{2t - t^2}$$

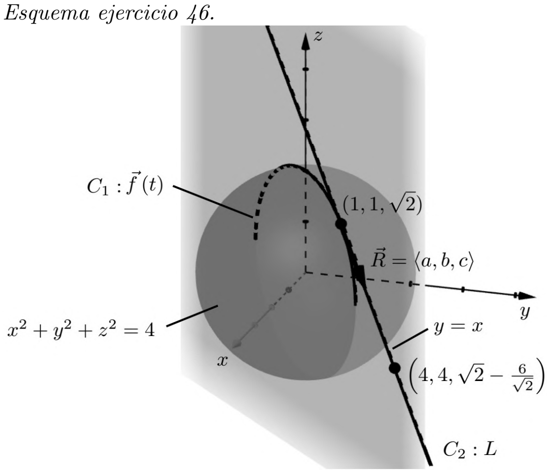
$$4t - 2t^2 = 1 + 2t - t^2$$
$$t^2 - 2t + 1 = 0$$
$$(t-1)^2 = 0$$
$$t = 1 \text{ seg.}$$

Ejercicio 46.
Un proyectil es disparado siguiendo la trayectoria de la curva C, dada por la intersección de las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 4 \wedge y = x (z \geq 0)$. En el punto $(1, 1, \sqrt{2})$ deja de actuar la aceleración normal y sale disparado por la tangente siguiendo una nueva trayectoria.
En estas condiciones, ¿es posible que el proyectil alcance un objetivo que está en el punto $\left(4, 4, \sqrt{2} - \frac{6}{\sqrt{2}}\right)$?.
Si alcanza el objetivo, cuál es la rapidez en unidades S.I?
Solución
Sea:

$$C_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ y = x \\ z \geq 0 \end{cases}$$

Cuya representación está dada en la Figura 1.30.

Figura 1.30
Esquema ejercicio 46.



Se procede a parametrizar C_1 como:

$$C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = \sqrt{4 - 2t^2} \end{cases}$$

Cuya forma vectorial es:

$$\vec{f}\,(t) = \left\langle t, t, \sqrt{4 - 2t^2} \right\rangle$$

Por lo que el vector tg a C_1 en $(1, 1, \sqrt{2})$ está dado por:

$$\vec{f'}\,(t) = \left\langle 1, 1, \frac{-2t}{\sqrt{4 - 2t^2}} \right\rangle$$

Al punto $(1, 1, \sqrt{2})$, le corresponde el t:

$$\begin{cases} 1 = t \\ l = t \\ \sqrt{2} = \sqrt{4 - 2t^2} \end{cases} \Rightarrow t = 1$$

$$\vec{R} = \vec{f'}(1) = \left\langle 1, 1, -\frac{2}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

Entonces la ecuación de C_2 (recta tangente a C_1 en $(1,1,\sqrt{2})$ es:

$$C_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}}t \end{cases}$$

Como el objetivo está en el punto $\left(4, 4, \sqrt{2} - \frac{6}{\sqrt{2}}\right)$, se debe verificar si este punto es parte de C_2 :

$$\begin{cases} 4 = 1 + t & \Rightarrow\ t = 3 \\ 4 = 1 + t & \Rightarrow\ t = 3 \\ \sqrt{2} - \frac{6}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}}t & \Rightarrow\ t = 3 \end{cases}$$

Entonces si es parte de C_2, por lo que el proyectil si alcanza el objetivo y lo hace con una rapidez de:

$$C_2 : \quad \vec{g}\,(t) = \left\langle 1 + t, 1 + t, \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}}t \right\rangle$$

$$\vec{v}\,(t) = g'\,(t) = \left\langle 1, 1, -\frac{2}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

$$\vec{v}(3) = \left\langle 1, 1, -\frac{2}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

$$\text{rapidez } = \|\vec{v}(3)\| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{3} \text{ m/seg.}$$

Ejercicio 47.

Un aeroplano de exhibición describe una curva C dada por:

$$\vec{f}\,(t) = \left\langle t^2 - 4t + 3, 6t - 8t^2 + 2t^3, \frac{1}{2}t^2 - 2t + \frac{11}{2} \right\rangle$$

Demostrar que este pasa dos veces por el punto $(0, 0, 4)$, e indicar en qué tiempo y a qué rapidez lo hace.

Solución

La forma paramétrica de C está dada por:

$$C : \begin{cases} x = t^2 - 4t + 3 \\ y = 6t - 8t^2 + 2t^3 \\ z = \frac{1}{2}t^2 - 2t + \frac{11}{2} \end{cases}$$

Al pasar por el punto $(0, 0, 4)$ se tiene:

$$\begin{cases} 0 = t^2 - 4t + 3 & \Rightarrow\ t = 1, t = 3 & \\ 0 = 6t - 8t^2 + 2t^3 & \Rightarrow\ 2t\left(t^2 - 4t + 3\right) & \Rightarrow\ t = 0,\ t = 1,\ t = 3 \\ 4 = \frac{1}{2}t^2 - 2t + \frac{11}{2} & \Rightarrow\ t^2 - 4t + 3 = 0 & \Rightarrow\ t = 1, t = 3 \end{cases}$$

Por lo que la primera vez el aeroplano pasa por el punto $(0, 0, 4)$ en $t = 1$ y a una rapidez de:

$$\vec{f}'\,(t) = \left\langle 2t - 4, 6 - 16t + 6t^2, t - 2 \right\rangle$$

$$\vec{v}(1) = \vec{f}'(1) = \langle -2, -4, -1 \rangle$$

$$\text{rapidez } = \|\vec{v}(1)\| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = 21 \text{ m/seg.}$$

La segunda vez el aeroplano pasa por el punto $(0, 0, 4)$ en $t = 3$ y a una rapidez de:

$$\vec{v}(3) = \vec{f}'(3) = \langle 2, 12, 1 \rangle$$

$$\text{rapidez } = \|\vec{v}(3)\| = \sqrt{(2)^2 + (12)^2 + (1)^2} = \sqrt{149} \text{ m/seg.}$$

1.4. Integral indefinida

Sea: $\vec{f}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto \vec{f}(t) = f_1(t)\,\vec{\imath} + f_2(t)\,\vec{\jmath}$$

Si $f(t), f_2(t)$ son continuas en I, entonces:

$$\int \vec{f}(t)\,dt = \vec{\imath}\int f_1(t)\,dt + \vec{\jmath}\int f_2(t)\,dt \tag{1.16}$$

$$\int \vec{f}(t)\,dt = \vec{Q}(t) + \vec{C} \tag{1.17}$$

Donde:

$$D_t[\vec{Q}(t)] = \vec{f}(t) \text{ y } \vec{C} \text{ es un vector constante arbitrario}$$

Sea: $\vec{f}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$t \mapsto \vec{f}(t) = f_1(t)\,\vec{\imath} + f_2(t)\,\vec{\jmath} + f_3(t)\,\vec{k}$$

Si $f_1(t), f_2(t)\, y f_3(t)$ son continuas en I, entonces:

$$\int \vec{f}(t)\,dt = \vec{\imath}\int f_1(t)\,dt + \vec{\jmath}\int f_2(t)\,dt + \vec{k}\int f_3(t)\,dt \tag{1.18}$$

$$\int \vec{f}(t)\,dt = \vec{R}(t) + \vec{C} \tag{1.19}$$

Donde.
$D_t[\vec{R}(t)] = \vec{f}(t)$ y $\vec{C}$ es un vector constante arbitrario.

La integral indefinida o antiderivada de una función vectorial es una familia de funciones vectoriales caracterizadas por el vector constante $\vec{C}$ (Edwards y larson, 2017).
En muchas aplicaciones se tiene los datos de velocidad y aceleración del objeto, con la ayuda de la integral indefinida se podrán hallan el vector de posición del objeto.

Ejercicio 48.
Calcular la integral indefinida:

$$\int \left\langle t\ln t, \frac{t^2}{t^2-1}\right\rangle dt$$

Solución

$$\int \left\langle t\ln t, \frac{t^2}{t^2-1}\right\rangle dt = \left\langle \int \ln t dt, \int \frac{t^2}{t^2-1} dt \right\rangle$$

Se calcula la integral indefinida, de cada componente:

$$\int t\ln t dt$$

$$u = \ln t \qquad \int dv = \int t\ dt$$

$$du = \frac{1}{t}\ dt \qquad v = \frac{t^2}{2}$$

$$\int t\ln t\ dt = \frac{t^2}{2}\ln t - \int \frac{t^2}{2}\cdot\frac{1}{t}\ dt$$

$$\int t\ln t\ dt = \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{1}{4}t^2 + C_1$$

$$\int \frac{t^2}{t^2-1}\ dt$$

$\dfrac{t^2}{t^2-1} = 1 + \dfrac{1}{t^2-1}$ expresada como la suma de un polinomio mas una fracción propia

$\dfrac{t^2}{t^2-1} = 1 + \dfrac{1}{(t-1)(t+1)}$

Descomponiendo en fracciones parciales:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(t-1)(t+1)} &= \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} \\
1 &= A(t+1) + B(t-1) \\
1 &= At + A + Bt - B \\
t: \quad 0 &= A + B \\
t^{\circ}: \quad 1 &= A - B \\
\hline
1 &= 2A \\
A &= \frac{1}{2}; B = -\frac{1}{2} \\
\frac{1}{(t-1)(t+1)} &= -\frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1).}
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\int \frac{t^2}{t^2-1}\,dt &= \int \left[1 + \frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)}\right] dt \\
\int \frac{t^2}{t^2-1}\,dt &= t + \frac{1}{2}\ln(t-1) - \frac{1}{2}\ln(t+1) + C_2 \\
\int \frac{t^2}{t^2-1}\,dt &= t + \frac{1}{2}[\ln(t-1) - \ln(t+1)] + C_2 \\
\int \frac{t^2}{t^2-1}\,dt &= t + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) + C_2
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\int \left\langle \ln t, \frac{t^2}{t^2-1} \right\rangle dt = \left\langle \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{1}{4}t^2, t + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-1}{z+1}\right) \right\rangle + \vec{C}$$

Ejercicio 49.
Calcular la integral indefinida:

$$\int \left\langle \cos^2 t, \frac{1}{\sqrt{t}+1}, \frac{1}{2-t} \right\rangle dt$$

Solución

$$\int \left\langle \cos^2 t, \frac{1}{\sqrt{t}+1}, \frac{1}{2-t} \right\rangle dt = \left\langle \int \cos^2 t dt, \int \frac{dt}{\sqrt{t}+1}, \int \frac{1}{2-t}\,dt \right\rangle$$

Se halla la integral indefinida de cada componente:

$$\begin{aligned}
\int \cos^2 t\,dt &= \int \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt \\
\int \cos^2 t\,dt &= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)dt \\
\int \cos^2 t\,dt &= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C_1 \\
\int \cos^2 t\,dt &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C_1
\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}+1} dt$$

$$\begin{aligned}
t &= u^2 \ , \ dt = 2udu \\
\sqrt{t} &= u
\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}+1}dt = \int \frac{2u}{u+1}du$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{t}+1}dt = 2\int \frac{u+1-1}{u+1}du$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{2}+1}dt = 2\int \left(\frac{u+1}{u+1} - \frac{1}{u+1}\right) du$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{t}+1}dt = 2\int \left(1 - \frac{1}{u+1}\right) du$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{t}+1}dt = 2[u - \ln(u+1)] + C_2$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{t}+1}dt = 2[\sqrt{t} - \ln(\sqrt{t}+1)] + C_2$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{t}+1}dt = 2\sqrt{t} - 2\ln(\sqrt{t}+1) + C_2$$
$$\int \frac{1}{2-t}dt = -\ln(2-t) + C_3$$

Por lo tanto:

$$\int \left\langle \cos^2 t, \frac{1}{\sqrt{t}+1}, \frac{1}{2-t} \right\rangle dt = \left\langle \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t \ , \ 2\sqrt{t} - 2\ln(\sqrt{t}+1) \ , \ -\ln(2-t) \right\rangle + \vec{C}$$

Ejercicio 50.
Calcular la integral indefinida:

$$\int \left\langle te^{t^2}, \frac{4}{t^2+1}, \sin t e^{\cos t} \right\rangle dt$$

Solución

$$\int \left\langle te^{t^2}, \frac{4}{t^2+1}, \sin t e^{\cos t} \right\rangle dt = \left\langle \int te^{t^2} dt, \int \frac{4}{t^2+1}dt, \int \sin t e^{\cos t} dt \right\rangle$$

Se halla las integrales indefinidas de cada componente:

$$\int te^{t^2}\, dt$$
$$u = t^2 \ , \ du = 2t\, dt$$
$$\int te^{t^2}\, dt = \frac{1}{2}\int e^u \, du$$
$$\int te^{t^2}\, dt = \frac{1}{2}e^u + C_1$$
$$\int te^{t^2}\, dt = \frac{1}{2}e^{t^2} + C_1$$
$$\int \frac{4}{t^2+1}\, dt$$
$$\int \frac{4}{t^2+1}\, dt = 4\operatorname{arc\,tg} t + C_2$$
$$\int \sin t e^{\cos t}\, dt$$
$$u = \cos t \ , \ du = -\sin t\, dt$$
$$\int \sin t e^{\cos t}\, dt = -e^u + C_3$$
$$\int \sin t e^{\cos t}\, dt = -e^{\cos t} + C_3$$

Por lo tanto:

$$\int \left\langle te^{t^2}, \frac{4}{t^2+1}, \sin t e^{\cos t} \right\rangle dt = \left\langle \frac{1}{2}e^{t^2} \ , \ 4 \operatorname{arc\,tg} t \ , \ -e^{\cos t} \right\rangle + \vec{C}$$

Ejercicio 51.
Hallar $\vec{f}$, sabiendo que su derivada está dada por $\vec{F}(t) = \left\langle 2t, \frac{1}{t+1} \right\rangle$ y $\vec{f}(0) = \langle -1, 1 \rangle$.
Solución

$$\vec{f}(t) = \int \vec{F}(t)\, dt$$
$$\vec{f}(t) = \int \left\langle 2t, \frac{1}{t+1} \right\rangle dt$$
$$\vec{f}(t) = \left\langle \int 2tdt, \int \frac{1}{t+1} dt \right\rangle$$
$$\vec{f}(t) = \left\langle t^2 + C_1, \ln(t+1) + C_2 \right\rangle$$

Calculando:

$$\vec{f}(0) = \left\langle 0^2 + C_1, \ln(0+1) + C_2 \right\rangle$$
$$\vec{f}(0) = \langle C_1, C_2 \rangle$$
$$\vec{f}(0) = \langle -1, 1 \rangle$$
$$\langle -1, 1 \rangle = \langle C_1, C_2 \rangle$$
$$-1 = C_1$$
$$1 = C_2$$

Por lo tanto la función vectorial pedida es:

$$\vec{f}(t) = \left\langle t^2 - 1, \ln(t+1) + 1 \right\rangle$$

Ejercicio 52.
Hallar $\vec{f}(t)$, sabiendo que su derivada está dada por $\vec{F}(t) = \langle\ \cos t\ , -e^t, sh^2 t cht \rangle$ y $\vec{f}(0) = \langle 1, -1, 1 \rangle$
Solución

$$\vec{f}(t) = \int \vec{F}(t)\, dt$$
$$\vec{f}(t) = \int \left\langle \cos t, -e^t, sh^2 t\, cht \right\rangle dt$$
$$\vec{f}(t) = \left\langle \int \cos t dt, \int -e^t dt, \int sh^2 t\, cht\, dt \right\rangle$$

Las integrales indefinidas de las componentes están dadas por:

$$\int \cos t dt = -\sin t + C_1$$
$$\int -e^t dt = -e^t + C_2$$
$$\int sh^2 t\, cht\, dt$$
$$u = sht, du = cht\, dt$$
$$\int sh^2 t\, cht\, dt = \int u^2 du$$
$$\int sh^2 t\, cht\, dt = \frac{1}{3}u^3 + C_3$$
$$\int sh^2 t\, cht\, dt = \frac{1}{3}sh^3 t + C_3$$

Por lo que:

$$\vec{f}(t) = \left\langle \sin t + C_1, -e^t + C_2, \frac{1}{3}sh^3 t + C_3 \right\rangle$$

Calculando:

$$\vec{f}(0) = \left\langle \sin(0) + C_1, -e^0 + C_2, \frac{1}{3}(\ \mathrm{sh}(0)\ )^3 + C_3 \right\rangle$$
$$\vec{f}(0) = \langle C_1, -1 + C_2, C_3 \rangle$$
$$\vec{f}(0) = \langle 1, -1, 1 \rangle$$
$$\langle 1, -1, 1 \rangle = \langle C_1, -1 + C_2, C_3 \rangle$$
$$\begin{cases} 1 = C_1 & \Rightarrow C_1 = 1 \\ -1 = -1 + C_2 & \Rightarrow C_2 = 0 \\ 1 = C_3 & \Rightarrow C_3 = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto la función vectorial pedida es:

$$\vec{f}(t) = \left\langle \sin t + 1, -e^t, \frac{1}{3} sh^3 t + 1 \right\rangle$$

Ejercicio 53.
La velocidad, de una partícula que describe una curva C está dada por $\vec{v}(t) = \vec{\imath} + 2t\vec{\jmath}$. Si la partícula se encuentra en el punto $(2, 0)$ en $t = 1$, hallar la función vectorial de la curva C y representarla gráficamente.
Solución

$$\vec{f}(t) = \int \vec{v}(t)\, dt$$
$$\vec{f}(t) = \int \langle 1, 2t \rangle dt$$
$$\vec{f}(t) = \left\langle t + C_1, t^2 + C_2 \right\rangle$$
$$\vec{f}(1) = \langle 1 + C_1, 1 + C_2 \rangle$$
$$\vec{f}(1) = \langle 2, 0 \rangle$$
$$\langle 2, 0 \rangle = \langle 1 + C_1, 1 + C_2 \rangle$$
$$\begin{cases} 2 = 1 + C_1 & \Rightarrow C_1 = 1 \\ 0 = 1 + C_2 & \Rightarrow C_2 = -1 \end{cases}$$

Por lo que la ecuación, de la trayectoria (curva C) está dada por:

$$\vec{f}(t) = \left\langle t + 1, t^2 - 1 \right\rangle. \quad (t \geqslant 0)$$

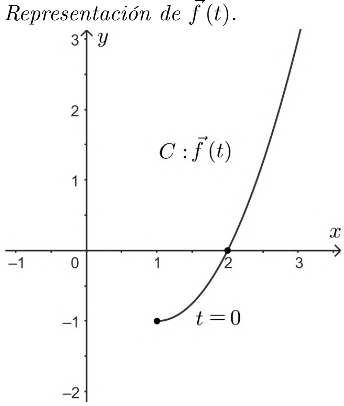
Para representar gráficamente C, se procede a hallar la ecuación cartesiana a partir de las ecuaciones paramétricas:

$$C : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow y = (x - 1)^2 - 1$$

Cuya representación está en la Figura 1.31.

Figura 1.31

Representación de $\vec{f}(t)$.



Ejercicio 54.
Una partícula sigue la trayectoria de la curva C descrita por la función vectorial $\vec{f}(t)$, hallar dicha función, sabiendo que $\vec{v}(t) = \langle -\text{ sint, cost, sint } \rangle, \vec{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \langle 1, 1, 0 \rangle$. Además identificar y representar las superficies sobre las cuales está la trayectoria y trazar la gráfica de la misma.
Solución

$$\vec{f}(t) = \int \vec{v}(t)\, dt$$

$$\vec{f}(t) = \int \langle -\sin t, \cos t, \sin t \rangle dt$$

$$\vec{f}(t) = \left\langle \int -\sin t dt, \int \cos t dt, \int \sin t dt \right\rangle$$

$$\vec{f}(t) = \langle \cos t + C_1, \sin t + C_2, -\cos t + C_3 \rangle$$

$$\vec{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \langle C_1, 1 + C_2, C_3 \rangle$$

$$\langle 1, 1, 0 \rangle = \langle C_1, 1 + C_2, C_3 \rangle$$

$$C_1 = 1$$

$$C_2 = 0$$

$$C_3 = 0$$

Por lo que la función vectorial $\vec{f}(t)$ está dada por:

$$\vec{f}(t) = \langle \cos t + 1, \sin t, -\cos t \rangle$$

Para representar la curva C se va a escribir las ecuaciones paramétricas de C, obteniendo las ecuaciones cartesianas, de dos superficies, cuya intersección es la curva C.

$$C : \begin{cases} x = \cos t + 1 \\ y = \sin t \\ z = -\cos t. \end{cases}$$

Eliminando t en x e y:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

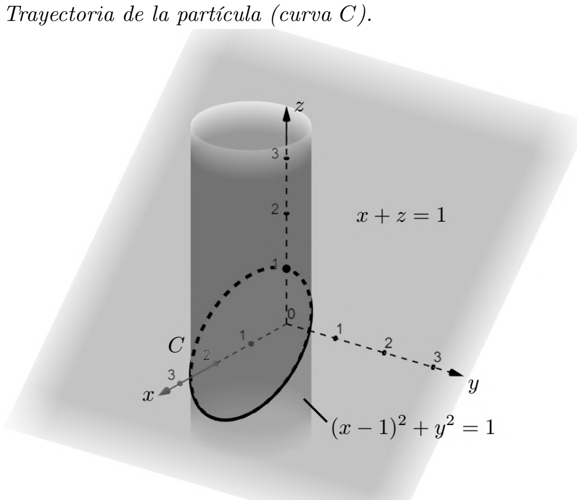
Eliminando t en y e z:

$$x + z = 1$$

$$C : \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 & \text{cilindro circular recto} \\ x + z = 1 & \text{plano } \perp \text{ al plano } xz \end{cases}$$

Su representación gráfica está en la Figura 1.32.

Figura 1.32
Trayectoria de la partícula (curva C).



Ejercicio 55.
Una partícula sigue la trayectoria de la curva C descrita por una función vectorial $\vec{f}(t)$, sabiendo que $\vec{a}(t) = e^t\vec{\imath}$, $\vec{v}(0) = \vec{\imath}$, $\vec{f}(0) = \vec{\imath}$:
a) Hallar $\vec{f}(t)$
b) Trazar la gráfica de C
Solución
a)

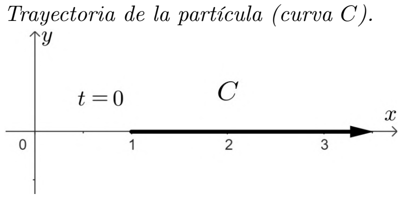
$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)\,dt$$
$$\vec{v}(t) = \int \left\langle e^t, 0\right\rangle dt$$
$$\vec{v}(t) = \left\langle e^t + C_1, C_2\right\rangle$$
$$\vec{v}(0) = \left\langle e^0 + C_1, C_2\right\rangle$$
$$\vec{v}(0) = \langle 1 + C_1, C_2\rangle$$
$$\vec{v}(0) = \langle 1, 0\rangle$$
$$\langle 1, 0\rangle = \langle 1 + C_1, C_2\rangle$$
$$\begin{cases} 1 = 1 + C_1 & \Rightarrow C_1 = 0 \\ 0 = C_2 & \Rightarrow C_2 = 0 \end{cases}$$
$$\vec{v}(t) = \left\langle e^t, 0\right\rangle$$
$$\vec{f}(t) = \int \vec{v}(t)\,dt$$
$$\vec{f}(t) = \int \left\langle e^t, 0\right\rangle dt$$
$$\vec{f}(t) = \left\langle e^t + C_3, C_4\right\rangle$$
$$\vec{f}(0) = \left\langle e^0 + C_3, C_4\right\rangle = \langle 1 + C_3, C_4\rangle$$
$$\vec{f}(0) = \langle 1, 0\rangle$$
$$\langle 1, 0\rangle = \langle 1 + C_3, C_4\rangle$$
$$\begin{cases} 1 = 1 + C_3 & \Rightarrow C_3 = 0 \\ 0 = C_4 & \Rightarrow C_4 = 0 \end{cases}$$
$$\vec{f}(t) = \left\langle e^t, 0\right\rangle. \quad (t \geqslant 0)$$

b) Escribiendo las ecuaciones paramétricas, de C :

$$C : \begin{cases} x = e^t \\ y = 0 \end{cases}$$

Por lo que la gráfica de C está dada en la Figura 1.33.

Figura 1.33
Trayectoria de la partícula (curva C).



Ejercicio 56.
Una partícula se mueve siguiendo la trayectoria de la curva C descrita por la función vectorial $\vec{f}(t)$, hallar dicha función si se sabe que $\vec{a}(t) = -4\vec{k}, \vec{v}(1) = \vec{\imath} - \vec{\jmath} - 4\vec{k}, \vec{f}(0) = 5\vec{k}$; identificar y reprentar las superficies sobre las cuales está la trayectoria y trazar la curva C.
Solución

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)\,dt$$

$$\begin{aligned}
\vec{v}\,(t) &= \int \langle 0,0,-4\rangle dt\\
\vec{v}\,(t) &= \langle C_1, C_2, -4t + C_3\rangle\\
\vec{v}(1) &= \langle C_1, C_2, -4 + C_3\rangle\\
\vec{v}(1) &= \langle 1,-1,-4\rangle\\
&\langle 1,-1,-4\rangle = \langle C_1, C_2, -4 + C_3\rangle\\
&\qquad C_1 = 1\\
&\qquad C_2 = -1\\
&\qquad C_3 = 0\\
\vec{v}\,(t) &= \langle 1,-1,-4t\rangle\\
\vec{f}\,(t) &= \int \vec{v}\,(t)\,dt\\
\vec{f}\,(t) &= \int \langle 1,-1,-4t\rangle dt\\
\vec{f}\,(t) &= \left\langle t + C_4, -t + C_5, -2t^2 + C_6\right\rangle\\
\vec{f}(0) &= \langle C_4, C_5, C_6\rangle\\
\vec{f}(0) &= \langle 0,0,5\rangle\\
&\langle 0,0,5\rangle = \langle C_4, C_5, C_6\rangle\\
&\qquad C_4 = C_5 = 0\\
&\qquad C_6 = 5
\end{aligned}$$

Por lo que la función vectorial pedida es:

$$\vec{f}\,(t) = \left\langle t, -t, -2t^2 + 5\right\rangle$$

Escribiendo las ecuaciones paramétricas:

$$C : \begin{cases} x = t\\ y = -t\\ z = 5 - 2t^2 \end{cases}$$

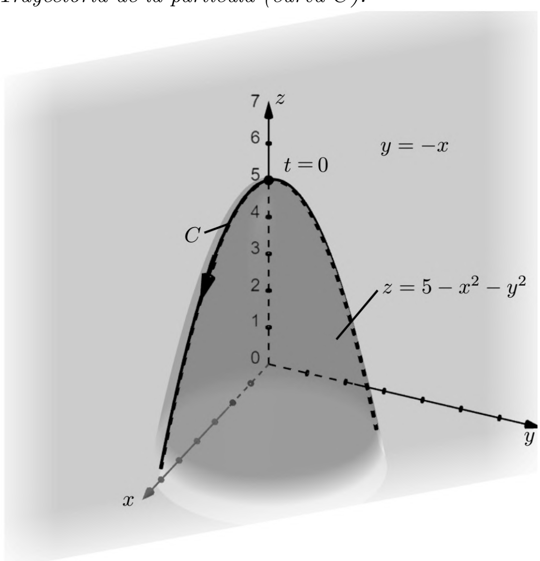
Eliminando t :

$$C : \begin{cases} y = -x & \text{plano } \perp \text{ al plano coordenado } xy\\ z = 5 - x^2 - y^2 & \text{paraboloide.} \end{cases}$$

La gráfica de C se muestra en la Figura 1.34.

Figura 1.34

Trayectoria de la partícula (curva C).



Ejercicio 57.

Hallar una función vectorial que describa la trayectoria de una partícula cuya aceleración en cualquier t esté dado por $\vec{a}\,(t) = \left\langle 3t^2 - 1, 0, 0\right\rangle$. Se sabe que inicia su movimiento en el origen; en t = 1seg. la rapidez es de $3\sqrt{2}$ m/seg. y las componentes de la velocidad en y e z son iguales y la componente de la velocidad en x es el doble de la componente de la velocidad en y.

Solución

$$\begin{aligned}
\vec{v}\,(t) &= \int \vec{a}\,(t)\,dt \\
\vec{v}\,(t) &= \int \left\langle 3t^2 - 1, 0, 0\right\rangle dt \\
\vec{v}\,(t) &= \left\langle t^3 - t + C_1, C_2, C_3\right\rangle dt \\
\vec{v}(1) &= \langle C_1, C_2, C_3\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{rapidez } &= \|\vec{v}(1)\| \\
\text{rapidez } &= \sqrt{{C_1}^2 + {C_2}^2 + {C_3}^2}
\end{aligned}$$

$$\sqrt{{C_1}^2 + {C_2}^2 + {C_3}^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} {C_1}^2 + {C_2}^2 + {C_3}^2 = 18 \\ C_2 = C_3 \\ C_1 = 2C_2 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
(2C_2)^2 + {C_2}^2 + {C_2}^2 &= 18 \\
6{C_2}^2 &= 18 \\
{C_2}^2 &= 3 \\
C_2 &= \sqrt{3} \\
C_3 &= \sqrt{3} \\
C_1 &= 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Por lo que la ecuación de la velocidad es:

$$\vec{v}\,(t) = \left\langle t^3 - t + 2\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}\right\rangle$$

Como:

$$\begin{aligned}
\vec{f}\,(t) &= \int \vec{v}\,(t)\,dt \\
\vec{f}\,(t) &= \int \left\langle t^3 - t + 2\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}\right\rangle dt \\
\vec{f}\,(t) &= \left\langle \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + 2\sqrt{3}t + C_4, \sqrt{3}t + C_5, \sqrt{3}t + C_6\right\rangle
\end{aligned}$$

Como parte del origen:

$$\begin{aligned}
\vec{f}(0) &= \langle 0, 0, 0\rangle \\
\vec{f}(0) &= \langle C_4, C_5, C_6\rangle \\
\langle 0, 0, 0\rangle &= \langle C_4 C_5, C_0\rangle \\
C_4 = C_5 &= C_6 = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto la función vectorial que describe la trayectoria de la partícula es:

$$\vec{f}\,(t) = \left\langle \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + 2\sqrt{3}t, \sqrt{3}t, \sqrt{3}t\right\rangle \quad (t \geqslant 0)$$

1.5. Integral definida

Sea $\quad \vec{f}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto \vec{f}(t) = f_1(t)\,\vec{\imath} + f_2(t)\,\vec{\jmath}$$

$$\int_a^b \vec{f}(t)\,dt = \vec{\imath}\int_a^b f_1(t)\,dt + \vec{\jmath}\int_a^b f_2(t)\,dt \tag{1.20}$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo:

$$\int_a^b \vec{f}(t)\,dt = \vec{Q}(t)\Big|_a^b = \vec{Q}(b) - \vec{Q}(a) \tag{1.21}$$

Donde $\vec{Q}$ es la antiderivada de $\vec{f}$

Sea $\quad \vec{f}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$t \mapsto \vec{f}(t) = f_1(t)\,\vec{\imath} + f_2(t)\,\vec{\jmath} + f_3(t)\,\vec{k}$$

$$\int_a^b \vec{f}(t)\,dt = \vec{\imath}\int_a^b f_1(t)\,dt + \vec{\jmath}\int_a^b f_2(t)\,dt + \vec{k}\int_a^b f_3(t)\,dt \tag{1.22}$$

Aplicando al teorema fundamental del cálculo:

$$\int_a^b \vec{f}(t)\,dt = \vec{R}(t)\Big|_a^b = \vec{R}(b) - \vec{R}(a) \tag{1.23}$$

Donde $\vec{R}$ es la antiderivada de $\vec{f}$

Sea C una curva descrita por $\vec{f}(t)$, suponiendo que las primeras derivadas de los componentes son continuas en $a \leq t \leq b$. Entonces si L es la longitud del arco de C de a hasta b (Stewart, 2012).

Para curvas en el espacio bidimensional:

$$L = \int_a^b \left\|\vec{f}'(t)\right\| dt = \int_a^b \sqrt{\left[f_1'(t)\right]^2 + \left[f_2'(t)\right]}\,dt \tag{1.24}$$

Para curvas en el espacio tridimensional:

$$L = \int_a^b \|\vec{f}'(t)\|dt = \int_a^b \sqrt{\left[f_1'(t)\right]^2 + \left[f_2'(t)\right]^2 + \left[f_3'(t)\right]^2}dt \tag{1.25}$$

Ejercicio 58.
Calcular la integral definida:

$$\int_0^1 \left\langle e^t, 2\right\rangle dt$$

Solución

$$\int_0^1 \left\langle e^{2t}, \ln(2-t)\right\rangle dt = \left\langle \int_0^1 e^{2t}dt, \int_0^1 \ln(2-t)dt \right\rangle$$

Se procede a calcular la integral definida de cada componente:

$$\int_0^1 e^{2t}dt$$

$$u = 2t, \quad du = 2dt$$

$$\int e^{2t}dt = \frac{1}{2}\int e^{u}du$$
$$\int e^{2t}dt = \frac{1}{2}e^{u}$$
$$\int e^{2t}dt = \frac{1}{2}e^{2t}$$
$$\int_0^1 e^{2t}dt = \left.\frac{1}{2}e^{2t}\right|_0^1$$
$$\int_0^1 e^{2t}dt = \frac{1}{2}\left(e^{2} - e^{0}\right)$$
$$\int_0^1 e^{2t}dt = \frac{1}{2}\left(e^{2} - 1\right)$$

$$\int_0^1 \ln(2-t)dt$$
$$u = 2-t\ ,\ \ du = -dt$$
$$\int \ln(2-t) = -\int \ln u du$$

$$\mathrm{w} = \ln u \qquad \int dv = \int du$$
$$d\mathrm{w} = \frac{1}{u}du \qquad v = u$$

$$\int \ln(2-t)dt = -\left(u\ln u - \int du\right)$$
$$\int \ln(2-t)dt = -u\ln u + u$$
$$\int \ln(2-t)dt = -(2-t)\ln(2-t) + (2-t)$$
$$\int \ln(2-t)dt = (2-t)(1-\ln(2-t))$$
$$\int_0^1 \ln(2-t)dt = \left.(2-t)[1-\ln(2-t)]\right|_0^1$$
$$\int_0^1 \ln(2-t)dt = 2\ln 2 - 1$$

Por lo tanto:
$$\int_0^1 \left\langle e^{2t}, \ln(2-t)\right\rangle dt = \left\langle \frac{1}{2}\left(e^{2}-1\right), 2\ln 2 - 1\right\rangle$$

Ejercicio 59.
Calcular la integral definida:
$$\int_0^2 \left\langle |t-1|, \frac{1}{t+1}\right\rangle dt$$

Solución
$$\int_0^2 \left\langle |t-1|, \frac{1}{t+1}\right\rangle dt = \left\langle \int_0^2 |t-1|dt, \int_0^2 \frac{1}{t+1}dt\right\rangle$$

Calculando la integral definida de cada componente:
$$\int_0^2 |t-1|dt$$
$$|t-1| = \begin{cases} t-1; & t-1 \geq 0, \quad t \geq 1 \\ 1-t; & t-1 < 0, \quad t < 1 \end{cases}$$

$$\int_0^2 |t-1|dt = \int_0^1 (1-t)dt + \int_1^2 (t-1)dt$$
$$\int_0^2 |t-1|dt = \left(t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{t^2}{2} - t\right)\Big|_1^2$$
$$\int_0^2 |t-1|dt = 1$$
$$\int_0^2 \frac{1}{t+1}dt = \ln(t+1)|_0^2$$
$$\int_0^2 \frac{1}{t+1}dt = \ln 3$$

Por lo tanto la integral definida es:

$$\int_0^2 \left\langle |t-1|, \frac{1}{t+1} \right\rangle dt = \langle 1, \ln 3 \rangle$$

Ejercicio 60.
Calcular la integral definida.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \langle 2 \operatorname{ctg} t, 4\cos^2 t \sin t \rangle \, dt$$

Solución

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \langle 2 \operatorname{ctg} t, 4\cos^2 t \sin t \rangle \, dt = \left\langle \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \operatorname{ctg} t dt, \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t \sin t dt \right\rangle$$

Hallando la integral definida de cada componente:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \operatorname{ctg} t dt$$
$$\int 2 \operatorname{ctg} t dt = 2 \int \frac{\cos t}{\sin t} dt$$
$$u = \sin t, \quad du = \cos t dt$$
$$\int 2 \operatorname{ctg} t dt = 2 \int \frac{du}{u}$$
$$\int 2 \operatorname{ctg} t dt = 2 \ln u$$
$$\int 2 \operatorname{ctg} t dt = 2 \ln \sin t$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} 2 \operatorname{ctg} t \, dt = 2 \ln(\sin t)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}$$
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \operatorname{ctg} t dt = 2 \left(\ln 1 - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \operatorname{ctg} t dt = -2 \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t \sin t dt$$
$$\int 4\cos^2 t \sin t dt = 4 \int \cos^2 t \sin t dt$$
$$u = cos\,(t)\,, du = -sin\,(t)\, dt$$

$$\int 4\cos^2 t \sin t dt = -4\int u^2 du$$
$$\int 4\cos^2 t \sin t dt = -\frac{4}{3}u^3$$
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t \sin t dt = -\frac{4}{3}\cos^3 t$$
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t \sin t dt = -\frac{4}{3}\cos^3 t|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t \sin t dt = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Por lo tanto:
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \langle 2\operatorname{ctg} t, 4\cos^2 t\sin t\rangle\, dt = \left\langle -2\ln\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right\rangle$$

Ejercicio 61.
Calcular la siguiente integral definida:
$$\int_2^3 \left\langle \frac{1}{t^2-t}, t\sqrt{t^2+3}, \frac{t}{t^2+2}\right\rangle dt$$

Solución
$$\left\langle \int_2^3 \frac{1}{t^2-t}, t\sqrt{t^2+3}, \frac{t}{t^2+2}\right\rangle dt = \left\langle \int_2^3 \frac{1}{t^2-t}dt, \int_2^3 t\sqrt{t^2+3}dt + \int_2^3 \frac{t}{t^2+2}dt\right\rangle$$

Calculando la integral definida de cada componente:
$$\int_2^3 \frac{1}{t^2-t}dt$$
$$\int \frac{1}{t^2-t}dt$$
$$\frac{1}{t^2-t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1}$$
$$1 = A(t-1) + Bt$$
$$1 = At - A + Bt$$
$$\begin{aligned} t &: \quad 0 = A + B \\ t^\circ &: \quad 1 = A \quad ; \quad B = -1 \end{aligned}$$
$$\frac{1}{t^2-t} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t-1}$$
$$\int \frac{1}{t^2-t}dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-1}\right) dt$$
$$\int \frac{1}{t^2-t}dt = \ln t - \ln(t-1)$$
$$\int \frac{1}{t^2-t}dt = \ln\left(\frac{t}{t-1}\right)$$
$$\int_2^3 \frac{1}{t^2-t}dt = \ln\left(\frac{t}{t-1}\right)\Big|_2^3$$
$$\int_2^3 \frac{1}{t^2-t}dt = \ln\frac{3}{2} - \ln 2$$
$$\int_2^3 \frac{1}{t^2-t}dt = \ln\frac{3}{4}$$

$$\int_2^3 t\sqrt{t^2+3}dt$$

$$\int t\sqrt{t^2+3}dt$$

$$u = t^2+3 \ , \ du = 2tdt$$

$$\int t\sqrt{t^2+3}dt = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du$$

$$\int t\sqrt{t^2+3}dt = \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}$$

$$\int t\sqrt{t^2+3}dt = \frac{1}{3}\left(t^2+3\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\int_2^3 t\sqrt{t^2+3}dt = \left.\frac{1}{3}\left(t^2+3\right)^{\frac{3}{2}}\right|_2^3$$

$$\int_2^3 t\sqrt{t^2+3}dt = 8\sqrt{3}-\frac{7}{3}\sqrt{7}$$

$$\int_2^3 \frac{t}{t^2+2}dt$$

$$\int \frac{t}{t^2+2}dt$$

$$u = t^2+2 \ , \ du = 2tdt$$

$$\int \frac{t}{t^2+2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$

$$\int \frac{1}{t^2+2}dt = \frac{1}{2}\ln u$$

$$\int \frac{1}{t^2+2}dt = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+2\right)$$

$$\int_2^3 \frac{1}{t^2+2}dt = \left.\frac{1}{2}\ln\left(t^2+2\right)\right|_2^3$$

$$\int_2^3 \frac{1}{t^2+2}dt = \frac{1}{2}(\ln 11 - \ln 6)$$

$$\int_2^3 \frac{1}{t^2+2}dt = \frac{1}{2}\ln\frac{11}{6}$$

Por lo tanto:

$$\int_2^3 \left\langle \frac{1}{t^2-t}, t\sqrt{t^2+3}, \frac{t}{t^2+2}\right\rangle dt = \left\langle \ln\frac{3}{4}, 8\sqrt{3}-\frac{7}{3}\sqrt{7}, \frac{1}{2}\ln\frac{11}{6}\right\rangle$$

Ejercicio 62.
Calcular la integral definida:

$$\int_0^1 \left\langle \sin^3 t, \frac{t}{t+1}, \frac{ch2t}{l+sh^2t}\right\rangle dt$$

Solución

$$\int_0^1 \left\langle \sin^3 t, \frac{t}{t+1}, \frac{ch2t}{1+sh^2t}\right\rangle dt = \left\langle \int_0^1 \sin^3 tdt \ , \ \int_0^1 \frac{t}{t+1}dt \ , \ \int_0^1 \frac{ch2t}{ch^2t}dt\right\rangle$$

Calculando la integral definida de cada componente:

$$\int_0^1 \sin^3 tdt$$

$$\int \sin^3 tdt = \int \left(\sin^2 t\sin t\right)dt$$

$$\int \sin^3 tdt = \int \left(1-\cos^2 t\right)\sin tdt$$

$$\int \sin^3 tdt = \int \left(\sin t - \cos^2 t\sin t\right)dt$$

$$\int \sin^3 t dt = -\cos t + \frac{\cos^3 t}{3}$$
$$\int_0^1 \sin^3 t dt = -\cos t + \left.\frac{\cos^3 t}{3}\right|_0^1$$
$$\int_0^1 \sin^3 t dt = \left(-\cos 1 + \frac{1}{3}\cos 1\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)$$
$$\int_0^1 \sin^3 t dt = \frac{2}{3}(1 - \cos 1)$$
$$\int_0^1 \frac{t}{t+1} dt = \int_0^1 \frac{t+1-1}{t+1} dt$$
$$\int_0^1 \frac{t}{t+1} dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt$$
$$\int_0^1 \frac{t}{t+1} dt = t - \left.\ln(t+1)\right|_0^1$$
$$\int_0^1 \frac{t}{t+1} dt = 1 - \ln 2$$
$$\int_0^1 \frac{ch2t}{ch^2 t} dt$$
$$\int \frac{ch2t}{ch^2 t} dt$$
$$u = ch^2 t \ , \ du = 2sht\, cht\, dt$$
$$du = ch\, 2t\, dt$$
$$\int \frac{ch2t}{ch^2 t} dt = \int \frac{1}{u} du$$
$$\int \frac{ch2t}{ch^2 t} dt = \ln u$$
$$\int \frac{ch2t}{ch^2 t} dt = \ln\left(1 + sh^2 t\right)$$
$$\int_0^1 \frac{ch2t}{ch^2 t} dt = \left.\ln\left(1 + sh^2 t\right)\right|_0^1$$
$$\int_0^1 \frac{ch2t}{ch^2 t} dt = \ln\left(1 + sh^2 1\right) - \ln 1$$
$$\int_0^1 \frac{ch2t}{ch^2 t} dt = \ln\left(1 + sh^2 1\right)$$

Por lo tanto:

$$\int_0^1 \left\langle \sin^3 t, \frac{t}{t+1}, \frac{ch2t}{1 + sh^2 t} \right\rangle dt = \left\langle \frac{2}{3}(1 - \cos 1), 1 - \ln 2, \ln\left(1 + sh^2 1\right) \right\rangle$$

Ejercicio 63.
Calcular la integral definida:

$$\int_0^1 \left\langle \sqrt{4t^2 + 1}, 3te^{-3t}, tsh2t \right\rangle dt$$

Solución

$$\int_0^1 \left\langle \sqrt{4t^2 + 1}, 3te^{-3t}, tsh2t \right\rangle dt = \left\langle \int_0^1 \sqrt{4t^2 + 1} dt, \int_0^1 3te^{-3t} dt, \int_0^1 tsh2t \right\rangle$$

Calculando la integral definida de las componentes

$$\int_0^1 \sqrt{4t^2 + 1}\, dt$$
$$\int \sqrt{4t^2 + 1}\, dt = 2 \int \sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}\, dtc$$

Aplicando la fórmula de integral de tabla:

$$\int \sqrt{4t^2+1}dt = 2\left(\frac{t}{2}\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}+\frac{\frac{1}{4}}{2}\ln\left(t+\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}\right)\right]$$

$$\int \sqrt{4t^2+1}dt = t\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}\ln\left(t+\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}\right)$$

$$\int_0^1 \sqrt{4t^2+1}dt = \left[t\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}\ln\left(t+\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}\right)\right]\Bigg|_0^1$$

$$\int_0^1 \sqrt{4t^2+1}dt = \left[\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right)-\left(\frac{1}{4}\ln\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\int_0^1 \sqrt{4t^2+1}dt = \frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})$$

$$\int_0^1 3te^{-3t}dt$$

$$\int 3te^{-3t}dt$$

$$\begin{array}{ll} u = t \ , & \displaystyle\int dv = \int 3e^{-3t}dt \\ du = dt \ , & v = -e^{-3t} \end{array}$$

$$\int 3te^{-3t}dt = -te^{-3t}+\int e^{-3t}dt$$

$$\int 3te^{-3t}dt = -te^{-3t}-\frac{1}{3}e^{-3t}$$

$$\int_0^1 3te^{-3t}dt = \left(-te^{-3t}-\frac{1}{3}e^{-3t}\right)\Bigg|_0^1$$

$$\int_0^1 3te^{-3t}dt = \left(-e^{-3}-\frac{1}{3}e^{-3}\right)-\left(-\frac{1}{3}e^{0}\right)$$

$$\int_0^1 3te^{-3t}dt = \frac{1}{3}\left(1-\frac{4}{e^3}\right)$$

$$\int_0^1 tsh2tdt$$

$$\int tsh2tdt$$

$$\begin{array}{ll} u = t \ , & \displaystyle\int dv = \int sh2t\,dt \\ du = dt \ , & v = \frac{1}{2}ch2t \end{array}$$

$$\int tsh2tdt = \frac{t}{2}ch2t-\frac{1}{2}\int ch2tdt$$

$$\int tsh2tdt = \frac{t}{2}ch2t-\frac{1}{4}sh2t$$

$$\int_0^1 tsh2tdt = \left(\frac{t}{2}ch2t-\frac{1}{4}sh2t\right)\Bigg|_0^1$$

$$\int_0^1 tsh2tdt = \frac{1}{2}ch2-\frac{1}{4}sh2$$

Por lo tanto:

$$\int_0^1 \left\langle \sqrt{4t^2+1}, 3te^{-3t}, tsh2t\right\rangle dt = \left\langle \frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5}), \frac{1}{3}\left(1-\frac{4}{e^3}\right), \frac{1}{2}ch2-\frac{1}{4}sh2\right\rangle$$

Ejercicio 64.
Calcular la longitud de la curva C, descrita por

$$\vec{f}(t) = \left\langle t^2, |t| \right\rangle ; t \in [-1;1]$$

Solución

$$\vec{f}(t) = \begin{cases} \left\langle t^2, t \right\rangle ; & t \in [0;1] \\ \left\langle t^2, -t \right\rangle ; & t \in [-1;0[\end{cases}$$

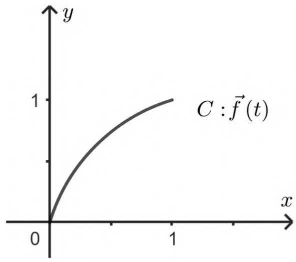
Como se va a calcular la longitud de la curva C, suficiente con tomar $\vec{f}(t)$ para $t \in [0;1]$.
Escribiendo las ecuaciones paramétricas:

$$C : \left\{ \begin{array}{l} x = t^2 \\ y = t \end{array} \right. \Rightarrow x = y^2$$

La representación de C está en la Figura 1.35.

Figura 1.35

Representación de C.



Como $\vec{f}'(t) = \langle 2t, 1 \rangle$:

$$\begin{aligned}
L &= \int_a^b \left\| \vec{f}'(t) \right\| dt \\
L &= \int_0^1 \sqrt{(2t)^2 + (1)^2} dt \\
L &= \int_0^1 \sqrt{4t^2 + 1} dt \\
L &= \int_0^1 \sqrt{4\left(t^2 + \frac{1}{4}\right)} dt \\
L &= 2\int_0^1 \sqrt{t^2 + \frac{1}{4}} dt \\
L &= 2\left[\frac{t}{2}\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{4}{2}} \ln\left| t + \sqrt{t^2 + \frac{1}{4}} \right| \right] |_0^1 \\
L &= 2\left[\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4}} + \frac{1}{8}\ln\left|1 + \sqrt{\frac{5}{4}}\right| \right) - \left(0 + \frac{1}{8}\ln\left|0 + \sqrt{\frac{1}{4}}\right| \right) \right] \\
L &= 2\left[\left(\frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{8}\ln\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right| \right) - \left(\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1}{2}\right| \right) \right] \\
L &= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\ln(2 + \sqrt{5}) \text{ m.}
\end{aligned}$$

Ejercicio 65.
Calcular la longitud de la curva C (la más corta) dada por la intersección de las superficies $x^2+y^2+z^2 = 10, y^2 - x^2 + z^2 = 6$, entre los puntos$(\sqrt{2}, 0, \sqrt{8})$ y $(\sqrt{2}, 1, \sqrt{7})$.
Solución
Sea

$$C : \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 10 \\ -x^2 + y^2 + z^2 = 6 \end{array} \right.$$

Se procede a hallar ecuaciones de otras dos superficies cuya intersección sea la misma curva C, se elimina entonces x en las ecuaciones anteriores, obteniendo:

$$y^2 + z^2 = 8$$

Reemplazando en cualquiera de ellas se tiene:

$$x = \sqrt{2}$$

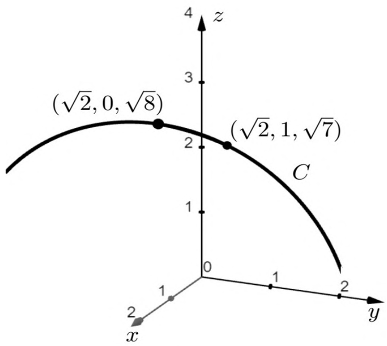
Por lo que las ecuaciones, de las dos nuevas superficies son:

$$C : \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y^2 + z^2 = 8 \end{cases}$$

Cuya representación de C está en la Figura 1.36.

Figura 1.36

Representación de C.



Parametrizando C :

$$C : \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = t \\ z = \sqrt{8 - t^2} \end{cases}$$

Entonces:

$$\vec{f}(t) = \left\langle \sqrt{2}, t, \sqrt{8 - t^2} \right\rangle$$

$$L = \int_a^b \left\| \vec{f'}(t) \right\| dt$$

Hallando los límites de integración:

$$(\sqrt{2}, 0, \sqrt{8})$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} = \sqrt{2} \\ \theta = t \\ \sqrt{8} = \sqrt{8 - t^2} \end{cases} \Rightarrow t = 0$$

$$(\sqrt{2}, 1, \sqrt{7})$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} = \sqrt{2} \\ 1 = t \\ \sqrt{7} = \sqrt{8 - t^2} \end{cases} \Rightarrow t = 1$$

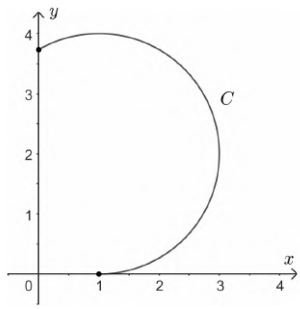
$$0 \le t \le 1$$

$$\vec{f'}(t) = \left\langle 0, 1, \frac{-t}{\sqrt{8 - t^2}} \right\rangle$$

$$L=\int_0^1\sqrt{1+\left(-\frac{t}{\sqrt{8-t^2}}\right)^2}dt$$
$$L=\int_0^1\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8-t^2}}dt$$
$$L=\sqrt{8}\sin^{-1}\frac{t}{\sqrt{8}}\Big|_0^1$$
$$L=\sqrt{8}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)\ \text{m.}$$

Ejercicio 66.
Hallar la distancia que recorre una partícula que se desplaza siguiendo la trayectoria de la curva $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ entre los puntos $(0,2+\sqrt{3})$ y $(1,0)$ en sentido del movimiento de las manecillas del reloj.
Solución
Representando la curva $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ como se muestra en la Figura 1.37.

Figura 1.37
Gráfico de la trayectoria de la partícula.



Parametrizando en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj:

$$C:\begin{cases} x=2\sin t+1\\ y=2\cos t+2\end{cases}$$

Entonces:

$$\vec{f}(t)=\langle 2\sin t+1,2\cos t+2\rangle$$

Hallando los límites de integración:

$$(0,2+\sqrt{3})$$

$$\begin{cases} 0=2\sin t+1\Rightarrow\sin t=-\frac{1}{2}\\ 2+\sqrt{3}=2\cos t+2\Rightarrow\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow t=-\frac{\pi}{6}$$

$$(1,0)$$

$$\begin{cases} 1=2\sin t+1\Rightarrow\sin t=0\\ 0=2\cos t+2\Rightarrow\cos t=-1\end{cases}\Rightarrow t=\pi.$$

$$-\frac{\pi}{6}\leq t\leq\pi$$

$$\vec{f}'(t)=\langle 2\cos t,-2\sin t\rangle$$

$$L=\int_a^b \left\| \vec{f}'(t) \right\| dt$$
$$L=\int_{-\pi/6}^{\pi} \sqrt{(2\cos t)^2+(-2\sin t)^2}d$$
$$L=\int_{-\pi/6}^{\pi} 2\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}dt$$
$$L=\int_{-\pi/6}^{\pi} 2dt$$
$$L=2t|_{\pi}^{\frac{\pi}{6}}$$
$$L=2\pi+\frac{\pi}{3}\ t$$
$$L=\frac{7}{3}\pi \text{ m.}$$

Ejercicio 67.
Una partícula se desplaza siguiendo la trayetoria de la curva C: $(x-1)^2+(y-2)^2=4$. En $t=\frac{\pi}{2}$ seg. está en el punto $(1,4)$, luego de recorrer $\frac{5\pi}{3}$ metros, en qué punto se encontrará la particula? Suponga que se desplaza en sentido contrario al movimientio de las manecillas del reloj.
Solución
Parametrizando la curva C :

$$C:\begin{cases} x=1+2\cos t \\ y=2+2\sin t. \end{cases}$$

Entonces:

$$\vec{f}(t)=\langle 1+2\cos t, 2+2\sin t\rangle$$
$$\vec{f}'(t)=\langle -2\sin t, 2\cos t\rangle$$
$$L=\int_a^b \left\| \vec{f}'(t) \right\| dt$$
$$L=\int_{\frac{\pi}{2}}^{t_0} \sqrt{(-2\sin t)^2+(2\cos t)^2}dt$$
$$L=\int_{\frac{\pi}{2}}^{t_0} \sqrt{4\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)}dt$$
$$L=\int_{\frac{\pi}{2}}^{t_0} 2dt$$
$$\frac{5}{3}\pi=2t|_{\pi/2}^{t_0}$$
$$\frac{5}{3}\pi=2t_\theta-\pi$$
$$t_0=\frac{4}{3}\pi$$
$$\vec{f}\left(\frac{4}{3}\pi\right)=\left\langle 1+2\cos\frac{4}{3}\pi, 2+2\sin\frac{4}{3}\pi\right\rangle$$
$$\vec{f}\left(\frac{4}{3}\pi\right)=\left\langle 0, 2-\sqrt{3}\right\rangle \Rightarrow P(0,2-\sqrt{3})$$

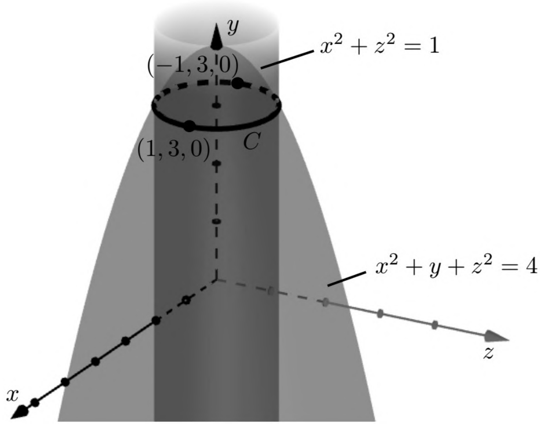
Ejercicio 68.
Una partícula se desplaza por la curva C, dada por la interseción de las superficies dadas. Calcule la longitud de la trayectoria, sabiendo que la partícula en su recorrido debe pasar una sola vez por el mismo punto.

$$C:\begin{cases} x^2+y+z^2=4 \\ x^2+z^2=1 \\ z\geq 0 \end{cases}$$

Solución
Representando la curva C en la Figura 1.38:

Figura 1.38

Recorrido de la partícula (curva C).



Para parametrizar C, hallamos las ecuaciones de superficies más simples a partir de las dadas con la finalidad de que la parametrización también sea simple.

$$C : \begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ y = 3. \end{cases}$$

$$C : \begin{cases} x = \cos t \\ y = 3 \\ z = \sin t \end{cases}$$

Entonces:

$$\vec{f}\,(t) = \langle \cos t, 3, \sin t \rangle$$

$$\vec{f}'\,(t) = \langle -\sin t, 0, \cos t \rangle$$

Para hallar los limites de integración tenemos:

$$z = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$
$$y = 3$$

Entonces los puntos son $(1, 3, 0), (-1, 3, 0)$.
Para $(1, 3, 0)$:

$$\begin{cases} 1 = \cos t \\ 3 = 3 \\ 0 = \sin t \end{cases} \Rightarrow t = 0$$

Para $(-1, 3, 0)$:

$$\begin{cases} -1 = \cos t \\ 3 = 3 \\ 0 = \sin t \end{cases} \Rightarrow t = \pi$$

$$0 \leq t \leq \pi$$

Ahora:

$$L = \int_a^b \left\| \overrightarrow{f'}\,(t) \right\| dt$$

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{(-sint)^2 + (\cos t)^2} dt$$

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt$$

$$L = t \Big|_0^{\pi}$$

$$L = \pi \text{ m}.$$

Ejercicio 69.
Una partícula se mueve en sentido antihorario siguiendo la curva $C: x^2+y^2=5$, en $t=\frac{\pi}{2}$ seg. está en el punto $(0,\sqrt{5})$ ¿En qué punto estará luego de recorrer $\frac{2}{3}\sqrt{5}\pi$ metros?
Solución

$$C: x^2+y^2=5$$

Parametrizando:

$$C: \begin{cases} x=\sqrt{5}\cos t \\ y=\sqrt{5}\sin t \end{cases}$$

Luego:

$$\vec{f}(t)=\left\langle \sqrt{5}cost, \sqrt{5}\sin t \right\rangle$$
$$\vec{f'}(t)=\left\langle -\sqrt{5}\sin t, \sqrt{5}\cos t \right\rangle$$

$$L=\int_a^b \left\|\vec{f'}(t)\right\| dt$$
$$L=\int_{\frac{\pi}{2}}^{t_0} \sqrt{(-\sqrt{5}\sin t)^2+t(\sqrt{5}\cos t)^2 dt}$$
$$L=\int_{\frac{\pi}{2}}^{t_0} \sqrt{5}\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t} dt$$
$$L=\int_{\frac{\pi}{2}}^{t_0} \sqrt{5} dt$$

Pero $L=\frac{2}{3}\sqrt{5}\pi$m:

$$\frac{2}{3}\sqrt{5}\pi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{t_0} \sqrt{5} dt$$
$$\frac{2}{3}\sqrt{5}\pi = \sqrt{5}t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{t_0}$$
$$\sqrt{5}t_0 = \frac{7}{6}\sqrt{5}\pi$$
$$t_0 = \frac{7}{6}\pi \text{ seg.}$$

Luego:

$$\vec{f}\left(\frac{7}{6}\pi\right) = \left\langle \sqrt{5}\cos\frac{7}{6}\pi, \sqrt{5}\sin\frac{7}{6}\pi \right\rangle$$
$$\vec{f}\left(\frac{7}{6}\pi\right) = \left\langle -\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2} \right\rangle$$

Entonces la partícula estará en el punto $\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

Ejercicio 70.
Una partícula se mueve en el espacio tridimensional siguiendo la trayectoria de la curva $C: \vec{f}(t) = \left\langle t, 2-t, \sqrt{4t-2t^2}\right\rangle$. Al iniciar el movimiento está en el punto $(0,2,0)$, se pregunta ¿en qué tiempo recorrerá $\sqrt{2}\pi$ metros?
Solución

$$L=\int_a^b \left\|\vec{f'}(t)\right\| dt$$
$$\vec{f^{\imath}}(t)=\left\langle 1, -1, \frac{2-2t}{\sqrt{4t-2t^2}} \right\rangle$$

En $t=0$ está en el punto $(0,2,0)$.

$$L=\int_0^{t_0}\sqrt{(1)^2+(-1)^2+\left(\frac{2-2t}{\sqrt{4A-2t^2}}\right)^2}\,dt$$
$$L=\int_0^{t_0}\sqrt{2+\frac{4-8t+4t^2}{4t-2t^2}}\,dt$$
$$L=\int_0^{t_0}\sqrt{\frac{8t-4t^2+4-8t+4t^2}{4t-2t^2}}\,dt$$
$$L=\int_0^{t_0}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-(t-1)^2}}\,dt$$
$$\sqrt{2}\pi=\sqrt{2}\sin^{-1}(t-1)\Big|_0^{t_0}$$
$$\pi=\sin^{-1}(t_0-1)-\sin^{-1}(-1)$$
$$\sin^{-1}(t_0-1)=\frac{\pi}{2}$$
$$t_0-1=1$$
$$t_0=2\text{ seg.}$$

CAPÍTULO 2

Funciones reales de n variables reales

Capítulo 2

Funciones reales de n variables reales

2.1. Dominios

Sea f una función real de n variables reales definida como:
$$\begin{array}{ll} f: D \subset \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R} \\ \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \mapsto z = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \end{array}$$

El dominio de f es el conjunto de valores para el que se encuentra definida ésta (Garcia, 2015). Para valores de entrada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en la ecuación de f, los valores de salida z son números reales.

$$D_f = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n / \exists\, z \in \mathbb{R} \wedge z = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\} \tag{2.1}$$

Sea $\begin{array}{ll} f: D \subset R^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ \quad (x, y) & \mapsto z = f\left(x, y\right) \end{array}$

$$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \exists\, z \in \mathbb{R} \wedge z = f\left(x, y\right)\right\} \tag{2.2}$$

Sea $\begin{array}{ll} f: D \subset R^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ \quad (x, y, z) & \mapsto w = f\left(x, y, z\right) \end{array}$

$$D_f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \exists\, \mathrm{w} \in \mathbb{R} \wedge \mathrm{w} = f\left(x, y, z\right)\right\} \tag{2.3}$$

Es importante destacar que para determinar el dominio de este tipo de funciones, hay que tener las mismas precauciones que se tuvo para hallar los dominios de funciones reales de una variable independiente.

Ejercicio 71
Hallar el dominio de la función y representarlo gráficamente:

$$f\left(x, y\right) = \sqrt{\frac{y - e^x}{x + y}}$$

Solución

Como se trata de una raiz cuyo índice es par, la cantidad subradical debe ser mayor o igual a cero, por lo que:

$$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{y - e^x}{x + y} \geqslant 0\right\}$$

Como la cantidad subradical es una fracción, esta será un número positivo o igual a cero cuando:

$$[y - e^x \geqslant 0 \wedge x + y > 0] \vee [y - e^x \leq 0 \wedge x + y < 0]$$

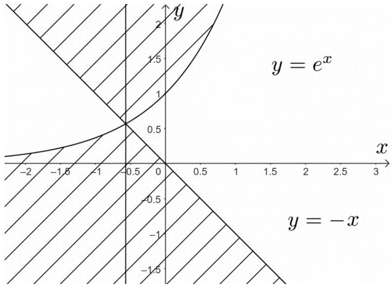
Entonces:

$$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \left[y - e^x \geq 0 \wedge x + y > 0\right] \vee \left[y - e^x \leq 0 \wedge x + y < 0\right]\right\}$$

Graficando las ecuaciones $y = e^x$ y $y = -x$, se determina gráficamente la solución de este sistema de inecuaciones, tal como se observa en la Figura 2.1.

Figura 2.1

Dominio de $f(x, y)$.



Ejercicio 72
Determinar el dominio de f y representarlo gráficamente.

$$f(x, y) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{y - x^2}}$$

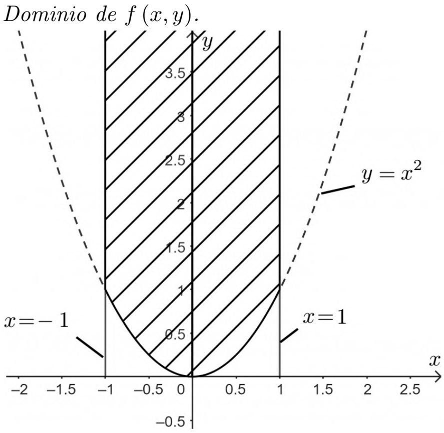
Solución
Para determinar el dominio de f, se considera a ésta como un cociente de dos funciones, así tenemos.

$$\begin{aligned}
&g(x,y) = \arcsin x; D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq 1\} \\
&h(x,y) = \sqrt{y - x^2}; D_h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y - x^2 \geq 0\} \\
&D_f = \{D_g \cap D_h\} - \{h(x,y) = 0\} \\
&D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq 1 \wedge y - x^2 \geq 0 \wedge y - x^2 \neq 0\}
\end{aligned}$$

Se representa la curva $y = x^2$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$ para resolver gráficamente el sistema de inecuaciones, tal como se muestra en la Figura 2.2.

Figura 2.2

Dominio de $f(x, y)$.



Ejercicio 73
Determinar el dominio de f y representarlo gráficamente:

$$f(x, y) = e^{\left|\frac{1}{xy}\right|} \cdot ch \ln(y - x)$$

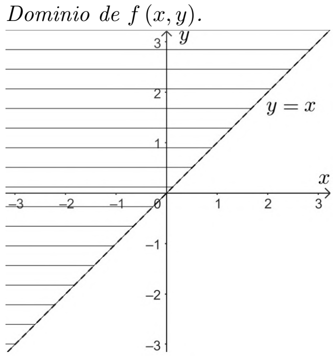
Solución
Para determinar el dominio, se considera a f como el producto de dos funciones, así:

$$g(x,y) = e^{\left|\frac{1}{xy}\right|}; D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy \neq 0\}$$
$$h(x,y) = ch\ln(y-x); Dh = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y - x > 0\}$$
$$D_f = D_g \cap D_h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy \neq 0 \wedge y - x > 0\}$$

Representando gráficamente en la Figura 2.3:

Figura 2.3

Dominio de $f\,(x,y)$.



Ejercicio 74

Determinar el dominio de f y representarlo gráficamente.

$$f\,(x,y) = \arcsin(xy) + \operatorname{arc\,tg}(xy)$$

Solución

Se considera a f como la suma de dos funciones, asi:

$$g(x,y) = \arcsin(xy) \Rightarrow Dg = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq xy \leq 1\}$$
$$h(x,y) = \operatorname{arc\,tg}(x,y) \Rightarrow Dh = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$
$$D_f = D_g \cap D_h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq xy \leq 1\}$$

Para resolver la inecuación, la expresamos como.

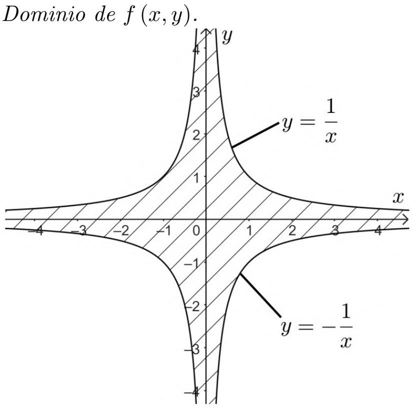
$$\begin{cases} xy \geq -1 \\ xy \leq 1 \end{cases}$$

Representamos las ecuaciones para resolver gráficamente el sistema deinecuaciones, tal como se observa en la Figura 2.4.

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = -\frac{1}{x}$$

Figura 2.4

Dominio de $f\,(x,y)$.



Ejercicio 75
Determinar el dominio de f y representarlo gráficamente:

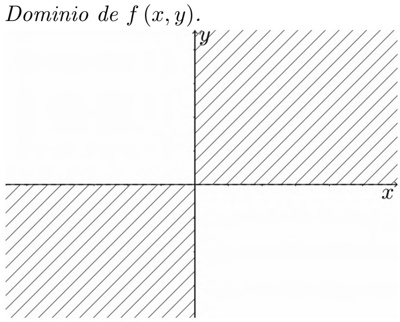
$$f(x,y) = \sin\sqrt{xy} - \ln\ ch\left(\frac{x}{y}\right)$$

Solución
Sea:

$$g(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{xy} \Rightarrow D_g = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy \geq 0\right\}$$
$$h(x,y) = ln\ ch\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow D_h = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq 0\right\}$$
$$D_f = Dg \cap Dh = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy \geq 0 \wedge y \neq 0\right\}$$

Se representa gráficamente el dominio de f, tal como se observa en la Figura 2.5.

Figura 2.5
Dominio de $f(x,y)$.



Ejercicio 76
Determinar el dominio de f y representarlo gráficamente:

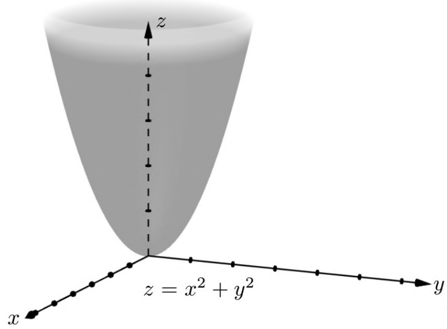
$$f(x,y,z) = \sqrt{z - x^2 - y^2}$$

Solución

$$D_f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z - x^2 - y^2 \geq 0\right\}$$

Se representa la superficie $z = x^2 + y^2$, para resolver gráficamente la inecuación planteada, tal como se observa en la Figura 2.6.

Figura 2.6
Dominio de $f(x,y,z)$.



Ejercicio 77
Determinar el dominio de f y representarlo gráficamente:

$$f(x,y,z) = e^{\sqrt{y-3}} \cdot \ln\left(x^2+y^2+z^2-1\right)$$

Solución
Se considera a f como el producto de dos funciones, así:

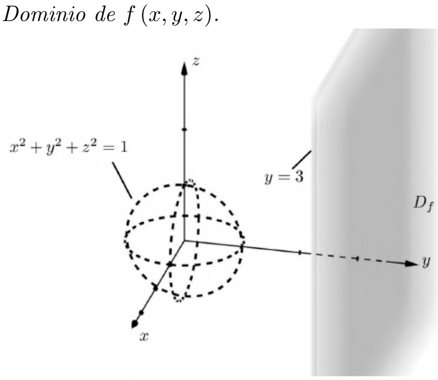
$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= e^{\sqrt{y-3}}; Dg = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y-3 \geqslant 0\right\} \\ h(x,y,z) &= \ln\left(x^2+y^2+z^2-1\right); Dh = \left\{(x,y), \mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2-1 > 0\right\} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$D_f = D_g \cap Dh. = \left\{(x,y,z) \in R^3 / y \geqslant 3 \wedge x^2+y^2+z^2-1 > 0\right\}$$

Se representa las superficies $y=3, x^2+y^2+z^2=1$ para obtener gráficamente la solución del sistema de inecuaciones planteadas, tal como se muestra en la Figura 2.7.

Figura 2.7
Dominio de $f(x,y,z)$.



Ejercicio 78
Determinar el dominio de f y representarlo gráficamente:

$$f(x,y,z) = \frac{1}{z-2} + \sqrt{y-x^2}$$

Solución
Se considera a f como la suma de dos funciones, así:

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= \frac{1}{z-2}; Dg = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z-2 \neq 0\right\} \\ h(x,y,z) &= \sqrt{y-x^2}; Dh = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 / y-x^2 \geqslant 0\right\} \end{aligned}$$

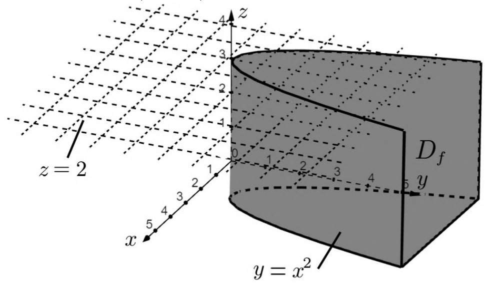
Por lo tanto:

$$D_f = Dg \cap Dh = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z \neq 2 \wedge y-x^2 \geqslant 0\right\}$$

Representando las superficies y el dominio en la Figura 2.8.

Figura 2.8

Dominio de $f(x,y,z)$.



Ejercicio 79
Determinar el dominio de f y representarlo gráficamente:

$$f(x,y,z) = \frac{|\arccos z|}{sh(xy)}$$

Solución
Se considera a f como el cociente de dos funciones, asi se tiene:

$$g(x,y,z) = |\arccos z|; Dg = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^3 - 1 \leq z \leq 1\right\}$$
$$h(x,y,z) = sh(xy); Dh = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

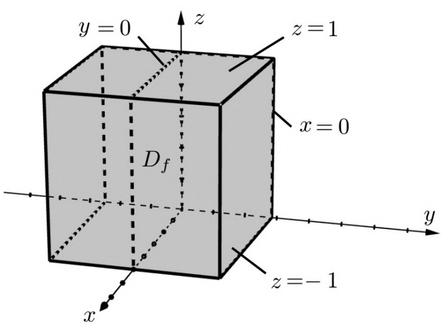
Por lo tanto:

$$D_f = \{D_g \cap D_h\} - \{h(x,y,z) = 0\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / -1 \leq z \leq 1 \wedge sh(xy) \neq 0\right\}$$

Representando gráficamente el dominio en la Figura 2.9:

Figura 2.9

Dominio de $f(x,y,z)$.



Ejercicio 80
Determinar el dominio de f y representarlo gráficamente:

$$f(x,y,z) = e^{\ln(x+y+z-1)} - \operatorname{arc\,tg}(xyz)$$

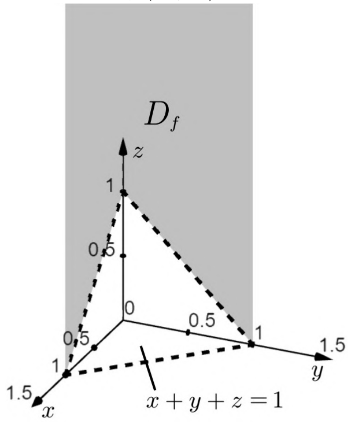
Solución
Sea f la resta de dos funciones, se tiene.

$$g(x,y,z) = e^{\ln(x+y+z-1)} \Rightarrow Dg = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z - 1 > 0\right\}$$
$$h(x,y,z) = \operatorname{arc\,tg}(xyz) \Rightarrow Dh = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\}$$
$$D_f = \mathrm{Dg}\, n D_h = \{(x, yz) \in \mathbb{R} / x + y + z - 1 > 0\}$$

Representando gráficamente el dominio en la Figura 2.10:

Figura 2.10

Dominio de $f(x,y,z)$.



2.2. Gráfica de una función real, de dos variables reales

Sea $\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto z = f(x,y) \end{aligned}$

La gráfica de f queda definida como:

$$G_f = \{(x,y,f(x,y))/(x,y) \in D_f\} \tag{2.4}$$

Para la representación gráfica de f, las variables independientes están dispuestas en un plano horizontal y el eje de la variable dependiente vertical. Para cada $(x,y) \in D_f$, le corresponde un $f(x,y)$, formándose las ternas $(x,y,f(x,y))$ que son puntos de $\mathbb{R}^3$. Al unir todos los puntos queda una superficie llamada gráfica de f (López y Pagola, 2017).

Se recomienda el siguiente procedimiento simplificado para el trazado de la gráfica de f :
1. Dominio de f.
2. Intersección con los ejes coordenados:
Pasando f a la forma implícita: $F(x,y,z) = 0$.
Con el eje x: $F(x,0,0) = 0$
Con el eje y: $F(0,y,0) = 0$
Con el eje z: $F(0,0,z) = 0$
3. Trazas sobre los planos ordenados:
Sobre el plano $xy : F(x,y,0) = 0$
Sobre el plano $xz : F(x,0,z) = 0$
Sobre el plano $yz : F(0,y,z) = 0$
4. Curvas de nivel
$z = f(x,y) = k$
5. Representar la superficie

Ejercicio 81
Trazar la gráfica de la función:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y + 1$$

Solución
a) Dominio
$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$
b) Intersección con los ejes coordenados
Se escribe la función en forma implícita $F(x,y,z) = z - x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0$

Eje x : $(y = z = 0) \Rightarrow -x^2 - 1 = 0 \quad \nexists$

Eje y : $(x = z = 0) \Rightarrow \quad y^2 - 2y + 1 = 0$

$$(y-1)^2 = 0$$

$$y = 1 \quad \Rightarrow P(0,1,0)$$

Eje z : $(x = y = 0) \Rightarrow \quad z = 1 \Rightarrow P(0,0,1)$

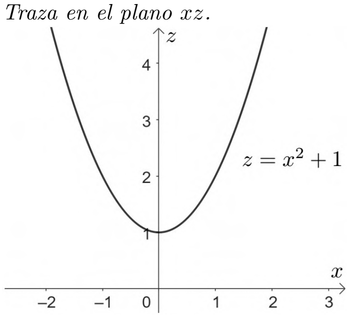
c) Trazas

Plano xy : $(z = 0) \Rightarrow \; x^2 + (y-1)^2 = 0 \quad \nexists$

Plano xz : $(y = 0) \Rightarrow \; z = x^2 + 1$, cuya gráfica se muestra en la Figura 2.11.

Figura 2.11

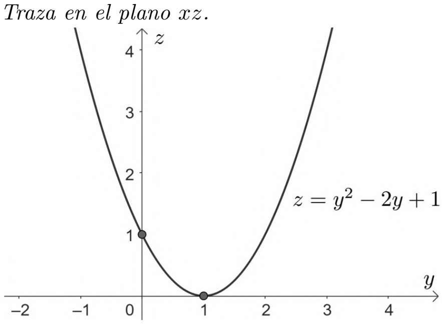
Traza en el plano xz.



Plano yz : $(x = 0) \Rightarrow z = y^2 - 2y + 1$, cuya gráfica se muestra en la Figura 2.12.

Figura 2.12

Traza en el plano xz.



d) Curvas de nivel

Si $\quad z = k \quad \Rightarrow \quad x^2 + (y-1)^2 = k \quad (k > 0)$

$\quad k = 1 \quad ; \quad x^2 + (y-1)^2 = 1$

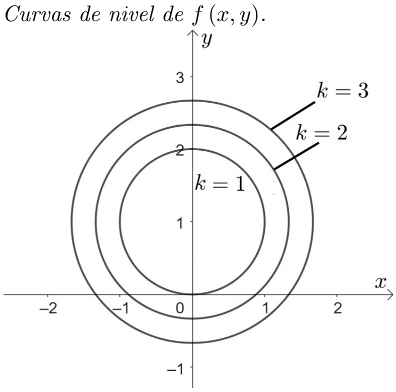
$\quad k = 2 \quad ; \quad x^2 + (y-1)^2 = 2$

$\quad k = 3 \quad ; \quad x^2 + (y-1)^2 = 3$

La representación gráfica se muestra en la Figura 2.13.

Figura 2.13

Curvas de nivel de $f(x, y)$.

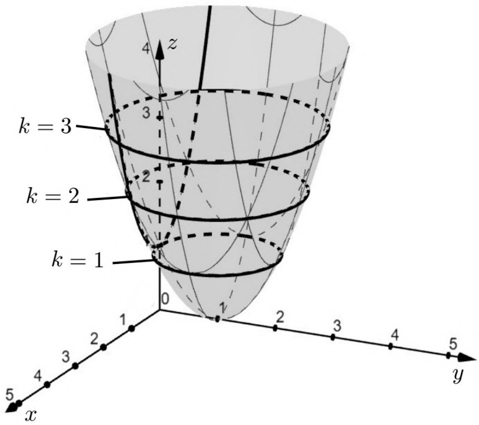


e) Trazado de la superficie

La superficie se muestra en la Figura 2.14.

Figura 2.14

Gráfica de $f(x, y)$.



Ejercicio 82

Trazar la gráfica, de la función:

$$f(x, y) = x + y^2 - 5$$

Solución

a) Dominio.

$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

b) Intersecciones con los ejes coordenados.
La función escrita en forma implicita:

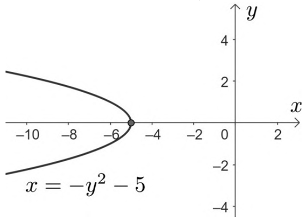
$F(x, y, z) = z - x - y^2 - 5 = 0.$
Eje $x : (y = z = 0) \Rightarrow x = -5 \Rightarrow P(-5, 0, 0)$
Eje $y : (x = 2 = 0) \Rightarrow y^2 = -5 \quad \nexists$
Eje $z : (x = y = 0) \Rightarrow z = 5 \Rightarrow P(0, 0, 5)$

c) Trazas

Plano $xy : (z = 0) \Rightarrow x = -y^2 - 5$, cuya gráfica se muestra en la Figura 2.15.

Figura 2.15

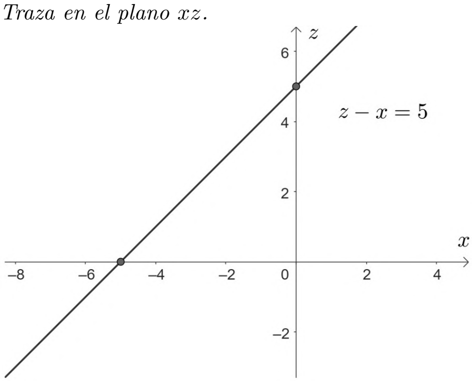
Traza en el plano xy.



Plano $xz : (y = 0) \Rightarrow z - x = 5$, cuya gráfica se muestra en la Figura 2.16.

Figura 2.16

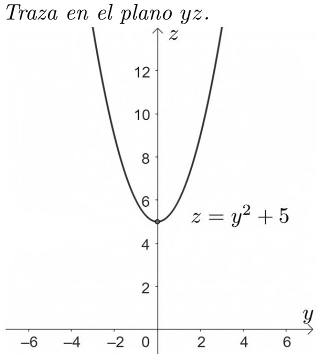
Traza en el plano xz.



Plano $yz(x = 0) \;\Rightarrow\; z = y^2 + 5$, cuya gráfica se muestra en la Figura 2.17.

Figura 2.17

Traza en el plano yz.



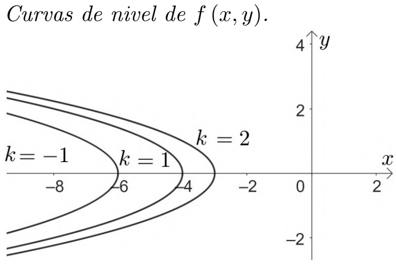
d) Curvas de nivel

$$
\begin{array}{ll}
\text{Si} & z = k \;\Rightarrow\; x + y^2 + 5 = k \quad (k \in \mathbb{R}) \\
 & k = -1\;; \quad x = -y^2 - 6 \\
 & k = 1 \quad; \quad x = -y^2 - 4 \\
 & k = 2 \quad; \quad x = -y^2 - 3
\end{array}
$$

La representación gráfica se muestra en la Figura 2.18.

Figura 2.18

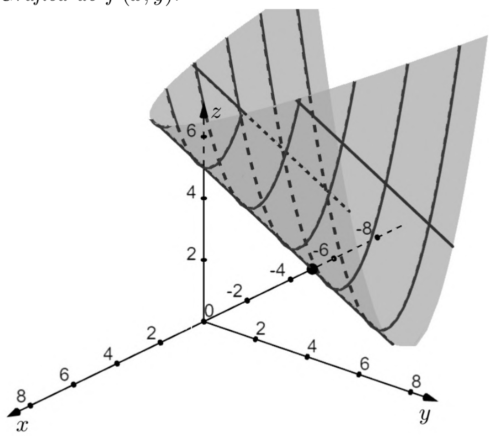
Curvas de nivel de $f\,(x, y)$.



e) Trazado de la superficie

La superficie está representada cen la Figura 2.19.

Figura 2.19
Gráfica de $f(x, y)$.



Ejercicio 83
Trazar la gráfica de la función:

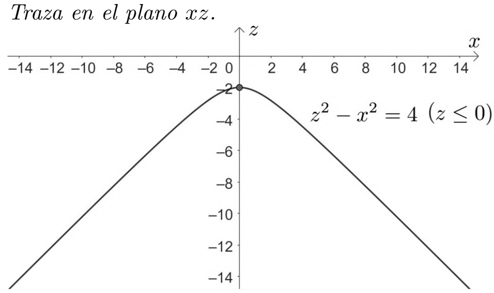
$$f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2 + 4}$$

Solución
a) Dominio
$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$
b) Intersecciones con los ejes coordenados
Se escribe la función en forma implícita: $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 4 = 0 (z \leq 0)$
Eje x: $(y = z = 0) \ \Rightarrow \ x^2 + 4 = 0 \quad \nexists$
Eje y: $(x = z = 0) \ \Rightarrow \ y^2 + 4 = 0 \quad \nexists$
Eje z: $(x = y = 0) \ \Rightarrow \ z = -2 \ \Rightarrow \ P(0, 0, -2)$
c) Trazas
Plano $xy : (z = 0) \Rightarrow x^2 + y^2 + 4 = 0 \quad \nexists$

Plano $xz : (y = 0) \ \Rightarrow z^2 - x^2 = 4$ (hipérbola)
$z \in] - \infty; -2]$

La gráfica se muestra en la Figura 2.20.

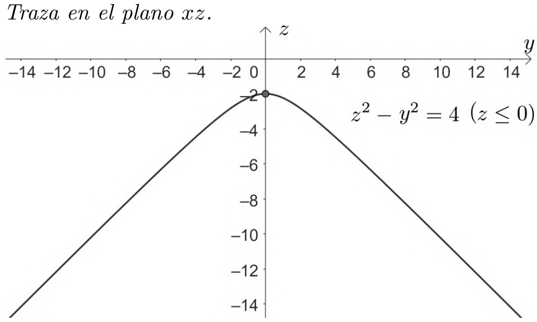
Figura 2.20
Traza en el plano xz.



Plano $yz : (x = 0) \ \Rightarrow z^2 - y^2 = 4$ (hipérbola)
$z \in] - \infty; -2]$
La gráfica se muestra en la Figura 2.21.

Figura 2.21

Traza en el plano xz.



d) Curvas de nivel.

Si $\quad z = k \ \Rightarrow \ x^2 + y^2 = K^2 - 4 \ (k \in]-\infty; -2])$

$\qquad k = -5 \ ; \quad x^2 + y^2 = 21$

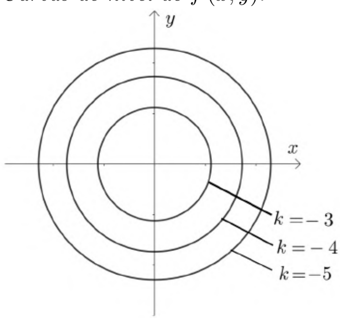
$\qquad k = -4 \ ; \quad x^2 + y^2 = 12$

$\qquad k = -3 \ ; \quad x^2 + y^2 = 5$

La representación gráfica se muestra en la Figura 2.22.

Figura 2.22

Curvas de nivel de $f(x, y)$.

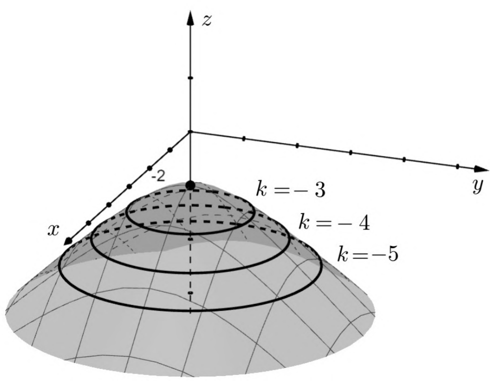


e) Trazado de la superficie.

La superficie se muestra en la Figura 2.23.

Figura 2.23

Gráfica de $f(x, y)$.



Ejercicio 84

Trazar la gráfica de la función:

$$f(x, y) = \ln(y - e^x)$$

Solución

a) Dominio.

$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y - e^x > 0\right\}$

b) Intersecciones con los ejes coordenados.

Expresando en forma implícita la función: $z - \ln(y - e^x) = 0$.

Eje x : $(y = z = 0) \Rightarrow \ln(-e^x) \quad \nexists$
Eje y : $(x = z = 0) \Rightarrow \ln(y - 1) = 0$

$$y = 2 \;\Rightarrow\; P(0, 2, 0)$$

Eje z : $(x = y = 0) \Rightarrow z - \ln(-1) = 0 \quad \nexists$

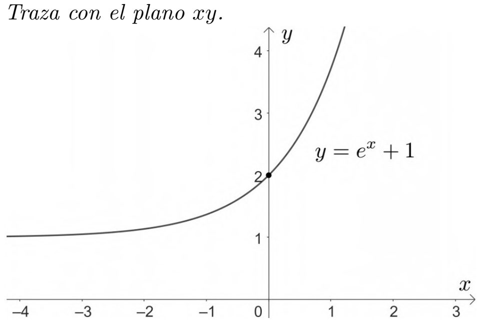
c) Trazas

Plano xy : $(z = 0) \;\Rightarrow\; \ln(y - c^x) = 0$, cuya gráfica está en la Figura 2.24.

$$y = e^x + 1$$

Figura 2.24

Traza con el plano xy.

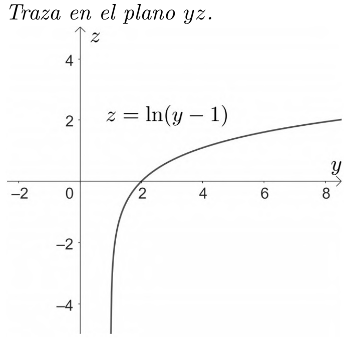


Plano xz : $(y = 0) \Rightarrow z = \ln(-e^x) \quad \nexists$

Plano yz : $(x = 0) \Rightarrow z = \ln(y - 1)$, cuya gráfica se muestra en la Figura 2.25.

Figura 2.25

Traza en el plano yz.



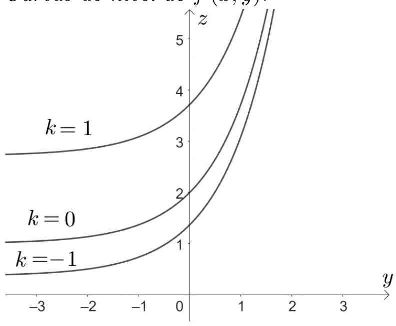
d) Curvas de nivel.

Si $\quad z = k \quad , \; y = e^x + e^k \quad (k \in \mathbb{R})$
$\quad k = -1 \; : \; y = e^x + \frac{1}{e}$
$\quad k = 0 \; : \; y = e^x + 1$
$\quad k = 1 \; : \; y = e^x + e$

La representación gráfica está en la Figura 2.26.

Figura 2.26

Curvas de nivel de $f(x, y)$.

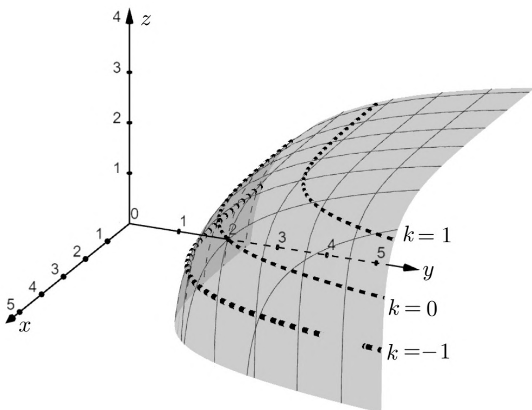


e) Trazado de la superficie.

La superficie se muestra en la Figura 2.27.

Figura 2.27

Gráfica de $f(x, y)$.



Ejercicio 85

Trazar la gráfica de la función:

$$f(x, y) = e^{(x+y)}$$

Solución

a) Dominio

$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

b) Intersecciones con los ejes coordenados

Expresando la función en forma implícita: $F(x, y, z) = z - e^{(x+y)} = 0$.

Eje $x : (y = z = 0) \Rightarrow -e^x = 0 \quad \nexists$

Eje $y : (x = z = 0) \Rightarrow -e^y = 0 \quad \nexists$

Eje $z : (x = y = 0) \Rightarrow z = 1 \Rightarrow P(0, 0, 1)$

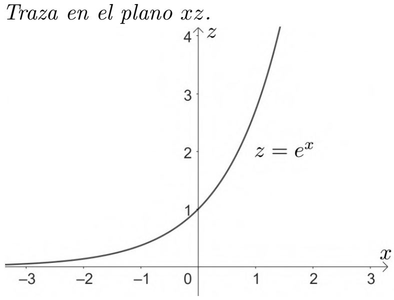
c) Trazas

Plano $xy : (z = 0) \Rightarrow -e^{(x+y)} = 0 \quad \nexists$.

Plano $xz : (y = 0) \Rightarrow \quad z = e^x$, cuya gráfica se muestra en la Figura 2.28.

Figura 2.28

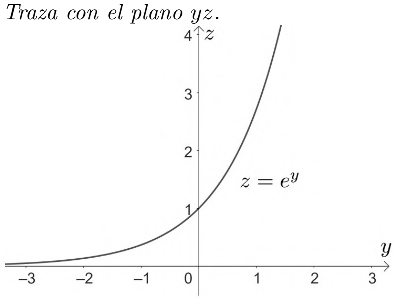
Traza en el plano xz.



Plano yz : $(x = 0) \Rightarrow \quad z = e^y$, cuya gráfica se muestra en la Figura 2.29.

Figura 2.29

Traza con el plano yz.



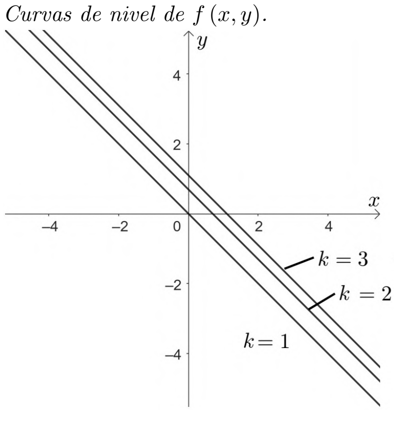
d) Curvas de nivel.

$$
\begin{array}{llll}
\text{Si} & z = k & \Rightarrow & e^{x+y} = k \quad (k > 0) \\
 & & & x + y = \ln k \\
 & k = 1 & ; & x + y = 0 \\
 & k = 2 & ; & x + y = \ln 2 \\
 & k = 3 & ; & x + y = \ln 3
\end{array}
$$

La representación gráfica se muestra en la Figura 2.30.

Figura 2.30

Curvas de nivel de $f(x, y)$.

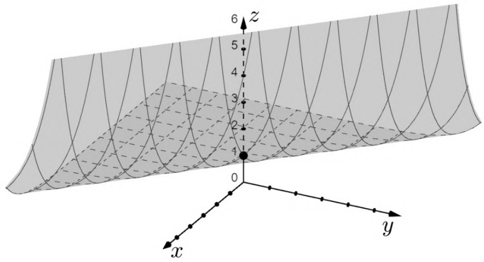


e) Trazado de la superfice.

La superficie se muestra en la Figura 2.31.

Figura 2.31

Gráfica de $f(x, y)$.



2.3. Limites y continuidad.

Cuando (x, y) está dentro del dominio de f, a cada (x, y) le corresponde un solo valor $f(x, y)$. Cuando (x, y) se aproxima cada vez más a un punto fijo (x_0, y_0) y la función se acerca a un valor fijo L, se dice que:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L \tag{2.5}$$

El cálculo del límite de estas funciones es semejante al cálculo de funciones de una variable independiente.
Cuando (x, y) no está dentro del dominio de f, al calcular el límite, este puede no existir o presentar formas indeterminadas. En este último caso será necesario calcular el límite a través de curvas diferentes a lo largo de las cuales (x, y) puede acercarse a (x_0, y_0). Si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$ existe, entonces $f(x, y)$ tiende al límite L, independientemente de la trayectoria escogida. Si dos curvas diferentes que llevan a (x_0, y_0) producen dos valores límites diferentes para f, entonces se dice que el límite no existe (Palacios, 2017).

Ejercicio 86
Calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,-1)} e^{\sqrt[3]{x+y}}$$

Solución
Considerando como una función compuesta, donde:
$f = e$, $g(x, y) = \sqrt[3]{x + y}$,
Entonces:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(g(x, y)) = f\left(\lim_{(x,y)\to(0,1)} g(x, y)\right)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} e^{\sqrt[3]{x+y}} = e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \sqrt[3]{x+y}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} e^{\sqrt[3]{x+y}} = e^{\sqrt[3]{1}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} e^{\sqrt[3]{x+y}} = e$$

Ejercicio 87.
Calcular:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x + y}$$

Solución

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x + y} = \frac{0}{0}$$

Para levantar la indeterminación $\frac{0}{0}$, se toma un conjunto de puntos para los cuales $(0,0)$ sea un punto de acumulación, este conjunto puede ser una familia de rectas, así:

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = mx\right\}$$

Se calcula el límite a través de S:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ S}} \frac{x^2+(mx)^2}{x+mx}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ S}} \frac{x^2+m^2x^2}{x(1+m)}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ S}} \frac{x+m^2x^2}{(1+m)}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y} = 0$$

Por lo que se observa que el límite existe y es cero a través de S, ahora se escoge otro conjunto de puntos para los cuales $(0,0)$ sea punto de acumulación, por lo que se toma la familia de parábolas $y = mx^2$:

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = mx^2\right\}$$

Se calcula el límite a través de M:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ M}} \frac{x^2+(mx^2)^2}{x+(mx^2)}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ M}} \frac{x^2+m^2x^4}{x+mx^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ M}} \frac{x^2\left(1+m^2x^2\right)}{x\left(1+mx\right)}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ M}} \frac{x(1+m^2x^2)}{1+mx}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y} = 0$$

Nuevamente, el límite existe y es cero a través de M. Por lo que se supone que el límite existe y es único (cero), lo cual se verifica en la Tabla 2.1, donde se muestra cómo la función va acercándose a cero a medida que x e y se acercan a $(0,0)$.

Tabla 2.1

Comportamiento de $f(x,y)$ cuando $(x,y) \to (0,0)$

y \ x	-0.01	-0.001	0.001	0.01
-0.02	-0.016	-0.019	-0.021	-0.05
-0.002	-0.108	-0.0016	-0.005	0.013
0.002	-0.013	0.005	0.0016	0.0086
0.02	0.05	0.021	0.019	0.016

Ejercicio 88.
Calcular:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+y)}{x+y-1}$$

Solución

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+y)}{x+y-1} = \frac{0}{0}$$

Se toma el siguiente conjunto de puntos para levantar la indeterminación, rectas que pasen por el punto (1,0):

$$y = m(x-1)$$

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = m(x-1)\right\}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+y)}{x+y-1} = \lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\ S}} \frac{\ln(x+mx-m)}{x+mx-m-1} = \frac{0}{0}$$

Aplicando la regla de L'Hopital:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\ S}} \frac{\ln(x+mx-m)}{x+mx-m-1} = \lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\ S}} \frac{\frac{1+m}{x+mx-m}}{1+m} = \lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\ S}} \frac{1}{x+mx-m} = 1$$

Por lo que:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+y)}{x+y-1} = 1$$

Se toma otro conjunto de puntos para los cuales (1,0) sea punto de acumulación, así:

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2 - 1\right\}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+y)}{x+y-1} = \lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\ T}} \frac{\ln(x+x^2-1)}{x+x^2-2} = \frac{0}{0}$$

Aplicando la regla de L'Hopital:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\ T}} \frac{\ln(x+x^2-1)}{x+x^2-2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\ T}} \frac{\frac{1+2x}{x+x^2-1}}{1+2x} = \lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\ T}} \frac{1}{(x+x^2-1)} = 1$$

Por lo que:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\ T}} \frac{\ln(x+y)}{x+y-1} = 1$$

Como el límite a través del conjunto de puntos S y T son iguales, entonces se supone que el límite existe y es 1, lo cual se puede verificar evaluando $f(x,y)$ en la vecindad de (1,0) (el estudiante lo puede realizar), y se comprobaría que:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\ T}} \frac{\ln(x+y)}{x+y-1} = 1$$

Una función $f(x,y)$ es continua en (x_0, y_0) si:
1. $f(x_0, y_0)$ está definida
2. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ existe
3. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$

La suma, producto y cociente de funciones continuas es otra función continua, así como la composición de éstas es una función continua excepto en aquellos puntos donde no esté definida (García, 2015) Si no cumple con la condición 3), se dice que f es discontinua. Si el límite no existe se tiene una discontinuidad esencial. Si el límite existe pero no es igual a la función evaluada en (x_0, y_0), se tiene una discontinuidad evitable o removible.

Ejercicio 89.
Sea:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{3-\sqrt{x^2+y^2+9}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 3 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

¿Es $f(x,y)$ continua en $(0,0)$?.
Solución:
Aplicando las condiciones de continuidad:
1. $f(0,0) = 3$ (está definida)

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{3-\sqrt{x^2+y^2+9}} = \frac{0}{0}$
Utilizando coordenadas polares para levantar la indeterminación:

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2}{3-\sqrt{r^2+9}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{2r}{-\ r/\sqrt{r^2+9}} = \lim_{r\to 0}(-2\sqrt{r^2+9}) = -6$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{3-\sqrt{x^2+y^2+9}} = -6$$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq f(0,0) \quad \Rightarrow \ f$ no es continua en $(0,0)$
Por lo tanto, se presenta una discontinuidad evitable en $(0,0)$.
Para que f sea continua en $(0,0)$, hay que redefinirla como:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{3-\sqrt{x^2+y^2+9}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ -6 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Como $(0,0)$ era el único punto de discontinuidad, al redefinirla de esta manera se convierte en continua en este punto. Se puede concluir que $f(x,y)$ es continua $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Ejercicio 90.
¿Es $f(x,y) = \frac{e^{x+y}}{x-y}$ continua en $(0,0)$? Si no lo es, ¿qué clase de discontinuidad presenta?
Solución
Aplicando las condiciones de continuidad en un punto:
1. $f(0,0)$ no está definida. Por lo tanto, no es continua en $(0,0)$.
2. Se calcula el límite para determinar qué clase de discontinuidad presenta:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y}}{x-y} \quad \nexists$$

Este límite no existe, por lo tanto, se trata de una discontinuidad esencial en $(0,0)$.
¿Tendrá f algunos otros puntos donde no sea continua?
Para contestar esta pregunta, se halla el dominio de f, así:

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, y \neq x\}$$

Por lo que f no será continua en $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, y = x$, en el resto de puntos, f será continua.

2.4. Derivadas parciales

Sea $\ f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$\qquad (x,y) \mapsto z = f(x,y)$
a) Derivada parcial con respecto a x:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \quad \text{(y se considera constante y se deriva con respecto a } x\text{)}$$

b) Derivada parcial con respecto a y:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \quad \text{(x se considera constante y se deriva con respecto a } y\text{)}$$

Se utilizan las mismas reglas de derivación de funciones de una variable independiente.
Sea $\ f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$\qquad (x,y,z) \mapsto \mathrm{w} = f(x,y,z)$

a) Derivada parcial con respecto a x:

$$\frac{\partial f\left(x,y,z\right)}{\partial x} \quad (y \text{ e } z \text{ se consideran constantes y se deriva con respecto a } x)$$

b) Derivada parcial con respecto a y:

$$\frac{\partial f\left(x,y,z\right)}{\partial y} \quad (x \text{ e } z \text{ se consideran constantes y se deriva con respecto a } y)$$

c) Derivada parcial con respecto a z:

$$\frac{\partial f\left(x,y,z\right)}{\partial z} \quad (\text{x e y se consideran constantes y se deriva con respecto a } z)$$

Para funciones de n variables independientes: "Para hallar la derivada parcial con respecto a una de las variables, manteniendo constantes las otras variables y se deriva con respecto a la variable dada" (Edwards y Larson, p.214).

Ejercicio 91.
Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ para $z = f\left(x,y\right) = y^x + \ln\left(\frac{x}{y}\right)$
Solución
Considerando y constante, y aplicando las reglas de derivación:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(y^x\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right)\\
\frac{\partial z}{\partial x} &= y^x \ln y \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{1}{\frac{x}{y}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)\\
\frac{\partial z}{\partial x} &= y^x \ln y \cdot 1 + \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{y}\\
\frac{\partial z}{\partial x} &= y^x \ln y + \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Considerando x constante, y aplicando las reglas de derivación:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(y^x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right)\\
\frac{\partial z}{\partial y} &= xy^{x-1} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{1}{\frac{x}{y}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)\\
\frac{\partial z}{\partial y} &= xy^{x-1} + \frac{y}{x} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)\\
\frac{\partial z}{\partial y} &= xy^{x-1} - \frac{1}{y}
\end{aligned}$$

Ejercicio 92
Hallar $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, si $f\left(x,y\right) = \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{y}) + e^{\sin(x^2)} - \sin^2(xy)$.
Solución
Considerando a y como constante y aplicando las reglas de derivación:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{y})) + \frac{\partial}{\partial x}(e^{\sin x^2}) - \frac{\partial}{\partial x}(\sin^2(xy))\\
\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x} &= 0 + e^{\sin x^2}\frac{\partial}{\partial x}(\sin x^2) - 2\sin(xy)\frac{\partial}{\partial x}(\sin(xy))\\
\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x} &= e^{\sin x^2}\cos(x^2)\frac{\partial}{\partial x}(x^2) - 2\sin(xy)\cos(xy)\frac{\partial}{\partial x}(xy)\\
\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x} &= e^{\sin x^2}\cos(x^2) \cdot 2x - \sin(2xy) \cdot y\\
\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x} &= 2x \cdot e^{\sin x^2}\cos(x^2) - y\sin(2xy)
\end{aligned}$$

Considerando a x como constante y aplicando las reglas de derivación:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{y})) + \frac{\partial}{\partial y}(e^{\sin(x^2)}) - \frac{\partial}{\partial y}(\sin^2(xy))$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{1+y} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{y} + 0 - 2\sin(xy)\cos(xy) \cdot \frac{\partial}{\partial y}xy$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}(1+y)} - x\sin(2xy)$$

Ejercicio 93

Sea la función $z = f(x,y) = \sinh(x+y) + \cosh(x-y)$. Demostrar que se satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2\cosh(x+y)$$

Solución

Calculamos las derivadas parciales de z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cosh(x+y) - \sinh(x-y)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cosh(x+y) + \sinh(x-y)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$\cosh(x+y) - \sinh(x-y) + \cosh(x+y) + \sinh(x-y) = 2\cosh(x+y)$$

$$2\cosh(x+y) = 2\cosh(x+y)$$

Ejercicio 94.

Sea la función $z = y^{\frac{y}{x}} \sin\left(\frac{y}{x}\right)$. Demostrar que se satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{x}$$

Solución

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^{\frac{y}{x}} \frac{\partial}{\partial x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) + \sin\left(\frac{y}{x}\right) \frac{\partial}{\partial x}\left(y^{\frac{y}{x}}\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^{\frac{y}{x}} \cos\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right) + \sin\left(\frac{y}{x}\right)\left(y^{\frac{y}{x}} \ln y\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} y^{\frac{y}{x}} \left(\cos\left(\frac{y}{x}\right) + \sin\left(\frac{y}{x}\right)\ln y\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = y^{\frac{y}{x}} \frac{\partial}{\partial y} \sin\left(\frac{y}{x}\right) + \sin\left(\frac{y}{x}\right) \frac{\partial}{\partial y}\left(y^{\frac{y}{x}}\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = y^{\frac{y}{x}} \cos\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{y^{\frac{y}{x}}}{x}\right)(1+\ln y)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y^{\frac{y}{x}}}{x}\left(\cos\left(\frac{y}{x}\right) + \sin\left(\frac{y}{x}\right)(1+\ln y)\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{y}{x}}\left(\cos\left(\frac{y}{x}\right) + \sin\left(\frac{y}{x}\right) + \sin\left(\frac{y}{x}\right)\ln y\right)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$\left(\frac{x}{y}\right)\left[-\left(\frac{y}{x^2}\right) y^{\frac{y}{x}} \left(\cos\left(\frac{y}{x}\right) + \sin\left(\frac{y}{x}\right)\ln y\right)\right] + \frac{y^{\frac{y}{x}}}{x}\left(\cos\left(\frac{y}{x}\right) + \sin\left(\frac{y}{x}\right) + \sin\left(\frac{y}{x}\right)\ln y\right) = \frac{z}{x}$$

$$\frac{(y)^{\frac{y}{x}}}{x}\left(\cos\left(\frac{y}{x}\right) + \sin\left(\frac{y}{x}\right) + \sin\left(\frac{y}{x}\right)\ln y - \cos\left(\frac{y}{x}\right) - \sin\left(\frac{y}{x}\right)\ln y\right) = \frac{z}{x}$$

$$\frac{y^{\frac{y}{x}}}{x}\sin\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{z}{x}$$

$$\frac{z}{x} = \frac{z}{x}$$

Ejercicio 95.
Si $z = (x-y)\, f\left(\frac{x}{y}\right)$, donde f es una función arbitraria, demostrar que:

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y}$$

Solución

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x-y) \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \left(\frac{1}{y}\right) + f\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{x-y}{y}\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + f\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x-y) \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + f\left(\frac{x}{y}\right) \cdot (-1)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}(x-y) \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - f\left(\frac{x}{y}\right)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$\frac{x}{y}\left(\frac{x-y}{y}\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{x}{y} f\left(\frac{x}{y}\right) - \left(\frac{x}{y^2}\right)(x-y)\frac{\partial f}{\partial y} - f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{z}{y}$$
$$\frac{x}{y^2}(x-y)\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{x}{y^2}(x-y)\frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{x}{y}\right) f\left(\frac{x}{y}\right) - f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{z}{y}$$
$$\frac{x}{y^2}(x-y)\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) + f\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y} - 1\right) = \frac{z}{y}$$
$$\left(\frac{x-y}{y}\right) f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{z}{y}$$
$$\frac{z}{y} = \frac{z}{y}$$

Ejercicio 96.
Hallar $\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y}$, $\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}$, si $\mathrm{w} = f(x,y,z) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{y}\right) + z^x - ch\left(y^z\right)$:
Solución
Considerando y e z como constantes y aplicando las reglas de derivación:

$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(z^x) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\cosh(y)^z\right)$$
$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) + z^x \ln z \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x) - 0$$
$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} = \frac{y^2}{x^2+y^2} \cdot \left(\frac{1}{y}\right) + z^x \ln z$$
$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2} + z^x \ln z$$

Considerando x e z como constantes y aplicando las reglas de derivación:

$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(z^x) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\cosh y^z\right)$$
$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y} = \frac{y^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) - \sinh\left(y^z\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(y^z\right)$$
$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y} = \frac{y^2}{x^2+y^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) - \sinh\left(y^z\right) \cdot z y^{z-1}\frac{\partial}{\partial y}(y)$$
$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2} - z y^z e^{-1} \sinh\left(y^z\right)$$

Considerando x e y como constantes y aplicando las reglas de derivación:

$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(z^x) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\cosh(y)^z\right)$$
$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z} = 0 + xz^{x-1} \cdot \frac{\partial}{\partial z}(z) - \sinh\left(y^z\right) \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(y^z\right)$$
$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z} = xz^{-1} - y^z \ln y \sinh\left(y^z\right)$$
$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z} = \frac{x}{z} - y^z \ln y \sinh\left(y^z\right)$$

Ejercicio 97.
Sea $f(x,y,z) = e^{xy} + \ln z - y^2$
Hallar $\left.\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}$, $\left.\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}$, $\left.\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}$
Solución

$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy}) + \frac{\partial}{\partial x}(\ln z) - \frac{\partial}{\partial x}(y^2)$$
$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} = e^{xy}\frac{\partial}{\partial x}(xy)$$

$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} = ye^{xy}$$

$$\left.\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x}\right|_{(1,1,1)} = 1 \cdot e^{(1)(1)} = e$$

$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\ln z) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2)$$
$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y} = e^{xy}\frac{\partial}{\partial y}(xy) - 2y\frac{\partial}{\partial y}(y)$$

$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y} = xe^{xy} - 2y$$

$$\left.\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y}\right|_{(1,1,1)} = 1 \cdot e^{1 \cdot 1} - 2 \cdot 1 = e - 2$$

$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(e^{xy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\ln z) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2)$$

$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z} = 0 + \frac{1}{z} - 0$$
$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z} = \frac{1}{z}$$

$$\left.\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}\right|_{(1,1,1)} = \frac{1}{1} = 1$$

Ejercicio 98.
Sea $\mathrm{w} = f(x,y,z) = xe^y + y^2 \ln z$. Determinar que se satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{1}{e^y}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y} - \frac{z}{y^2}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z} = xe^y + 2y\ln z$$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(xe^y) + \frac{\partial}{\partial x}(y^2 \ln z)\\
\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} &= e^y\\
\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(xe^y) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 \ln z)\\
\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} &= xe^y + 2y\ln z\\
\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(xe^y) + \frac{\partial}{\partial z}(y^2 \ln z)\\
\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} &= \frac{y^2}{z}
\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e^y}e^y + xe^y + 2y\ln z - \frac{z}{y^2}\cdot\frac{y^2}{z} &= xe^y + 2y\ln z\\
1 + xe^y + 2y\ln z - 1 &= xe^y + 2y\ln z\\
xe^y + 2y\ln z &= xe^y + 2y\ln z
\end{aligned}$$

Ejercicio 99.
Sea $\mathrm{w} = f(x,y,z) = z^{y^x} - y^x + x$.
Demostrar que se satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} + \frac{y\ln y}{x}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y} + \frac{\ln y}{z^{y^x-1}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z} - y^x\ln y = 1$$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} &= z^{y^x}\ln z\cdot y^x\ln y - y^x\ln y + 1\\
\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y} &= z^{y^x}\ln z\, xy^{x-1} - xy^{x-1}\\
\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z} &= y^x\cdot z^{y^x-1}
\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$\begin{gathered}
z^{y^x}\ln z\cdot y^x\ln y - y^x\ln y + 1 - \frac{y}{x}\ln y\left(z^{y^x}\ln z\cdot xy^{x-1} - xy^{x-1}\right) + \frac{\ln y}{z^{y^x-1}}\cdot y^x\cdot z^{y^x-1} - y^x\ln y = 1\\
y^x\cdot z^{y^x}\ln y\ln z - y^x\ln y + 1 - z^{y^x}\cdot y^x\ln y\ln z + y^x\ln y + y^x\ln y - y^x\ln y = 1\\
1 = 1
\end{gathered}$$

Ejercicio 100.
Sea $\mathrm{w} = f(x,y,z) = zg\left(\frac{x}{y}\right) + xh\left(\frac{x}{y}\right)$, donde g y h son funciones arbitrarias, demostrar que se satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{x}{y}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y} + \frac{z}{y}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z} = \frac{w}{y}$$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} &= z\frac{\partial g}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(\frac{1}{y}\right) + x\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(\frac{1}{y}\right) + h\left(\frac{x}{y}\right)\\
\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} &= \frac{z}{y}\frac{\partial g}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) + h\left(\frac{x}{y}\right)\\
\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y} &= z\frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) + x\frac{\partial h}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\\
\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y} &= -\frac{xz}{y^2}\frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x^2}{y^2}\frac{\partial h}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)\\
\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z} &= g\left(\frac{x}{y}\right)
\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$\frac{x}{y}\left[\frac{z}{y}\frac{\partial g}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{y}\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)+h\left(\frac{x}{y}\right)\right]-\frac{xz}{y^2}\frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x^2}{y^2}\frac{\partial h}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{z}{y}g\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{w}{y}$$

$$\frac{xz}{y^2}\frac{\partial g}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x^2}{y^2}\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{y}h\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{xz}{y^2}\frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x^2}{y^2}\frac{\partial h}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{z}{y}g\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{w}{y}$$

$$\frac{xz}{y^2}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)\right)+\frac{x^2}{y^2}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{\partial h}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)\right)+\frac{x}{y}h\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{z}{y}g\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{w}{y}$$

$$\frac{1}{y}\left[xh\left(\frac{x}{y}\right)+zg\left(\frac{x}{y}\right)\right]=\frac{w}{y}$$

$$\frac{w}{y}=\frac{w}{y}$$

2.5. Interpretación geométrica y física de las derivadas parciales de dos variables independientes

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\qquad (x, y) \mapsto z = f(x, y)$

Geométricamente, la primera derivada de una función de una variable representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto. Algo similar ocurre con las derivadas parciales f_x y f_y de una función de dos variables independientes. La gráfica de $f(x, y)$ es una superficie. Si se hace y constante ($y = y_0$), geométricamente se está cortando la superficie con el plano $y = y_0$. Por lo que $f_x(x_0, y_0)$ representa la pendiente de la recta tangente a dicha curva en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

La ecuación de esta recta está dada por:

$$x - x_0 = \frac{z - z_0}{f_x(x_0, y_0)} \quad \wedge \quad y = y_0 \tag{2.6}$$

Cuyo vector que da dirección a la recta es:

$$\vec{R}_1 = \langle 1, 0, f_x(x_0, y_0)\rangle \tag{2.7}$$

De manera análoga, $f_y(x_0, y_0)$ representa la pendiente de la recta a la curva de intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $x = x_0$, en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ (Alcázar, 2022).

La ecuación de la recta tangente está dada por:

$$y - y_0 = \frac{z - z_0}{f_y(x_0, y_0)} \quad \wedge \quad x = x_0 \tag{2.8}$$

Cuyo vector que da dirección a la recta es:

$$\vec{R}_2 = \langle 0, 1, f_y(x_0, y_0)\rangle \tag{2.9}$$

Si $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ existen, entonces existe un plano tangente a la superficie en (x_0, y_0, z_0) cuya ecuación es:

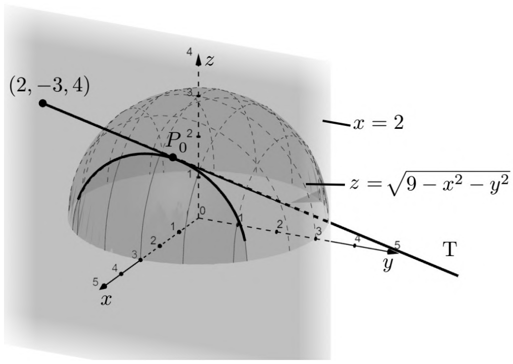
$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0 \tag{2.10}$$

La normal al plano está dada por:

$$\vec{N} = \langle f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1\rangle \tag{2.11}$$

Ejercicio 101.
¿Existe algún punto (x, y, z) en la superficie $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ donde la recta tangente a la curva de intersección de esta con el plano $x = 2$ pase por el punto $(2, -3, 4)$?
Solución
Representando las superficies dadas en la Figura 2.32:

Figura 2.32
Esquema ejercicio 101.



Ecuación de T:

$$y - y_0 = \frac{z - z_0}{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}} \quad ; \quad x_0 = 2$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{y_0}{\sqrt{9 - {x_0}^2 - {y_0}^2}}$$

$$\begin{aligned}
-3 - y_0 &= \frac{4 - z_0}{\frac{-y_0}{\sqrt{9 - {x_0}^2 - {y_0}^2}}} && ; \quad x_0 = 2 \\
\frac{y_0(3 + y_0)}{\sqrt{9 - {x_0}^2 - {y_0}^2}} &= 4 - z_0 && ; \quad x_0 = 2 \\
z_0 &= 4 - \frac{(3y_0 + {y_0}^2)}{\sqrt{9 - {x_0}^2 - {y_0}^2}} && ; \quad x_0 = 2 \\
z_0 &= \frac{4\sqrt{9 - {x_0}^2 - {y_0}^2} - (3y_0 + {y_0}^2)}{\sqrt{9 - {x_0}^2 - {y_0}^2}} && ; \quad x_0 = 2
\end{aligned}$$

Ahora, $P_0(x_0, y_0, z_0) \in z = f(x, y)$, entonces:

$$z_0 = \sqrt{9 - {x_0}^2 - {y_0}^2}$$

Igualando las dos ecuaciones anteriores:

$$\sqrt{9 - {x_0}^2 - {y_0}^2} = \frac{4\sqrt{9 - {x_0}^2 - {y_0}^2} - 3y_0 + {y_0}^2}{\sqrt{9 - {x_0}^2 - {y_0}^2}}$$

$$9 - {x_0}^2 - {y_0}^2 = 4\sqrt{9 - {x_0}^2 - {y_0}^2} - 3y_0 - {y_0}^2$$

$$9 - {x_0}^2 = 4\sqrt{9 - {x_0}^2 - {y_0}^2} - 3y_0$$

como $x_0 = 2$

$$9 - (2)^2 = 4\sqrt{9 - 2^2 - {y_0}^2} - 3y_0$$

$$(5 + 3y_0)^2 = \left(4\sqrt{5 - {y_0}^2}\right)$$

$$25 + 30y_0 + 9{y_0}^2 = 16\left(5 - {y_0}^2\right)$$
$$25 + 30y_0 + 9{y_0}^2 = 80 - 16{y_0}^2$$
$$25{y_0}^2 + 30y_0 - 55 = 0$$
$$5{y_0}^2 + 6y_0 - 11 = 0$$

$$y_0 = \frac{-6 \pm \sqrt{36+220}}{10}$$
$$y_0 = \frac{-6 \pm 16}{10}$$

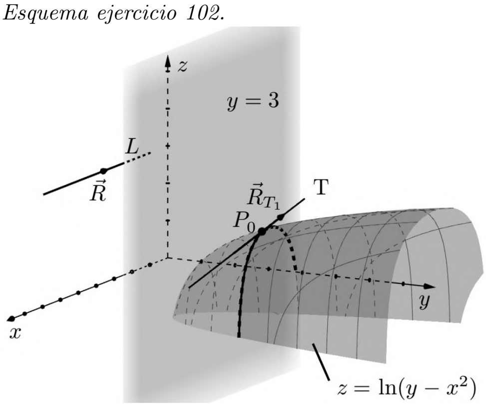
$$\begin{array}{lcl} y_0 = \frac{10}{10} = 1 & ; & y_0 = \frac{-22}{10} = -\frac{11}{5} \\ x_0 = 2 & & x_0 = 2 \\ z_0 = 2 & & z_0 = \frac{2}{5} \end{array}$$

$$z_0 = 2 \quad \text{para} \quad y_0 = 1 \ ; \ z_0 = \frac{2}{5} \quad \text{para} \quad y_0 = -\frac{11}{5}$$

Por lo tanto, existen dos puntos que cumplen con la condición: $P_1(2,1,2)$ y $P_2(2,-\frac{11}{5},\frac{2}{5})$.

Ejercicio 102.
¿En qué punto (x,y,z) de la intersección de la superficie $f(x,y) = \ln(y-x^2)$ con el plano $y=3$, la recta tangente es paralela a la recta $\frac{x-2}{2} = \frac{z+3}{-2}$; $y=3$?
Solución
Representando las superficies y recta dadas en la Figura 2.33:

Figura 2.33
Esquema ejercicio 102.



Sea $\vec{R}$ el vector dirección de la recta L:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{z+3}{-2} \quad ; \quad y = 3$$

$$\vec{R} = \langle 2, 0, -2 \rangle$$

Sea $\vec{R}$ el vector dirección de la recta tangente T_1:

$$\vec{R}_{T_1} = \left\langle 1, 0, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} \right\rangle$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{y-x^2} \cdot (-2x) = \frac{2x}{x^2-y}$$
$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{2x_0}{{x_0}^2 - y_0}$$
$$\vec{R}_{T_1} = \langle 1, 0, \frac{2x_0}{{x_0}^2 - y_0} \rangle$$

Como $T_1 \parallel L$ entonces:

$$\vec{R_{T_1}} \parallel \vec{R}$$
$$\vec{R_{T_1}} = \lambda\vec{R}$$

$$\left\langle 1, 0, \frac{2x_0}{{x_0}^2 - y_0} \right\rangle = \lambda\langle 2, 0, -2\rangle$$
$$\left\langle 1, 0, \frac{2x_0}{{x_0}^2 - y_0} \right\rangle = \langle 2\lambda, 0\lambda, -2\lambda\rangle$$

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda & \Rightarrow \ \lambda = \dfrac{1}{2} \\ 0 = 0 & \\ \dfrac{2x_0}{{x_0}^2 - y_0} = -2\lambda & \Rightarrow \ \dfrac{2x_0}{{x_0}^2 - y_0} = -2\left(\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\frac{2x_0}{{x_0}^2 - y_0} = -1$$

Como $\qquad y_0 = 3$

$$\frac{2x_0}{{x_0}^2 - y_0} = -1$$

$$2x_0 = -{x_0}^2 + 3$$

$${x_0}^2 + 2x_0 - 3 = 0$$
$$(x_0 + 3)(x_0 - 1) = 0$$

$$x_0 = -3 \quad \vee \quad x_0 = 1$$

$$x_0 = -3 \notin Df \quad , \quad \begin{aligned} x_0 &= 1 \\ y_0 &= 3 \\ z_0 &= f(x_0, y_0) \\ z_0 &= \ln(3 - 1^2) \\ z_0 &= \ln 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el punto que cumple con la condición dada es $P(1, 3, \ln 2)$.

Ejercicio 103.

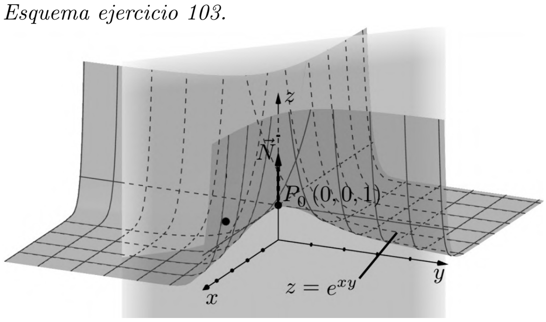
¿El plano tangente a la superficie $z = f(x, y) = e^{xy}$ en el punto $(0, 0, 1)$ pasa por el punto $(1, -1, 2)$?

Solución

Representando la superficie y el plano tangente en la Figura 2.34:

Figura 2.34

Esquema ejercicio 103.



Sea $\vec{N}$ el vector normal al plano tangente dado por:

$$\begin{aligned}
\vec{N} &= \left\langle \frac{\partial f\left(x_0 y_0\right)}{\partial x}, \frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial y}, -1 \right\rangle \\
\frac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial x} &= y e^{xy} \Rightarrow \frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x} = y_0 e^{x_0 y_0} \\
& \qquad\qquad \frac{\partial f\left(0, 0\right)}{\partial x} = 0 \\
\frac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial y} &= x e^{xy} \Rightarrow \frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial y} = x_0 e^{x_0 y_0} \\
& \qquad\qquad \frac{\partial f\left(0, 0\right)}{\partial y} = 0 \\
\vec{N} &= \langle 0, 0, -1 \rangle
\end{aligned}$$

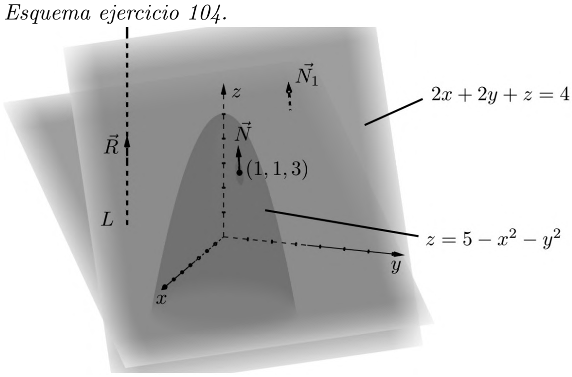
La ecuación del plano tangente en $P_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ está dado por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}\left(x - x_0\right) + \frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial y}\left(y - y_0\right) - \left(z - z_0\right) &= 0 \\
0(x - 0) + 0(y - 0) - (z - 1) &= 0 \\
-z + 1 &= 0 \\
z &= 1 \quad \text{ecuación del plano tangente en } (0, 0, 1)
\end{aligned}$$

El punto $(1, -1, 2) \notin$ al plano $z = 1$.

Ejercicio 104.
El plano tangente a la superficie $z = 5 - x^2 - y^2$ en el punto $(1, 1, 3)$ es:
a) Paralelo al plano $2x + 2y + z = 4$?
b) Perpendicular a la recta $x - y - z = 1 \quad \wedge \quad x + y + 2z = 1$?
Solución
Representando las superficies dadas en la Figura 2.35:

Figura 2.35
Esquema ejercicio 104.



a) Sea $\vec{N}$ el vector normal a la superficie en el punto $(1, 1, 3)$ que está dado por:

$$\begin{aligned}
\vec{N} &= \left\langle \frac{\partial f\left(1, 1\right)}{\partial x}, \frac{\partial f\left(1, 1\right)}{\partial y}, -1 \right\rangle \\
\frac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial x} &= -2x \ \Rightarrow \ \frac{\partial f\left(1, 1\right)}{\partial x} = -2 \\
\frac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial y} &= -2y \ \Rightarrow \ \frac{\partial f\left(1, 1\right)}{\partial y} = -2 \\
\vec{N} &= \langle -2, -2, -1 \rangle
\end{aligned}$$

Sea $\vec{N}_1$ el vector normal al plano $2x + 2y + z = 4$ que está dado por:

$$\vec{N}_1 = \langle 2, 2, 1 \rangle$$

Para que los planos sean paralelos se tiene:

$$\begin{aligned}
\vec{N} &\parallel \vec{N}_1 \\
\vec{N} &= \lambda\vec{N}_1 \\
\langle -2,-2,-1\rangle &= \lambda\langle 2,2,1\rangle \\
\langle -2,-2,-1\rangle &= \langle 2\lambda,2\lambda,\lambda\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} -2 = 2\lambda \\ -2 = 2\lambda \;\Rightarrow\; \lambda = -1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Por lo tanto los planos si son paralelos puesto que existe un único λ.
b) La ecuación de la recta L está dada en su forma general

$$\text{L:} \begin{cases} x-y-z=1 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$$

Hay que pasar a la forma simétrica para determinar el vector $\vec{R}$ que está dando dirección a L .
Eliminando y en la ecuación general:

$$\begin{aligned}
2x+z&=2 \\
x &= \frac{2-z}{2} = \frac{z-2}{-2}
\end{aligned}$$

Ahora eliminando z :

$$\begin{aligned}
3x-y&=3 \\
x &= \frac{y+3}{3}
\end{aligned}$$

Por lo que la ecuación simétrica de L es:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{y+3}{3} = \frac{z-2}{-2} \\
\vec{R} &= \langle 1,3,-2\rangle
\end{aligned}$$

Para que el plano tangente sea perpendicular a L, sus vectores deben ser paralelos, así se tiene:

$$\begin{aligned}
\vec{N} &\parallel \vec{R} \\
\vec{N} &= \lambda\vec{R} \\
\langle -2,-2,-1\rangle &= \lambda\langle 1,3,-2\rangle \\
\langle -2,-2,-1\rangle &= \langle \lambda,3\lambda,-2\lambda\rangle
\end{aligned}$$

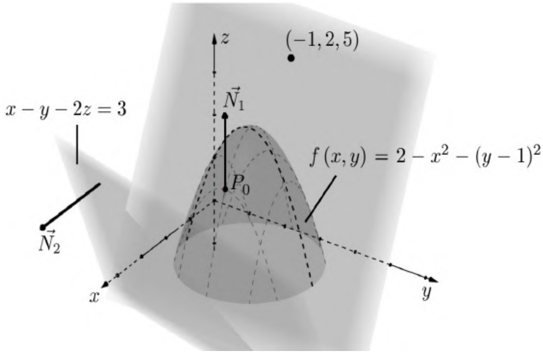
$$\begin{cases} -2 = \lambda & \Rightarrow\; \lambda = -2 \\ -2 = 3\lambda & \Rightarrow\; \lambda = -\dfrac{2}{3} \\ -1 = -2\lambda & \Rightarrow\; \lambda = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Como no existe un único λ, entonces el plano tangente no es perpendicular a la recta L.

Ejercicio 105.
¿En qué punto (x,y,z) el plano tangente a la superficie $f(x,y) = 2 - x^2 - (y-1)^2$ que contiene al punto $(-1,2,5)$ es perpendicular al plano $x-y-2z=3$?
Solución
Representando las superficies dadas en la Figura 2.36:

Figura 2.36

Esquema ejercicio 105.



Sea $\overrightarrow{N_1}$ el vector normal al plano tangente a $f(x,y)$ en $P_0(x_0, y, z_0)$ dado por:

$$
\begin{aligned}
\vec{N_1} &= \left\langle \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}, -1 \right\rangle \\
\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= -2x \qquad \Rightarrow \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = -2x_0 \\
\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= -2(y-1) \;\Rightarrow \frac{\partial f(x_0,y_y)}{\partial y} = -2y_0 + 2 \\
\vec{N_1} &= \langle -2x_0, 2-2y_0, -1 \rangle
\end{aligned}
$$

Sea $\vec{N_2}$ el vector normal al plano $x - y - 2z = 3$ dado por:

$$\vec{N_2} = \langle 1, -1, -2 \rangle$$

Como el plano tangente es perpendicular al plano dado, entonces sus normales son perpendiculares también, así se tiene:

$$
\begin{gathered}
\vec{N_1} \perp \vec{N_2} \\
\vec{N_1} \cdot \vec{N_2} = 0 \\
\langle -2x_0, 2-2y_0, -1 \rangle \cdot \langle 1, -1, -2 \rangle = 0 \\
-2x_0 - 2 + 2y_0 + 2 = 0
\end{gathered}
$$

$$x_0 = y_0 \tag{2.12}$$

El punto (x_0, y_0, z_0) es parte de la ecuación, de la superficie, asi:

$$z_0 = 2 - {x_0}^2 - (y_0 - 1)^2 \tag{2.13}$$

Finalmente, el punto $(-1, 2, 5)$ es parte del plano tangente, por lo que:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) - (z - z_0) &= 0 \\
-2x_0(x - x_0) \; + (2 - 2y_0)(y - y_0) - (z - z_0) &= 0 \\
-2x_0(-1 - x_0) + (2 - 2y_0)(2 - y_0) - (5 - z_0) &= 0 \\
2x_0 + 2{x_0}^2 + 4 - 2y_0 - 4y_0 + 2{y_0}^2 - 5 + z_0 &= 0 \\
2{x_0}^2 + 2{y_0}^2 + 2x_0 - 6y_0 + z_0 - 1 &= 0
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$
\begin{cases}
x_0 = y_0 \\
1 - {x_0}^2 - {y_0}^2 + 2y_0 - z_0 = 0 \\
2{x_0}^2 + 2{y_0}^2 + 2x_0 - 6y_0 + z_0 - 1 = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
1 - 2{x_0}^2 + 2x_0 - z_0 = 0 & (2.12) \text{ en } (2.13) \\
4{x_0}^2 - 4x_0 + z_0 - 1 = 0 & (2.12) \text{ en } (2.14)
\end{cases}
$$

Eliminando z_0:

$$\begin{aligned} 2{x_0}^2 - 2x_0 &= 0 \\ 2x_0\left(x_0 - 1\right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} x_0 = 0 & \vee & x_0 = 1 \\ y_0 = 0 & & y_0 = 1 \\ z_0 = f\left(0,0\right) = 1 & & z_0 = f\left(1,1\right) = 1 \end{array}$$

Por lo que existen dos puntos en la superficie que cumplen con las condiciones dadas: $P_1(0,0,1)$ y $P_2(1,1,1)$.

Ejercicio 106.
Determinar los puntos, de la superficie $z = y^3 - xy^3 + 2x^2 - 1$ donde el plano tangente sea perpendicular a la recta tangente a la curva $C_1 : x - z = 0 \ \wedge \ y - z^2 = 0$ en el punto $(0,0,0)$

Solución
El vector normal al plano tangente en (x_0, y_0, z_0) está dado por:

$$\vec{N} = \left\langle \frac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial x}, \frac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial y}, -1 \right\rangle$$

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x} = -y^3 + 4x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial x} = 4x_0 - {y_0}^3$$

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y} = 3y^2 - 3xy^2 \ \Rightarrow \ \frac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial y} = 3{y_0}^2 - 3x_0{y_0}^2$$

$$\vec{N} = \left\langle 4x_0 - {y_0}^3, 3{y_0}^2 - 3x_0{y_0}^2, -1 \right\rangle$$

Sea:

$$C : \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = z^2 \end{array} \right.$$

Parametrizando:

$$C : \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = t^2 \\ z = t \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \vec{f}\left(t\right) &= \left\langle t, t^2, t \right\rangle \\ \vec{f}'\left(t\right) &= \left\langle 1, 2t, 1 \right\rangle \\ \vec{R} &= \vec{f}'\left(t_0\right) \end{aligned}$$

Se halla t_0 en $(0,0,0)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = t \\ 0 = t^2 \\ 0 = t \end{array} \right. \Rightarrow t_0 = 0$$

$$\vec{R} = \vec{f}'(0) = \left\langle 1, 0, 1 \right\rangle$$

Donde $\vec{R}$ en el vector que da dirección a la recta tangente a C. Como el plano tangente es perpendicular a la recta tangente a C, sus vectores son paralelos, asi se tiene:

$$\vec{N} \parallel \vec{R}$$

$$\vec{N} = \lambda \vec{R}$$

$$\left\langle 4x_0 - {y_0}^3, 3{y_0}^2 - 3x_0{y_0}^2, -1 \right\rangle = \lambda \left\langle 1, 0, 1 \right\rangle$$

$$\left\langle 4x_0 - {y_0}^3, 3{y_0}^2 - 3x_0{y_0}^2, -1 \right\rangle = \left\langle \lambda, 0, \lambda \right\rangle$$

$$\left\{ \begin{array}{r} 4x_0 - {y_0}^3 = \lambda \ \Rightarrow \ 4x_0 - {y_0}^3 = -1 \\ 3{y_0}^2 - 3x_0{y_0}^2 = 0 \ \Rightarrow \ 3{y_0}^2(1 - x_0) = 0 \\ -1 = \lambda \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \end{array} \right.$$

$$
\begin{array}{lcl}
x_0 = 1 & \vee & y_0 = 0 \\
y_0 = \sqrt[3]{5} & & x_0 = -\frac{1}{4}
\end{array}
$$

$$
z_0 = f(1, \sqrt[3]{5}) \ , \ z_0 = f\left(-\frac{1}{4}, 0\right)
$$

Por lo tanto existen dos puntos $P_1(1, \sqrt[3]{5}, f(1, \sqrt[3]{5}))$ y $P_2\left(-\frac{1}{4}, 0, f\left(-\frac{1}{4}, 0\right)\right)$ que cumplen con la condición dada.

En cuanto a la interpretación fisica de las derivadas parciales se dice: "Se pueden interpretar cómo razones de cambio. Si $z = f(x, y)$, entonces $\frac{\partial z}{\partial x}$ representa la razón de cambio de z respecto a x cuando y permanece constante. De manera similar, $\frac{\partial z}{\partial y}$ representa la razón de cambio de z respecto a y cuando x es constante" (Stewart, 2012, p. 301).

Ejercicio 107.

La temperatura distribuida en cualquier punto (x, y) de una placa plana delgada en $°C$ está dada por:

$$
T(x, y) = xe^{y-1} \quad (x \geq 0, y \geq 0)
$$

Donde x e y se miden en cm.

Hallar $\frac{\partial T}{\partial x}$(2,1) y $\frac{\partial T}{\partial y}(2,1)$ e interpretar fisicamente estos resultados.

Solución

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial T}{\partial x} = e^{y-1} \\
&\frac{\partial T}{\partial x}(2,1) = e^{1-1} = e^0 = 1 \ °C/\text{cm}.
\end{aligned}
$$

Lo que significa que la temperatura se incrementará en aproximadamente $1°C$ al variar x, de 2 a 3 e y manteniéndose constante en 1.

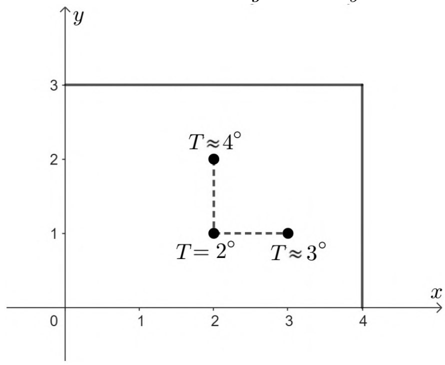
$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial T}{\partial y} = xe^{y-1} \\
&\frac{\partial T}{\partial y}(2,1) = 2 \cdot e^{1-1} = 2 \ °C/\text{cm}.
\end{aligned}
$$

Lo que significa que la temperatura se incrementará en aproximadamente $2°C$ al variar y de 1 a 2 y x manteniéndose constante en 2.

Estas variaciones de temperatura están representadas en la Figura 2.37.

Figura 2.37

Variaciones de T a lo largo de x e y



Ejercicio 108.

La presión en (Pa.) distribuida sobre una placa delgada plana está dada por:

$$
P(x, y) = x^3 - 3xy + y^3 \quad (x \geqslant 0, y \geq 0)
$$

Donde x e y están en cm.

a) ¿En qué puntos (x, y) de la placa, la variación de la presión es de 6 psi por unidad de cambio x ?

b) ¿En qué puntos (x, y) de la placa, la variación de la presión es de 3 psi por unidad de cambio en y ?

Solución

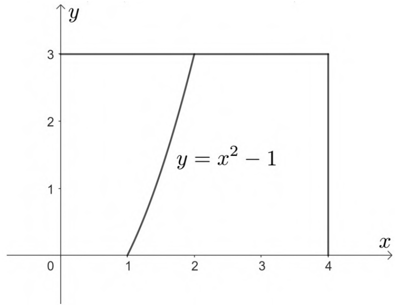
a)

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x} &= 6 \text{ Pa/cm.}\\ \frac{\partial P}{\partial x} &= 3x^2 - 3y\\ 3x^2 - 3y &= 6\\ x^2 - y &= 2\\ y &= x^2 - 2\end{aligned}$$

Por lo tanto la variación de la presión es de 6 Pa/cm. por unidad de cambio en $x \forall (x, y) \in y = x^2 - 2$, lo cual se muestra en la Figura 2.38.

Figura 2.38

Puntos (x, y) *donde* $P = 6$ Pa/cm.



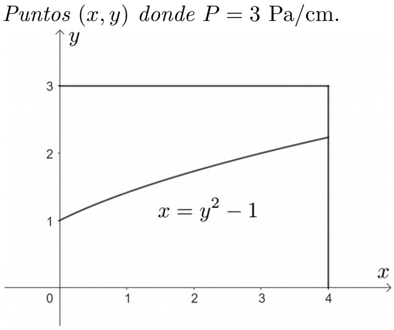
Ahora:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} &= 3 \text{ Pa/cm.}\\ \frac{\partial P}{\partial y} &= -3x + 3y^2\\ -3x + 3y^2 &= 3\\ -x + y^2 &= 1\\ x &= y^2 - 1\end{aligned}$$

Por lo tanto la variación de presión en de 3 Pa/cm. por unidad de cambio en $y \forall (x, y) \in x = y^2 - 1$, lo cual se muestra en la Figura 2.39.

Figura 2.39

Puntos (x, y) *donde* $P = 3$ Pa/cm.



Ejercicio 109.

Una fábrica produce "x" cortadoras de acero e "y" cortadoras de aluminio, cuyo costo (en \$) de producirlas está dado por.

$$C(x, y) = \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{20} + 2xy - 15x - 5y$$

Actualmente se producen 20 cortadoras de acero y 50 cortadoras de aluminio.
a) Calcule $\frac{\partial C}{\partial x}(20, 50)$ e interprete físicamente este resultado
b) Utilice el resultado en a) para obtener el costo aproximado si el número de cortadoras de acero aumenta a 24 y el número de cortadoras de aluminio permanece constante.
c) Calcule $\frac{\partial C}{\partial y}(20, 50)$ e interprete físicamente este resultado
d) Utilice el resultado en c) para obtener el costo aproximado si el número de cortadras de aluminio aumenta a 55 y el número de cortadoras de acero permanece constante.

Solución
a)

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{x}{5} + 2y - 15$$
$$\frac{\partial C}{\partial x}(20, 50) = \frac{20}{5} + 2(50) - 15 = \$89$$

Lo que significa que si se produce la $21ava$ cortadora de acero el costo aumentará aproximadamente \$89, manteniendóse constante la producción de las 50 cortadoras de aluminio.
b) Como el costo aproximado de producir una unidad adicional de cortadoras de acero, es de \$89, entonces el costo aproximado de producir 4 unidades adicionales es:

$$\$89 \times 4 = \$356$$

c)

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{y}{10} + 2x - 5$$
$$\frac{\partial C}{\partial y}(20, 50) = \frac{50}{10} + 2(20) - 5 = \$40$$

Lo que significa que si se produce la $51ava$ cortadora de aluminio el costo aumentará aproximadamente \$40, manteniendo constante la producción de las 20 cortadoras de acero.
d) Como el costo aproximado de producir una unidad adicional de cortadoras de aluminio, es de 40, entonces el costo apoximado de producir las 5 unidádes adicionales es:

$$\$40 \times 5 = \$200$$

Ejercicio 110.
La densidad en kg/cm^2. en cualquier punto (x, y) de una placa está dada por:

$$d(x, y) = e^{x^2+y^2} \quad (x \geq 0, y \geq 0)$$

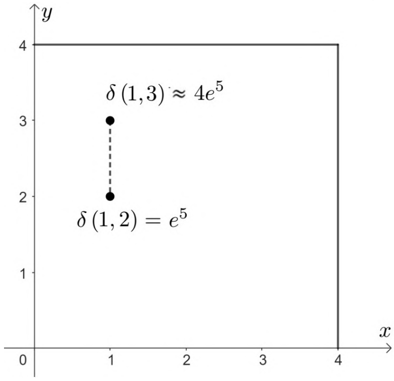
Donde la distancia se mide en centímetros.
Si en $(1, 2), d(x, y) = e^5$ kg/cm^2. indicar ¿en qué dirección, de la placa (x o y) a partir de este punto la densidad se incrementa a mayor ritmo? Indicar un punto en la placa donde ocurre esto.
Solución
Calculando:

$$\frac{\partial d}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial d}{\partial x}(1, 2) = 2e^5 \frac{\text{kg/cm}^2}{\text{cm}}$$
$$\frac{\partial d}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial d}{\partial y}(1, 2) = 4e^5 \frac{\text{kg/cm}^2}{\text{cm}}$$

La densidad se incrementa a mayor ritmo en la direción del eje y, pasando de 2 a 3 e y manteniéndose constante en 1. por lo tanto el punto es $(1, 3)$, como se muestra en la Figura 2.40:

Figura 2.40

Dirección de mayor crecimiento de $\delta(x, y)$



2.6. Derivadas parciales de orden superior y diferencial total.

"Lo mismo que sucede con las derivadas ordinarias, es posible encontrar derivadas parciales de varias variables de órdenes segundo, tercero y superiores, suponiendo que estas derivadas existen" (García, 2015, p. 102)
Se llama derivada parcial segunda de f respecto de las variables x_1 y x_2 a:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \tag{2.15}$$

Cuando las derivadas parciales se refieren a la misma variable se denota como:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \tag{2.16}$$

De manera análoga se pueden definir las derivadas parciales de cualquier orden. Asi por ejemplo:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial {x_1}^2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\right)$$
$$\frac{\partial^4 f}{\partial x_1 \partial {x_3}^2 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial {x_3}^2 \partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\right)\right)$$
$$\frac{\partial^4 f}{\partial x_1 \partial {x_3}^2 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\right)\right)$$

Ejercicio 111.
Sea $\quad z = f(x, y) = \ln\left(\frac{1}{e^{-x}} + \frac{1}{e^{-y}}\right)$
Hallar $\frac{\partial z}{\partial x^2}, \frac{\partial z}{\partial y^2}, \frac{\partial z}{\partial x \partial y} \frac{\partial z}{\partial y \theta x}$
Solución

$$z = \ln(e^x + e^y)$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^x}{e^x + e^y}\right)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{e^x(e^x + e^y) - e^x e^x}{(e^x + e^y)^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^y}{e^x + e^y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^y}{e^x + e^y}\right)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{e^y\left(e^x + e^y\right) - e^y e^y}{\left(e^x + e^y\right)^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{e^{x+y}}{\left(e^x + e^y\right)^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{e^x}{e^x + e^y}\right)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{-e^{x+y}}{\left(e^x + e^y\right)^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^y}{e^x + e^y}\right)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-e^{x+y}}{\left(e^x + e^y\right)^2}$$

Ejercicio 112.
Sea $\quad z = f\left(x, y\right) = x \ln y + y^2$.
Demostrar que se satisface la ecuación diferencial:
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{x}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2$$

Solución
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \ln y$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y} + 2y$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y} + 2y\right) = -\frac{x}{y^2} + 2$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2 y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y} + 2y\right) = \frac{1}{y}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\ln y) = 0$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:
$$0 + 2 - \frac{x}{y^2} + \frac{x}{y}\left(\frac{1}{y}\right) = 2$$
$$2 - \frac{x}{y^2} + \frac{x}{y^2} = 2$$
$$2 = 2$$

Ejercicio 113.
Sea $\quad z = f\left(x, y\right) = e^y(y \cos x - x \sin x)$
Demostrar que se satisface la ecuación diferencial:
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Solución
$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^y(-y \sin x - x \cos x - \sin x)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^y(\cos x) + (y \cos x - x \sin x)e^y = e^y(\cos x + y \cos x - x \sin x)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[e^y(-y\sin x - x\cos x - \sin x)\right]$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^y(-y\cos x + x\sin x - \cos x - \cos x)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^y(-y\cos x + x\sin x - 2\cos x)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[e^y(\cos x + y\cos x - x\sin x)\right]$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^y(\cos x) + (\cos x + y\cos x - x\sin x)e^y = e^y(2\cos x + y\cos x - x\sin x)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$e^y(-y\cos x + x\sin x - 2\cos x) + e^y(2\cos x + y\cos x - x\sin x) = 0$$
$$e^y(-y\cos x + x\sin x - 2\cos x + 2\cos x + y\cos x - x\sin x) = 0$$
$$e^y(0) = 0$$
$$0 = 0$$

Ejercicio 114.
Sea w $= g\left(\frac{u}{v}\right)$ donde g es una función arbitraria de $\left(\frac{u}{v}\right)$, demostrar que:

$$u^2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2uv\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v} + v^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$$

Solución

$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial u}\left(\frac{u}{v}\right)\cdot\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v}\frac{\partial g}{\partial u}\left(\frac{u}{v}\right)$$
$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial v}\left(\frac{u}{v}\right)\left(-\frac{u}{v^2}\right) = -\frac{u}{v^2}\frac{\partial g}{\partial v}\left(\frac{u}{v}\right)$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial u}\right)$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial g}{\partial u}\left(\frac{u}{v}\right)\right)$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\left(\frac{u}{v}\right)$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial v}\right)$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{u}{v^2}\frac{\partial g}{\partial v}\left(\frac{u}{v}\right)\right)$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v} = -\frac{1}{v^2}\left[\frac{u}{v}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\left(\frac{u}{v}\right) + \frac{\partial g}{\partial v}\left(\frac{u}{v}\right)\right]$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v} = -\frac{u}{v^3}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\left(\frac{u}{v}\right) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial g}{\partial v}\left(\frac{u}{v}\right)$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial v}\right)$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{u}{v^2}\frac{\partial g}{\partial v}\left(\frac{u}{v}\right)\right)$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = -u\left[\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\left(\frac{u}{v}\right)\left(-\frac{u}{v^2}\right) + \frac{\partial g}{\partial v}\left(\frac{u}{v}\right)\cdot\left(-\frac{2}{v^3}\right)\right]$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = \frac{u^2}{v^4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\left(\frac{u}{v}\right) + \frac{2u}{v^3}\frac{\partial g}{\partial v}\left(\frac{u}{v}\right)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$u^2\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\left(\frac{u}{v}\right)+2uv\left[-\frac{u}{v^3}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\left(\frac{u}{v}\right)-\frac{1}{v^2}\frac{\partial g}{\partial v}\left(\frac{u}{v}\right)\right]+v^2\left[\frac{u^2}{v^4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\left(\frac{u}{v}\right)+\frac{2u}{v^3}\frac{\partial g}{\partial v}\left(\frac{u}{v}\right)\right]=0$$

$$\frac{u^2}{v^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\left(\frac{u}{v}\right)-\frac{2u^2}{v^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\left(\frac{u}{v}\right)-\frac{2u}{v}\frac{\partial g}{\partial v}\left(\frac{u}{v}\right)+\frac{u^2}{v^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\left(\frac{u}{v}\right)+\frac{2u}{v}\frac{\partial g}{\partial v}\left(\frac{u}{v}\right)=0$$

$$\frac{u^2}{v^2}\left[\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\left(\frac{u}{v}\right)-2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\left(\frac{u}{v}\right)+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\left(\frac{u}{v}\right)\right]=0$$

$$\frac{u^2}{v^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\left(\frac{u}{v}\right)-\frac{\partial g}{\partial v}\left(\frac{u}{v}\right)\right)^2=0$$

$$\text{como}\qquad \frac{\partial g}{\partial u}=\frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial u}\left(\frac{u}{v}\right)-\frac{\partial g}{\partial v}\left(\frac{u}{v}\right)\right)^2=0$$

$$0=0$$

Ejercicio 115.
Sea $\mathrm{w}=uf(u-v)+vg(u-v)$, donde f y g con funciones arbitrarias de $(u-v)$, demostrar que:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=0$$

Solución

$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial u}=u\frac{\partial f(u-v)}{\partial u}+f(u-v)+v\cdot\frac{\partial g}{\partial u}(u-v)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial u}\right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial f(u-v)}{\partial u}+f(u-v)+v\cdot\frac{\partial g}{\partial u}(u-v)\right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=u\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u-v)+\frac{\partial f}{\partial u}(u-v)+\frac{\partial f}{\partial u}(u-v)+v\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u-v)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=u\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u-v)+2\frac{\partial f}{\partial u}(u-v)+\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u-v)$$

$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial v}=-u\frac{\partial f}{\partial v}(u-v)-v\frac{\partial g}{\partial v}(u-v)+g(u-v)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial v}\left(-u\frac{\partial f}{\partial v}(u-v)-v\frac{\partial g}{\partial v}(u-v)+g(u-v)\right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=u\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u-v)+v\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u-v)-\frac{\partial g}{\partial v}(u-v)-\frac{\partial g}{\partial v}(u-v)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=u\frac{\partial^2 f(u-v)}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u-v)-2\frac{\partial g}{\partial v}(u-v)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial v}\right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=\frac{\partial}{\partial u}\left(-u\frac{\partial f}{\partial v}(u-v)-v\frac{\partial g}{\partial v}(u-v)+g(u-v)\right)$$

$$\frac{u\partial^2 w}{\partial u\partial v}=-u\frac{\partial^2 f(u-v)}{\partial u\partial v}-\frac{\partial f}{\partial v}(u-v)-\frac{\partial^2 g(u-v)}{\partial udv}+\frac{\partial g}{\partial u}(u-v)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$u\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u-v)+2\frac{\partial f}{\partial u}(u-v)+\frac{v\partial^2 g}{\partial u^2}(u-v)+u\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u-v)+v\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u-v)-\frac{2\partial g}{\partial v}(u-v)$$
$$+2\left(-\frac{u\partial^2 f(u-v)}{\partial u\partial v}-\frac{\partial f(u-v)}{\partial v}-\frac{v\partial^2 g(u-v)}{\partial udv}+\frac{\partial g}{\partial u}(u-v)\right)=0$$

$$u\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u-v) - 2u\frac{\partial^2 f(u-v)}{\partial u \partial v} + u\frac{\partial^2 f(u-v)}{\partial v^2} + \frac{2\partial f}{\partial u}(u-v) - 2\frac{\partial f}{\partial v}(u-v) + \frac{v\partial^2 g(u-v)}{\partial u^2}$$
$$-2v\frac{\partial^2 g(u-v)}{\partial u \partial v} + v\frac{\partial^2 g(u-v)}{\partial v^2} - 2\frac{\partial g}{\partial v}(u-v) + 2\frac{\partial g}{\partial u}(u-v) = 0$$
$$u\left[\frac{\partial^2 f(u-v)}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 f(u-v)}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f(u-v)}{\partial v^2}\right] + 2\left[\frac{\partial f(u-v)}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}(u-v)\right] +$$
$$v\left[\frac{\partial^2 g(u-v)}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 g(u-v)}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g(u-v)}{\partial v^2}\right] + 2\left[\frac{\partial g}{\partial u}(u-v) - \frac{\partial g}{\partial v}(u-v)\right] = 0$$
$$u\left(\frac{\partial f(u-v)}{\partial u} - \frac{\partial f(u-v)}{\partial v}\right)^2 + v\left(\frac{\partial g(u-v)}{\partial u} - \frac{\partial g(u-v)}{\partial v}\right)^2 = 0$$

$$u(0) + v(0) = 0$$
$$0 = 0$$

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x, y) \mapsto z = f(x, y)$
Donde f es diferenciable en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

"Se denomina diferencial de $z = f(x, y)$ a la suma de las diferenciales parciales respecto a las variables independientes: $dz = d_f(x, y) = dz_x + dz_y$ (Quiroga, 2000, p. 36). Es decir:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy \tag{2.17}$$

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$(x_1, x_2, \ldots, n) \mapsto z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
Donde f es diferenciable en $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
La diferencial total de $z = f(\vec{x})$ es:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n \tag{2.18}$$

Dos de las aplicaciones destacadas de la diferencial total son los cálculos aproximados y cálculo de errores.
Para cálculos aproximados, si $|\Delta x_1| \ldots |\Delta x_n|$ son suficientemente pequeños, entoncess $\Delta z \cong dz$
En el cálculo de errores:

$$\text{error relativo} \quad = \frac{\Delta z}{z} \cong \frac{dz}{z} \tag{2.19}$$

$$\text{error porcentual} \quad = \frac{\Delta z}{z} \times 100 \cong \frac{dz}{z} \times 100 \tag{2.20}$$

Ejercicio 116.
Sea $z = x^2 + 2y^2$ y (x, y) cambia de $(1, 3)$ a $(0.95, 3.1)$. Calcule los valores de dz y Δz y compare.
Solución
Como $z = f(x, y) = x^2 + 2y^2$
La diferencial total es:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$
$$dz = 2xdx + 4ydy$$

Si $x_1 = 1$ pasa a $x_2 = 0.95 \Rightarrow \Delta x = dx = \text{-}0.05$
Si $y_1 = 3$ pasa a $y_2 = \ 3.1 \ \Rightarrow \Delta y = dy = 0.1$
Reemplazando en la diferencial total:

$$dz = 2(1)(\text{-}0.05) + 4(3)(0.1)$$
$$dz = 1.1$$

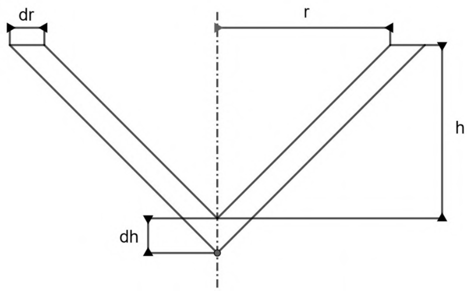
Se calcula ahora la variación real de z :

$$\Delta z = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$
$$\Delta z = f(0.95, 3.1) - f(1{,}3)$$
$$\Delta z = \left[(0.95)^2 + 2(3.1)^2\right] - \left[1^2 + 2(3)^2\right]$$
$$\Delta z = 1.12$$

Por lo tanto se concluye que $\Delta z \cong dz$.

Ejercicio 117.
Un envase metálico abierto tiene la forma de un cono de 1.5 m. de altura interior y 50 cm de radio interior, con un esperor de 2 mm. Si el costo del material a ser utilizado es de \$0,40 c/ cm^3. Aproximar mediante diferenciales el costo total del material empleado en la elaboración del envase.
Solución
Representando el envase indicado en la Figura 2.41:

Figura 2.41
Esquema ejercicio 117



Sea:
C_T : costo total del material
ΔV : cantidad exacta de material
C_m : costo del material
dV : cantidad aproximada de material
h : altura interior
r : radio interior
dh : variación de la altura
dr : variación del radio

Donde: $C_m = \$0.40\ \text{c/cm}^3$.
$h = 150$ cm.
$r = 50$ cm.
$dr = 0.2$ cm.
$dh = 0.2$ cm.

Entonces:
$$C_T = \Delta V \cdot C_m$$
Pero:
$$\Delta V \cong dV$$
$$C_T = dV \cdot C_m$$
Ahora:
$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

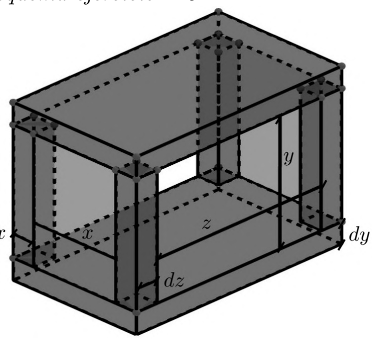
$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial V}{\partial n} \cdot dh$$
$$dV = \frac{2}{3}\pi r h dr + \frac{1}{3}\pi r^2 dh$$
$$dV = \frac{1}{3}\pi r dr(2h + r)$$
$$dV = \frac{1}{3}\pi \cdot (50)(0.2)[2(150) + 50]$$
$$dV = 3665.19\ \text{cm}^3$$

Por lo que: $C_T = 3665.19 \text{ cm}^3 \times \$0.40 \text{ c/cm}^3.$

$$C_T = \$1466.07$$

Ejercicio 118.
Un contenedor tiene la forma de un sólido rectangular y tiene como medidas interiores 6,4,8 metros y un espesor de 4cm. Emplee la diferencial total para aproximar la cantidad de material necesario para construir el contenedor.
Solución
Representando el contenedor en la Figura 2.42:

Figura 2.42
Esquema ejercicio 118



Sea: ΔV : cantidad exacta de material
dV : cantidad aproximada de material
dx : variación de x
dy : variación de y
dz : variación de z

Donde: $x = 6$ m.
$y = 4$ m.
$z = 8$ m.
$dx = dy = dz = 2(0.04 \text{ m}) = 0.08$ m.

Como:

$$V = xyz$$
$$\Delta V \cong dV$$
$$dV = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$
$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$
$$dV = yzdx + xz - dy + xydz$$
$$dV = dx(yz + xz + xy)$$
$$dV = 0.08(4 \times 8 + 6 \times 8 + 6 \times 4) \text{ m}^3.$$
$$dV = 8.32 \text{ m}^3.$$

Ejercicio 119.
El radio y la altura de un cilindro circular recto miden 25 y 50 cm. respectivamente, pero se comete un error de 1 mm. en la toma de cada una de las mediciones. Utilizando la diferencial total, estimar el error en el cálculo de su volumen. Hallar el error porcentual.
Solución

Sea: ΔV : error en el cálculo del volumen
dV : error aproximado en el cálculo del volumen
dv : error en la medición del radio
dh : error en la medición de la altura
r : radio del cilindro
h : altura del cilindro

Donde: $r = 25$ cm.

$h = 50$cm.

$dr = dh = 0.1$ cm.

Como:

$$V = \pi r^2 h$$

$$\begin{aligned}
&\Delta V \cong dV \\
&dV = \frac{\partial V}{\partial r}\,dr + \frac{\partial V}{\partial h}\,dh \\
&dV = 2\pi\, rh\, dr + \pi r^2 dh \\
&dV = \pi\, r\, dr(2h + r) \\
&dV = \pi(25)(0.1)(2 \times 50 + 25) \\
&dV = 312.5\pi\text{cm}^3.
\end{aligned}$$

Error relativo:

$$\begin{aligned}
&e_r = \frac{dV}{V} \\
&V = \pi r^2 h \\
&V = \pi(25)^2(50) \\
&V = 31.250\pi\text{cm}^3. \\
&e_r = \frac{312.5\ \text{cm}^3.}{31.220\ \text{cm}^3.} = 0.01
\end{aligned}$$

Error porcentual:

$$\begin{aligned}
&e_\rho = e_r \times 100 \\
&e_\rho = 0.01 \times 100 = 1\,\%
\end{aligned}$$

Ejercicio 120.

La resistencia de un alambre es proporcional a su longitud e inversamente proporcional al cuadrado del radio, dado por:

$$R = k\,\frac{L}{r^2}$$

Si el error en la medición de la longitud es del $5\,\%$ y el error en la medición del radio es del $2\,\%$. Cuál es el error en la medición de R?

Solución

Sea e_{ρ_L} : error porcentual en la medición de la longitud

e_{ρ_r} : error porcentual en la medición del radio

e_{ρ_R} : error porcentual en la medición de la resistencia

dR : error en la medición de la resistencia

dh : error en la medición de la longitud

dr : error en la medición del radio

Donde:

$$\begin{aligned}
e_{\rho_L} &= 5\,\% & e_{\rho_r} &= 2\,\% \\
e_{\rho_L} &= \frac{dL}{L} \times 100 & e_{\rho_r} &= \frac{dr}{r} \times 100 \\
5 &= \frac{dL}{L} \times 100 & 2 &= \frac{dr}{r} \times 100 \\
\frac{dL}{L} &= 0.05 & \frac{dr}{r} &= 0.02 \\
dL &= 0.05L & dr &= 0.02r
\end{aligned}$$

Como:
$$
\begin{aligned}
R &= K\frac{L}{r^2} \\
\Delta R &\cong dR \\
dR &= \frac{\partial R}{\partial L}dL + \frac{\partial R}{\partial r}dr \\
dR &= \frac{K}{r^2}dL - 2\frac{KL}{r^3}dr \\
dR &= \frac{K}{r^2}(0.05L)\cdot 2\frac{KL}{r^3}(0.02r) \\
dR &= 0.05\frac{KL}{r^2} - 0.04\frac{KL}{r^2} \\
dR &= \frac{KL}{r^2}(0.05-0.04) \\
\frac{dR}{\frac{KL}{r^2}} &= 0.01 \\
\frac{dR}{R} &= 0.01 \\
e_r &= \frac{dR}{R} = 0.01 \\
e_\rho &= e_r \times 100 \\
e_\rho &= 0.01 \times 100 \\
e_\rho &= 1\,\%
\end{aligned}
$$

2.7. Derivadas de funciones compuestas e implícitas.

La regla de la cadena para funciones de varias variables se la divide en dos casos:
1. Caso de una sola variable independiente t.
Sea $\quad f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\qquad\qquad (x, y) \mapsto z = f(x, y)$

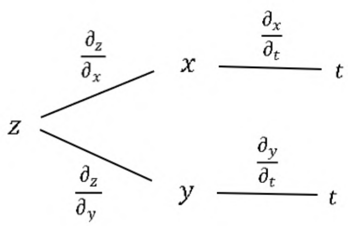
f es diferenciable de x e y.

$$x = g(t), \quad y = h(t)$$

g y h funciones derivables de t.
Entonces z es una función derivable de t :

Figura 2.43

Diagrama de árbol 1 variable independiente



$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{2.21}$$

Esta regla se puede extender a un número cualquiera de variables.
En ciertos casos se puede hallar $\frac{dz}{dt}$, sustituyendo x e y en términos de t antes de derivar.
2. Caso de dos variables independientes
Sea $\quad f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\qquad\qquad (x, y) \mapsto z = f(x, y)$

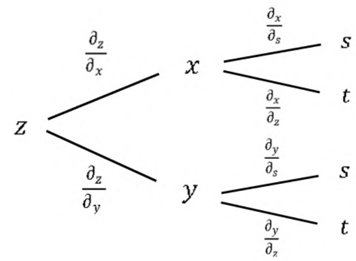
f diferenciable en x e y

$$x = g(s,t)\ ,\ y = h(s,t)$$

Si $\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial g}{\partial t}$ existen
Entonces z es una función derivable de s y t :

Figura 2.44

Diagrama de árbol 2 variables independientes



$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \tag{2.22}$$

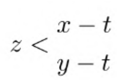
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \tag{2.23}$$

Esta regla también se puede extender a un número cualquiera de variables.
En ciertos casos se puede hallar $\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t}$, sustituyendo x e y en términos de s y t antes de derivar (Edwards y Larson ,2017).

Ejercicio 121.
Si $\quad z = e^{x^2+y^2} + \ln\left(\frac{x}{y}\right); x = \cos t; y = \sin t.$
Hallar $\frac{dz}{dt}$:
a) Utilizando la regla de la cadena
b) Sustituir x e y antes de derivar
Solución
a)

Figura 2.45

Diagrama de árbol ejercicio 121



$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$z = e^{x^2+y^2} + \ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2} + \frac{y}{x}\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2} + \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2} + \frac{y}{x}\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2} - \frac{1}{y}$$

$$x = \cos t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\sin t$$

$$y = \sin t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \cos t$$

Reemplazando en la regla de la cadena:

$$\frac{dz}{dt}=\left(2xe^{x^2+y^2}+\frac{1}{x}\right)(-\sin t)+\left(2ye^{x^2+y^2}-\frac{1}{y}\right)\cos t$$
$$\frac{dz}{dt}=\left(2\cos te^{\cos^2 t+\sin^2 t}+\frac{1}{\cos t}\right)(-\sin t)+\left(2\sin te^{\cos^2 t+\sin^2 t}-\frac{1}{\sin t}\right)\cos t$$
$$\frac{dz}{dt}=\left(2\cos te+\frac{1}{\cos t}\right)(-\sin t)+\left(2\sin te-\frac{1}{\sin t}\right)\cos t$$
$$\frac{dz}{dt}=-2e\sin t\cos t-\operatorname{tg}t+2e\sin t\cos t-\operatorname{ctg}t$$
$$\frac{dz}{dt}=-\frac{\sin t}{\cos t}-\frac{\cos t}{\sin t}$$
$$\frac{dz}{dt}=-\frac{\sin^2 t+\cos^2 t)}{\sin t\cos t}$$
$$\frac{dz}{dt}=-\frac{1}{\sin t\cos t}$$
$$\frac{dz}{dt}=-\csc t\sec t$$

b)

$$z=e^{\cos^2 t+\sin^2 t}+\ln\left(\frac{\cos t}{\sin t}\right)$$
$$z=e+\ln\left(\frac{\cos t}{\sin t}\right)$$
$$\frac{dz}{dt}=\frac{\sin t}{\cos t}\left(\frac{-\sin^2 t-\cos^2 t}{\sin^2 t}\right)$$
$$\frac{dz}{dt}=-\frac{\sin t}{\cos t}\cdot\frac{1}{\sin^2 t}$$
$$\frac{dz}{dt}=-\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{1}{\sin t}$$
$$\frac{dz}{dt}=-\csc t\sec t$$

Ejercicio 122.

Si $z=\frac{x-y}{x+y}; x=e^r, y=e^s$.

Hallar $\frac{\partial_2}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial^2 z}{\partial s\partial r}$

a) Utilizando la regla de la cadena

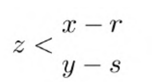
b) Reemplazar x e y antes de derivar.

Solución

a)

Figura 2.46

Diagrama de árbol ejercicio 122



Aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}$$
$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$
$$z=\frac{x-y}{x+y}$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x+y-(x-y)}{(x+y)^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2y}{(x+y)^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2e^s}{(e^r+e^s)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(x+y)(-1)-(x-y)}{(x+y)^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-x-y-x+y}{(x+y)^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-2x}{(x+y)^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-2e^r}{(e^r+e^s)^2}$$
$$x=e^r;\frac{\partial x}{\partial r}=e^r$$
$$y=e^s;\frac{\partial y}{\partial s}=e^s$$

Se halla $\frac{\partial z}{\partial r}$:

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{2e^s}{(e^r+e^s)^2}\cdot e^r$$
$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{2e^{s+r}}{(e^r+e^s)^2}$$

Se halla $\frac{\partial z}{\theta s}$:

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{-2e^r}{(e^r+e^s)^2}\cdot e^s$$
$$\frac{\partial z}{\partial s}=-\frac{2e^{r+s}}{(e^r+e^s)^2}$$

b)

$$z=\frac{e^r-e^s}{e^r+e^s}$$
$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{e^r(e^r+e^s)-(e^r-e^s)e^r}{(e^r+e^s)^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{2e^re^s}{(e^r+e^s)^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{2e^{r+s}}{(e^r+e^s)^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{-e^s(e^r+e^s)-(e^r-e^s)e^s}{(e^r+e^s)^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{e^s(-e^r-e^s-e^r+e^s)}{(e^r+e^s)^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{-2e^{r+s}}{(e^r+e^s)^2}$$

Ahora:

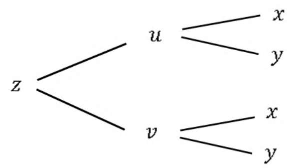
$$\frac{\partial^2 z}{\partial s\partial r}=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial s\partial r}=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{2e^{r+s}}{(e^r+e^s)^2}\right)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial s\partial r}=\frac{2e^{r+s}(e^r+e^s)^2-2e^{r+s}\cdot 2(e^r+e^s)\cdot e^s}{(e^r+e^s)^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial s\partial r}=\frac{2e^{r+s}(e^r+e^s)(e^r+e^s-2e^s)}{(e^r+e^s)^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial s\partial r}=\frac{2e^{r+s}(e^r-e^s)}{e^r+e^s}$$

Ejercicio 123.
Sea $z = f(u, v)$ una función diferenciable de u y v, donde $u = e^x - \ln y + 1, \quad v = \ln y - e^x$, demostrar que u satisface la ecuación diferencial.

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Solución

Figura 2.47
Diagrama de árbol ejercicio 123



Entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot e^x + \frac{\partial z}{\partial v} \left(-e^x\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \left(-\frac{1}{y}\right) + \frac{\partial z}{\partial v} \left(\frac{1}{y}\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y} \left(\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$e^x \left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\right) + \frac{1}{y} \left(\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\right) = 0$$
$$e^x (0) + \frac{1}{y} (0) = 0$$
$$0 = 0$$

Una de las aplicaciones de la regla de la cadena es hallar las derivadas de una función que está dada en forma implícita.
"Si la ecuación $F\left(x, y, z\right) = 0$ define a z implicitamente como función diferenciable de x e y , entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x\left(x, y, z\right)}{F_z\left(x, y, z\right)} \text{ y } \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y\left(x, y, z\right)}{F_z\left(x, y, z\right)} \tag{2.24}$$

$F_z\left(x, y, z\right) \neq 0''$ (Edwards y Larson ,2017).
Ejercicio 124.
Si $\quad xe^y + y \sin z - z^x = 0.$
Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ si se define a $z = f\left(x, y\right)$
Solución
Sea:

$$\mathrm{w} = xe^y + y \sin z - z^x = 0$$
$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} = e^y - z^x \ln z$$
$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y} = xe^y + \sin z$$
$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z} = y \cos z - xz^{x-1}$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x}}{\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}}$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{e^{y}-z^{x}\ln z}{y\cos z-xz^{x-1}}$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^{y}-z^{x}\ln z}{xz^{x-1}-y\cos z}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y}}{\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xe^{y}+\sin z}{y\cos z-xz^{x-1}}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xe^{y}+\sin z}{xz^{x-1}-y\cos z}$$

Ejercicio 125.
Sea: $\quad xy^2-z^2y+x^2z=0$
Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ si se define a $z=f\left(x,y\right)$.
Solución

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

Sea $\mathrm{w}=xy^2-z^2y+x^2z=0$:

$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x}=y^2+2xz$$
$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}=-2yz+x^2$$

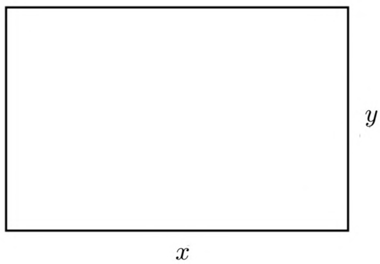
Aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x}}{\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}}$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y^2+2xz}{-2yz+x^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y^2+2xz}{2yz-x^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y}}{\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z}}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2xy-z^2}{-2yz+x^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2xy-z^2}{2yz-x^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2+2xz}{2yz-x^2}\right)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\left(2yz-x^2\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2+2xz\right)-\left(y^2+2xz\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(2yz-x^2\right)}{\left(2yz-x^2\right)^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\left(2yz-x^2\right)\left(2y+2x\frac{\partial z}{\partial y}\right)-\left(y^2+2xz\right)\cdot\left[2\cdot\left(y\frac{\partial z}{\partial y}+z\right)-0\right]}{\left(2yz-x^2\right)^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\left(2yz-x^2\right)\left[2y+2x\left(\frac{2xy-z^2}{2yz-x^2}\right)-\left(y^2+2xz\right)2\left[y\cdot\left(\frac{2xy-z^2}{2yz-x^2}\right)+z\right]\right]}{\left(2yz-x^2\right)^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\frac{2y\left(2yz-x^2\right)+2x\left(2xy-z^2\right)-2\left(y^2+2xz\right)\left(y\left(2xy-z^2\right)+z\left(2yz-x^2\right)\right]}{2yz-x^2}}{2yz-x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{4y^2z - 2x^2y + 4x^2y - 2xz^2 - 2\left(y^2 + 2xz\right)\left(2xy^2 - yz^2 + 2yz^2 - x^2z\right)}{\left(2yz - x^2\right)^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{4y^2z + 2x^2y - 2xz^2 - 2\left(y^2 + 2xz\right)\left(2xy^2 + yz^2 - x^2z\right)}{\left(2yz - x^2\right)^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{4y^2z + 2x^2y - 2xz^2 - 4xy^4 - 2y^3z^2 + 2x^2y^2z - 8x^2y^2z - 4xyz^3 + 4x^3z^2}{\left(2yz - x^2\right)^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{4y^2z - 2x^2y - 2xz^2 - 4xy^4 - 2y^3z^2 - 6x^2y^2z - 4xy^3 + 4x^3z^2}{\left(2yz - x^2\right)^2}$$

Ejercicio 126.
En un instante dado, la longitud, de un rectángulo mide 15 cm. y crece a la tasa de 0.5 cm/min, la longitud del otro lado es de 10 cm. y decrece a razón de 1 cm/min. Calcule la tasa de variación del área en ese instante.
Solución
Representando el rectángulo dado en la Figura 2.48:

Figura 2.48
Asignación de variables

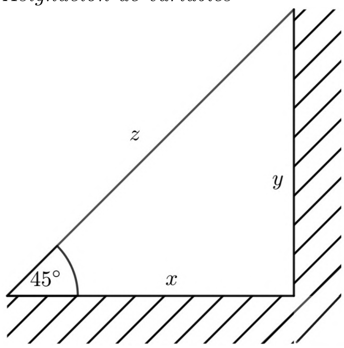


$x = 15$ cm.
$\frac{dx}{dt} = 0.5$ cm/min.
$y = 10$ cm.
$\frac{dy}{dt} = -1$ cm/min.
$\frac{dA}{dt} = \cdots ?$
Sea:
$$A = xy$$
$$A < \begin{matrix} x - t \\ y - t \end{matrix}$$
$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$
$$\frac{dA}{dt} = y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}$$
$$\frac{dA}{dt} = (10)(0.5) + (15)(-1)$$
$$\frac{dA}{dt} = -10 \text{ cm}^2/\text{min.}$$

Por lo tanto el área está disminuyendo a razón de 10 cm^2/min.

Ejercicio 127.
Una pared hace un ángulo de 90° con el suelo, una escalera de 8 m. de longitud está apoyada a la pared y su parte superior está resbalando a razón de 2 cm/seg.¿Qué tan rápido está cambiando el área del triángulo formado por la escalera, la pared y el suelo cuando la escalera hace un ángulo de 45° con el suelo?
Solución
Realizando un esquema del ejercicio en la Figura 2.49:

Figura 2.49
Asignación de variables



$z = 8$ m.
$\dfrac{dy}{dt} = -0.02$ m/seg.
$\dfrac{dA}{dt} = \cdots ?$

Sea:
$$A = \frac{1}{2}xy$$

$$A < \begin{matrix} x - t \\ y - t \end{matrix}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial A}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}y\frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}x\frac{dy}{dt}$$

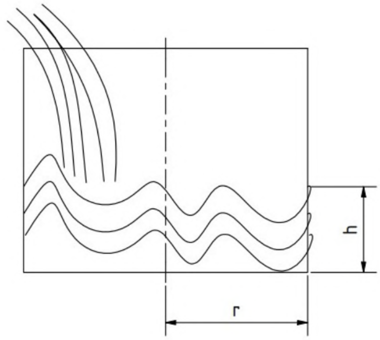
$$x = y \text{ por ser un triángulo isósceles}$$
$$\begin{aligned} z^2 &= x^2 + y^2 \\ (8)^2 &= x^2 + y^2 \\ 64 &= x^2 + y^2 \\ 0 &= 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \\ 2x\frac{dx}{dt} &= -2y\frac{dy}{dz} \\ \frac{dx}{dt} &= -\frac{dy}{dt} \\ \frac{dA}{dt} &= \frac{1}{2}x\frac{dx}{dt} - \frac{1}{2}x\frac{dy}{dt} \\ \frac{dA}{dt} &= 0 \text{ m}^2/\text{seg.} \end{aligned}$$

Por lo tanto no hay variación del àrea del triángulo formado por la escalera, la pared y el suelo

Ejercicio 128.
Se introduce agua en un recipiente de forma de un cilindro circular recto a una taza de $\frac{16}{3}\pi$ cm^3/min. El recipiente se ensancha de modo que, aún cuando conserva su forma circular, su radio se incrementa a una tasa de 0.5 mm/min.¿Qué tan rápido sube la superficie del agua cuando el radio es de 5 cm. y el volumen del agua en el recipiente es de 10π cm^3. ?
Solución
Bosquejo del ejercicio en la Figura 2.50:

Figura 2.50

Asignación de variables



$\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{16}{3}\pi \text{ cm}^3/\text{min.}$

$\dfrac{dv}{dt} = 0.05 \text{ cm/min.}$

$\dfrac{dh}{dt} = \cdots ?$

$r = 5$ cm.

$V = 10\pi$ cm^3.

Sea:

$$V = \pi r^2 h$$

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{10\pi}{\pi(5)^2} = \frac{2}{5} \text{ cm.}$$

$$V < \begin{matrix} r - t \\ h - t \end{matrix}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt} - \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt}}{\frac{\partial V}{\partial h}}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt} - 2\pi r h \frac{dr}{dt}}{\pi r^2}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\frac{16}{3}\pi - 2\pi(5)\left(\frac{2}{5}\right)(0.05)}{25\pi}$$

$$\frac{dh}{dt} = 0.21 \text{ cm/min.}$$

Ejercicio 129.

Una cantidad de gas obedece la ley del gas ideal $PV = KT$ con $K = 1.5$, y el gas está encerrado en un recipiente cuyo volumen está aumentando a razón de 0.5 m^3/min. Si en el instante en que el volumen es de 10 m^3, la presión es de 3 pascales y decrece a razón de 0.2 pa/min. Calcule la tasa de variación de la temperatura en ese instante.

Solución

$K = 1.5$

$\dfrac{dV}{dt} = 0.5 \text{ m}^3/\text{min.}$

$V = 10$ m^3.

$P = 3$ Pa.

$\dfrac{dP}{dt} = -0.2 \text{ Pa/min.}$

$\dfrac{dT}{dt} = \cdots ?$

Como:
$$PV = KT$$
$$T = \frac{PV}{K}$$
$$T < \begin{matrix} P - t \\ V - t \end{matrix}$$
$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial P} \cdot \frac{dP}{dt} + \frac{\partial T}{\partial V} \cdot \frac{dV}{dt}$$
$$\frac{dT}{dt} = \frac{V}{K}\frac{dP}{dt} + \frac{P}{K}\frac{dV}{dt}$$
$$\frac{dT}{dt} = \frac{10}{1.5}(-0.2) + \frac{3}{1.5}(0.5)$$
$$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{3}\ {}^{\circ}\mathrm{C/min.}$$

Ejercicio 130.

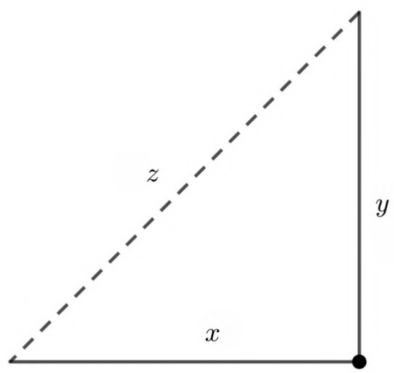
Un automóvil viaja en dirección Sur por una carretera a 100Km/hr, otro automóvil viaja en dirrección Este por otra carretera a 60 km/hr, los automóviles se acercan al cruce de estas dos carreteras ¿A qué razón cambia la distancia entre los dos autos cuando están a 4 km. y 3 km. respectivamente del cruce?

Solución

Bosquejo del ejercicio en la Figura 2.51:

Figura 2.51

Asignación de variables



$\frac{dy}{dt} = 100$ km/hr.

$\frac{dx}{dt} = 60$ km/hr.

$\frac{dz}{dt} = \cdots ?$

$y = 4$ km.

$x = 3$ km.

Sea:
$$z^2 = x^2 + y^2$$
$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{z}$$
$$z = \sqrt{(4)^2 + (3)^2}$$
$$z = 5 \text{ km.}$$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{3(60) + 4(100)}{5.}$$
$$\frac{dz}{dt} = 116 \text{ km/hr.}$$

2.8. Derivada dirrecional.

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x, y) \mapsto z = f(x, y)$

Si f es diferenciable en x e y, la derivada direccional de f en la dirección de $\vec{u}$ está dada por:

$$D_{\vec{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{u} \tag{2.25}$$

Donde:

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} \tag{2.26}$$

Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen

$$\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} \tag{2.27}$$

$$\vec{u} = \cos\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath} \tag{2.28}$$

Geométricamente, $D_{\vec{u}} f(P_0)$ representa la pendiente de la recta tg a una curva C en la dirección de $\vec{u}$.
Físicamente, $D_{\vec{u}} f(P_0)$ da la razón de cambio de f con respecto a la distancia en el plano xy, medida en la dirección de $\vec{u}$.
El valor máximo de $D_{\vec{u}} f(x_0, y_0)$ es $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$ y se presenta cuando $\vec{u}$ tiene la misma dirección que el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ (Stewart, 2012).
El valor mínimo, de $D_{\vec{u}} f(x_0, y_0)$ es -$\|\nabla f(x_0, y_0)\|$ y se presenta cuando $\vec{u}$ tiene la dirección -$\nabla f(x_0, y_0)$.

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$(x, y, z) \mapsto \mathrm{w} = f(x, y, z)$

Si f es diferenciable en x, y, z, la derivada direccional de f en la dirección de $\vec{u}$ està dada por:

$$D_{\vec{u}} f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \vec{u} \tag{2.29}$$

Donde:

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \tag{2.30}$$

Si $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ existen.

$$\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k} \tag{2.31}$$

$$\vec{u} = \cos\alpha\vec{\imath} + \cos\beta\vec{\jmath} + \cos\gamma\vec{k} \tag{2.32}$$

Donde α, β, γ son los ángulos directores de $\vec{u}$.
El valor máximo de $D_{\vec{u}} f(x_0, y_0, z_0)$ es $\|\nabla f(x_0, y_0, z_0)\|$ y se presenta cuando $\vec{u}$ tiene la misma dirección del vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ (Stewart, 2012).
El valor mínimo de $D_{\vec{u}} f(x_0, y_0, z_0)$ es -$\|\nabla f(x_0, y_0, z_0)\|$ y se presenta cuando $\vec{u}$ tiene la dirección -$\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ (Palacios, 2017).

Ejercicio 131.
Sea la función $f(x, y) = 8 - x^2 - y^2$:
a) Hallar $\nabla f(2, 1)$
b) Utilizar $\nabla(2, 1)$ para hallar $D_{\vec{u}} f(2, 1)$ en la dirección de $P_1(2, 1)$ a $P_2(1, 2)$. Representar $\nabla f(2, 1)$ y $\vec{P_1P_2}$.
c) Interpretar física y geomètricamente el resultado obtenido on b).
Solución

a)

$$\nabla f(x, y) = \left\langle \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right\rangle$$

$$\nabla f(x, y) = \langle -2x, -2y \rangle$$

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left\langle \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right\rangle$$

$$\nabla f(2, 1) = \left\langle \frac{\partial f(2, 1)}{\partial x}, \frac{\partial f(2, 1))}{\partial y} \right\rangle$$

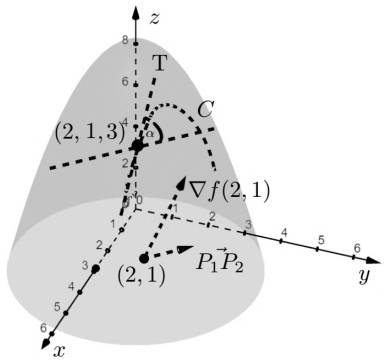
$\nabla f(2, 1) = \langle -4, -2 \rangle$ Representado en la Figura 2.52

b)
$$D_{\vec{u}}f\left(x_0, y_0\right) = \nabla f\left(x_0, y_0\right) \cdot \vec{u}$$
$$D_{\vec{u}}f(2,1) = \nabla f(2,1) \cdot \vec{u}$$
$$\vec{P_1P_2} = \langle 1, 2\rangle - \langle 2, 1\rangle$$
$$\vec{P_1P_2} = \langle -1, 1\rangle \text{ Representado en la Figura 2.52}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{P_1P_2}}{\|\vec{P_1P_2}\|}$$
$$\vec{u} = \frac{\langle -1, 1\rangle}{\sqrt{(-1)^2 + (1)^2}}$$
$$\vec{u} = \frac{\langle -1, 1\rangle}{\sqrt{2}}$$
$$\vec{u} = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$
$$D_{\vec{u}}f(2,1) = \langle -4, -2\rangle \cdot \left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$
$$D_{\vec{u}}f(2,1) = \frac{4}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}$$
$$D_{\vec{u}}f(2,1) = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

Figura 2.52

Representación del $\nabla f\left(2,1\right)$, el vector $\vec{P_1P_2}$ y el ángulo α



c) $D_{\vec{u}}f(2,1) = \frac{2}{\sqrt{2}}$

Físicamente, se tiene un aumento aproximado de $\frac{2}{\sqrt{2}}$ unidades con respecto a la distania en el plano xy, medida en la dirección del vector unitario $\vec{u} = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$.

Geométricamente, representa la pendiente de la recta tangente a la curva C en el punto $(2, 1, f(2,1))$

$$m_T = \operatorname{tg}\alpha = D_{\vec{u}}f(2,1) = \frac{2}{\sqrt{2}}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\sqrt{2}}$$
$$\alpha \approx 54{,}74^\circ \qquad \text{Representado en la Figura 2.52}$$

Ejercicio 132.

Sea $f\left(x, y, z\right) = \ln\left(\frac{x}{y^2+z^2}\right)$.

a) Hallar $\nabla f(2,1,1)$

b) Calcular $D_{\vec{u}}f(2,1,1)$ en la dirección del punto $(2,1,1)$ al punto $(1,3,2)$.

c) Graficar $\nabla f(2,1,1)$ y $\vec{P_1P_2}$

Solución

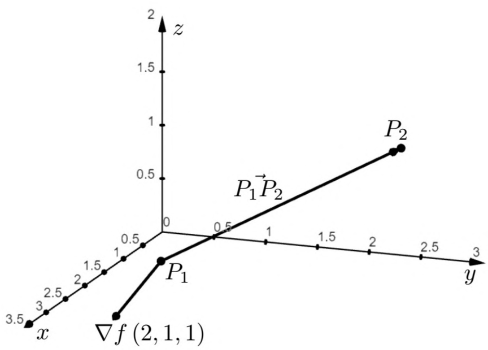
a) $$\nabla f\left(x,y,z\right)=\left\langle \frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right\rangle$$
$$\nabla f\left(x,y,z\right)=\left\langle \frac{y^2+z^2}{x}\cdot\frac{1}{y^2+z^2},\frac{y^2+z^2}{x}\cdot\frac{-2xy}{\left(y^2+z^2\right)^2},\frac{y^2+z^2}{x}\cdot\frac{-2xz}{\left(y^2+z^2\right)^2}\right)$$
$$\nabla f\left(x,y,z\right)=\left\langle \frac{1}{x},\frac{-2y}{y^2+z^2},\frac{-2z}{y^2+z^2}\right\rangle$$
$$\nabla f(2,1,1)=\left\langle \frac{1}{2},-1,-1\right\rangle \quad \text{Representado en la Figura 2.53}$$

b) $$D_{\vec{u}}f(2,1,1)=\nabla f(2,1,1)\cdot\vec{u}$$
$$\vec{P_1P_2}=\langle 1,3,2\rangle-\langle 2,1,1\rangle=\langle -1,2,1\rangle \quad \text{Representado en la Figura 2.53}$$
$$\vec{u}=\frac{\langle -1,2,1\rangle}{\sqrt{6}}$$
$$\vec{u}=\left\langle -\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right\rangle$$
$$D_{\vec{u}}f(2,1,1)=\left\langle \frac{1}{2},-1,-1\right\rangle\cdot\left\langle -\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right\rangle$$
$$D_{\vec{u}}f(2,1,1)=-\frac{1}{2\sqrt{6}}-\frac{2}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{6}}$$
$$D_{\vec{u}}f(2,1,1)=-\frac{7}{2\sqrt{6}}$$

c)

Figura 2.53

Representación del $\nabla f\left(2,1,1\right)$, el vector $\vec{P_1P_2}$



Ejercicio 133.
Sea $f\left(x,y\right)=e^{xy}$.
a) Encontrar la rapidez de cambio de f en el punto $(1,0)$ en la dirección del vector unitario $\vec{u}=\cos\frac{\pi}{6}\vec{\imath}+\sin\frac{\pi}{6}\vec{\jmath}$.
b) Hallar la dirección y la magnitud de la máxima rapidez de cambio de f en $(1,0)$
c) ¿En qué dirección f decrece más rápidamente?
Solución
a) $$D_{\vec{u}}f(1,0)=\nabla f(1,0)\cdot\vec{u}$$
$$\nabla f\left(x,y\right)=\left\langle \frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right\rangle$$
$$\nabla f\left(x,y\right)=\langle ye^{xy},xe^{xy}\rangle$$
$$\nabla f(1,0)=\langle 0,1\rangle$$
$$\vec{u}=\left\langle \cos\frac{\pi}{6},\sin\frac{\pi}{6}\right\rangle$$
$$\vec{u}=\left\langle \frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$D_{\vec{u}}f(1,0) = \langle 0,1\rangle \cdot \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$$

$$D_{\vec{u}}f(1,0) = \frac{1}{2}$$

b) $D_{\vec{u}_{\text{máx}}} f(1,0) = \|\nabla f(1,0)\| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$ en la dirección$\nabla f(1,0) = \langle 0,1\rangle$

$$\vec{u} = \langle 0,1\rangle$$

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\theta = 0\\ \sin\theta = 1\end{array}\right. \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

c) En la dirección $-\nabla f(1,0) = \langle 0,-1\rangle$

$$\vec{u} = \langle 0,-1\rangle$$

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\theta = 0\\ \cos\theta = -1\end{array}\right. \Rightarrow \theta = \frac{3}{2}\pi$$

Ejercicio 134.

Sea $f(x,y) = \ln\left(y-x^2\right)$:

a) Hallar $D_{\vec{u}}f\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$ en la dirección de la tangente a la curva $y = 1-x^2$.

b)¿Cuál es la magnitud de la mínima rapidez de cambio de f y en qué dirección (ángulo) se produce?

Solución

a) Sea $C : y = 1-x^2$

Parametrizando: $C : \left\{\begin{array}{l}x = t\\ y = 1-t^2\end{array}\right.$

Al punto $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$ le corresponde:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2} = t\\ \frac{3}{4} = 1-t^2\end{array}\right. \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$C : \vec{f}(t) = \left\langle t, 1-t^2\right\rangle$$

$$\vec{f}'(t) = \langle 1,-2t\rangle$$

Si $\vec{R}$ es el vector que da dirección a la recta tangente a C:

$$\vec{R} = \vec{f}'\left(\frac{1}{2}\right) = \langle 1,-1\rangle$$

$$\vec{u} = \frac{\langle 1,-1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{u} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle$$

$$D_{\vec{u}}f\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right) = \nabla f\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)\cdot\vec{u}$$

$$\nabla f\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right), \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)\right\rangle$$

$$\nabla f(x,y) = \left\langle \frac{-2x}{y-x^2}, \frac{1}{y-x^2}\right\rangle$$

$$\nabla f\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right) = \left\langle \frac{-2\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^2}, \frac{1}{\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right\rangle$$

$$\nabla f\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right) = \langle -2,2\rangle$$

$$D_{\vec{u}}f\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right) = \langle -2,2\rangle\cdot\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle$$

$$D_{\vec{u}}f\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$D_{\vec{u}}f\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right) = -\frac{4}{\sqrt{2}}$$

b) $D_{\vec{u}_{\text{mín}}} f\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right) = -\left\|\nabla f\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)\right\| = -\sqrt{(-2)^2+(2)^2} = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$ en la dirrección $-\nabla f\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right) = \langle 2,-2\rangle$.

$$\vec{u} = \frac{\langle 2,-2\rangle}{2\sqrt{2}}$$
$$\vec{u} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

$$\left\{\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Rightarrow \theta = 315°$$

Ejercicio 135.
Sea $f(x,y,z) = \operatorname{arc\,tg}\left(xy^2z\right)$

a) Hallar $D_{\vec{u}} f(1,1,2)$ en la dirección de la tg a la curva $C: \left\{\begin{array}{l} z = x^2+y^2 \\ x+y=2 \end{array}\right.$

b) Hallar la dirección y magnítud de máxima rapidez de cambio de f en $(1,1,2)$

Solución

a) Parametrizando C :

$$C: \left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = 2-t \\ z = 2t^2-4t+4 \end{array}\right.$$

El t que le corresponde al punto $(1,1,2)$:

$$\left\{\begin{array}{l} 1 = t \\ 1 = 2-t \\ 2 = 2t^2-4t+4 \end{array}\right. \Rightarrow t = 1$$

$$C: \vec{f}(t) = \left\langle t, 2-t, 2t^2-4t+4 \right\rangle$$
$$\vec{f}'(t) = \langle 1,-1,4t-4\rangle$$

Sea $\vec{R}$ el vector que da dirección a la recta tangente a C:

$$\vec{R} = \vec{f}'(1) = \langle 1,-1,0\rangle$$
$$\vec{u} = \frac{\langle 1,-1,0\rangle}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(0)^2}} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right\rangle$$
$$D_{\vec{u}} f(1,1,2) = \nabla f(1,1,2)\cdot\vec{u}$$
$$\nabla f(x,y,z) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle$$
$$\nabla f(x,y,z) = \left\langle \frac{y^2z}{1+\left(xy^2z\right)^2}, \frac{2xyz}{1+\left(xy^2z\right)^2}, \frac{xy^2}{1+\left(xy^2z\right)^2} \right\rangle$$
$$\nabla f(1,1,2) = \left\langle \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5} \right\rangle$$
$$D_{\vec{u}} f(1,1,2) = \left\langle \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right\rangle$$
$$D_{\vec{u}} f(1,1,2) = \frac{2}{5\sqrt{2}} - \frac{4}{5\sqrt{2}} = -\frac{2}{5\sqrt{2}}$$

b) $D_{\vec{u}_{\text{máx}}} f(1,1,2) = \|\nabla f(1,1,2)\| = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{5}$ en la dirección $\nabla f(1,1,2) = \left\langle \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5} \right\rangle$

$$\vec{u} = \frac{\left\langle \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5} \right\rangle}{\frac{\sqrt{21}}{5}}$$
$$\vec{u} = \left\langle \frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}} \right\rangle$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{21}} \Rightarrow \alpha \approx 64{,}2^\circ$$
$$\cos\beta = \frac{4}{\sqrt{21}} \Rightarrow \beta \approx 29{,}2^\circ$$
$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{21}} \Rightarrow \gamma \approx 77{,}39^\circ$$

Ejercicio 136.
Calcular la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de $z = \ln\left(x^2 - y\right)$ con el plano $y = \sqrt{3}x$ en el punto $(2, 2\sqrt{3}, \ln(4 - 2\sqrt{3}))$.
Solución
La dirección estará dada por el vector que da dirección a la recta que es parte del plano:

$$y = \sqrt{3}x$$
$$y' = \sqrt{3} = \operatorname{tg}\theta$$
$$\theta = 60^\circ$$
$$\vec{u} = \langle \cos 60^\circ, \sin 60^\circ \rangle$$
$$\vec{u} = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle$$

La pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie con el plano no es más que la derivada direccional, así se tiene:

$$D_{\vec{u}}f(2, 2\sqrt{3}) = m_T$$
$$D_{\vec{u}}f(2, 2\sqrt{3}) = \nabla f(2, 2\sqrt{3}) \cdot \vec{u}$$
$$\nabla f(x,y) = \left\langle \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right\rangle$$
$$\nabla f(x,y) = \left\langle \frac{2x}{x^2 - y}, -\frac{1}{x^2 - y} \right\rangle$$
$$\nabla f(2, 2\sqrt{3}) = \left\langle \frac{4}{4 - 2\sqrt{3}}, -\frac{1}{4 - 2\sqrt{3}} \right\rangle$$
$$D_{\vec{u}}f(2, 2\sqrt{3}) = \left\langle \frac{4}{4 - 2\sqrt{3}}, -\frac{1}{4 - 2\sqrt{3}} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle$$
$$D_{\vec{u}}f(2, 2\sqrt{3}) = \frac{4 - \sqrt{3}}{8 - 4\sqrt{3}}$$

Por lo tanto:

$$m_T = \frac{4 - \sqrt{3}}{8 - 4\sqrt{3}}$$

Ejercicio 137.
La presión distribuida sobre una placa está dada por $P(x,y) = \frac{2 - y^2}{x}$. Hallar si es posible la dirección (ángulo) en la que la presión disminuya a razón de 1 Pa/cm. en el punto $(1,1)$.
Solución
$D_{\vec{u}}P(1,1) = -1$ atm/cm.

$$\nabla f(x,y) = \left\langle \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y} \right\rangle$$
$$\nabla f(x,y) = \left\langle -\frac{2 - y^2}{x^2}, -\frac{2y}{x} \right\rangle$$
$$\nabla f(1,1) = \langle -1, -2 \rangle$$
$$\vec{u} = \langle a, b \rangle$$
$$D_{\vec{u}}P(1,1) = \nabla P(1,1) \cdot \vec{u}$$
$$-1 = \langle -1, -2 \rangle \cdot \langle a, b \rangle$$
$$-1 = -a - 2b$$

$$a + 2b = 1 \tag{2.33}$$

Ahora:

$$\|\vec{u}\| = 1$$

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = (1)^2$$

$$a^2 + b^2 = 1 \tag{2.34}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (2.33) y (2.34):

$$\begin{cases} a + 2b = 1 & \Rightarrow \quad a = 1 - 2b \\ a^2 + b^2 = 1 & \Rightarrow \quad (1-2b)^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 - 4b + 4b^2 + b^2 &= 1 \\ 5b^2 - 4b &= 0 \\ b(5b-4) &= 0 \\ b = 0; \quad b &= \frac{4}{5} \\ a = 1; \quad a &= -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

Entonces se tiene dos soluciones:

$$\vec{u}_1 = \langle 1, 0 \rangle \qquad\qquad \vec{u}_2 = \left\langle -\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5} \right\rangle$$

$$\begin{cases} \cos\theta = 1 \\ \sin\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \theta = 0^\circ \qquad\qquad \begin{cases} \cos\theta = \frac{3}{5} \\ \sin\theta = \frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \theta \approx 126.87^\circ$$

Ejercicio 138.
La temperatura distribuida sobre una superfiuie está dada por $T\,(x,y,z) = \ln(xy) - (z-1)^2$. Hallar si es posible la dirección (ángulo) en la que la temperatura aumente a razón de $1\,^\circ/$ cm. en el punto $(1,1,1)$.

Solución
$D_{\vec{u}}T(1,1,1) = 1^\circ/$ cm.

$$\begin{aligned} D\vec{u}T(1,1,1) &= \nabla T(1,1,1) \cdot \vec{u} \\ \nabla T\,(x,y,z) &= \left\langle \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right\rangle \\ \nabla T\,(x,y,z) &= \left\langle \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, -(z-1) \right\rangle \\ \nabla T(1,1,1) &= \langle 1, 1, 0 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \langle a, b, c \rangle \\ 1 &= \langle 1, 1, 0 \rangle \cdot \langle a, b, c \rangle \\ 1 &= a + b \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\| &= 1 \\ \left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)^2 &= (1)^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 1 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (2.35) y (2.36) :

$$\begin{cases} a + b = 1 & \Rightarrow \quad a = 1 - b \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 & \Rightarrow \quad c^2 = 1 - a^2 - b^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= 1 - (1-b)^2 - b^2 \\ c^2 &= 1 - 1 + 2b - b^2 - b^2 \\ c^2 &= 2b - 2b^2 \end{aligned}$$

Como $c^2 \geqslant 0 \Rightarrow 2b - 2b^2 \geqslant 0$ se va a tomar la solución $2b - 2b^2 = 0$.

$$\begin{aligned} 2b(1-b) &= 0 \\ b = 0 &\vee b = 1 \\ a = 1 &\vee a = 0 \\ c = 0 &\vee c = 0 \end{aligned}$$

Se tiene entonces:

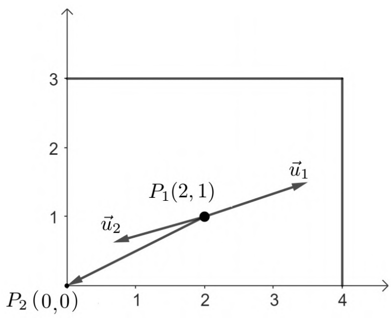
$$\begin{array}{cc} \vec{u}_1 = \langle 1,0,0\rangle & \vec{u}_2 = \langle 0,1,0\rangle \\ \cos\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0 & \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \\ \cos\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} & \cos\beta = 1 \Rightarrow \beta = 0 \\ \cos\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2} & \cos\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2} \end{array}$$

Ejercicio 139.
La presión distribuida en cualquier punto xy de una placa en Pa está dada por:

$$P\left(x,y\right) = 2x^2 + 3y^2$$

Donde x e y es la distancia que se mide en cm.
a) Hallar la rapidez de cambio de la presión en el punto $(2,1)$ en la dirección al origen.
b) Hallar la dirección en que la razón de cambio de P es máxima en $(2,1)$.
c) ¿Cuál es la razón de crecimiento mínimo y en qué dirección se produce?
Solución
Representando la paca en la Figura 2.54:

Figura 2.54
Dirrecciones de mayor y menor crecimiento de $P\left(x,y\right)$



a)

$$\begin{aligned} \vec{P_1P_2} &= \langle 0,0\rangle - \langle 2,1\rangle \\ \vec{P_1P_2} &= \langle -2,-1\rangle \\ \vec{u} &= \frac{\langle -2,-1\rangle}{\sqrt{5}} \\ \vec{u} &= \left\langle -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}P(2,1) &= \nabla P(2,1)\cdot\vec{u} \\ \nabla P\left(x,y\right) &= \left\langle \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}\right\rangle \\ \nabla P\left(x,y\right) &= \langle 4x, 6y\rangle \\ \nabla P(2,1) &= \langle 8,6\rangle \\ D_{\vec{u}}P(2,1) &= \langle 8,6\rangle \cdot \left\langle -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right\rangle \\ D_{\vec{u}}P(2,1) &= -\frac{16}{\sqrt{5}} - \frac{6}{\sqrt{5}} = -\frac{22}{\sqrt{5}}\ \text{Pa/cm.} \end{aligned}$$

b) En la dirección $\nabla P(2,1) = \langle 8,6\rangle$

$$\vec{u}_1 = \frac{\langle 8,6\rangle}{10}$$
$$\vec{u}_1 = \left\langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right\rangle$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{4}{5} \\ \sin\theta = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \theta \approx 36{,}86°$$

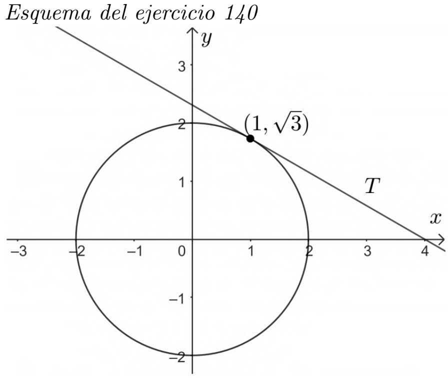
c) $D_{\vec{u}_{\text{mín}}} P(2,1) = -\|\nabla P(2,1)\| = -10$ Pa/cm. en la dirección de $-\nabla P(2,1) = \langle -8,-6\rangle$

$$\vec{u}_2 = \frac{\langle -8,-6\rangle}{10}$$
$$\vec{u}_2 = \left\langle -\frac{4}{5}, -\frac{3}{5} \right\rangle$$

$$\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{4}{5} \\ \sin\theta = -\dfrac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \theta \approx 216{,}86°$$

Ejercicio 140.
Sea la función $f(x,y) = \ln(xy)$ ¿El valor máximo de la derivada direccional de f ocurre en la dirección tangente a la curva $x^2 + y^2 = 4$ en el punto $(1, \sqrt{3})$?
Solución
Representando la curva y la recta tangente en la Figura 2.55:

Figura 2.55
Esquema del ejercicio 140



Para T: $x^2 + y^2 = 4$

$$2x + 2yy' = 0$$
$$y' = -\frac{x}{y}$$
$$y' = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg}\theta$$
$$\theta = \frac{5}{6}\pi$$

$$\vec{u}_T = \left\langle \cos\frac{5}{6}\pi, \sin\frac{5}{6}\pi \right\rangle$$
$$\vec{u}_T = \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

El valor máximo de la derivada direccional ocurre en $\nabla f(1, \sqrt{3})$.

$$\nabla f(x, y) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle$$
$$\nabla f(x, y) = \left\langle \frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right\rangle$$
$$\nabla f(1, \sqrt{3}) = \left\langle 1, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle$$
$$\vec{u} = \left\langle \frac{1, \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} \right\rangle$$
$$\vec{u} = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

como $\vec{u}_T \neq \vec{u}$

Entonces el valor máximo de la derivada direccional no ocurre en la dirección de T.

2.9. Planos tangentes y rectas normales a superficies.

Sea $F(x, y, z) = 0$ la ecuación de una superficie, donde F_x, F_y, F_z son continuas y no todas ceros en $P_0(x_0, y_0, z_0)$, entonces $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es normal al plano tangente a la superficie en P_0.
La ecuación del plano tangente a la gráfica de $F(x, y, z) = 0$ en $P_0(x_0, y_0, z_0)$, está dada por:

$$F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0) = 0 \tag{2.37}$$

$$\text{donde} \quad \nabla F(x_0, y_0, z_0) = \langle F_x(P_0), F_y(P_0), F_z(P_0) \rangle$$

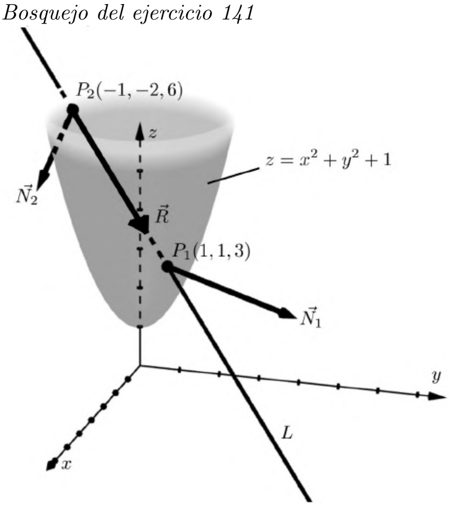
La recta normal a $F(x, y, z) = 0$ en P_0 es la recta que pasa a través de P_0 y sigue la dirección del vector normal al plano tangente a la superficie en P_0 (Stewart, 2012). La ecuación escrita en forma simétrica està dada por:

$$\frac{x - x_0}{F_x(P_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(P_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(P_0)} \tag{2.38}$$

Ejercicio 141.
Hallar el ángulo entre la recta $x = 1+2t, y = 1+3t, z = 3-3t$ y la normal a la superficie $z = x^2+y^2+1$ en el punto de intersección de la recta y la superficie.
Solución
Representando la superficie y la recta en la Figura 2.56:

Figura 2.56

Bosquejo del ejercicio 141



Se procede a hallar el punto de intersección de la recta con la superficie:

$$z = x^2 + y^2 + 1$$
$$3 - 3t = (1+2t)^2 + (1+3t)^2 + 1$$
$$3 - 3t = 1 + 4t + 4t^2 + 1 + 6t + 9t^2 + 1$$
$$13t^2 + 3t = 0$$
$$13t(t+1) = 0$$
$$t = 0 \quad \vee \quad t = -1$$

$$\text{si} \quad \begin{array}{l} t = 0 \Rightarrow P_1(1,1,3) \\ t = -1 \Rightarrow P_2(-1,-2,6) \end{array}$$

Por lo que se tiene dos puntos de intersección de la recta con la superficie.
Sea $\vec{R}$ el vector que da dirección a la recta dado por: $\vec{R} = \langle 2,3,-3\rangle$ y $\vec{N}$ el vector normal a la superficie en el punto P_0 dado por: $\vec{N} = \nabla F\left(x_0, y_0, z_0\right)$
Se pasa la ecuación de la superficie a la forma implícita:

$$\begin{aligned}
&F\left(x,y,z\right) = x^2 + y^2 - z + 1 = 0\\
&\nabla F\left(x,y,z\right) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right\rangle\\
&\nabla F\left(x,y,z\right) = \langle 2x, 2y, -1\rangle\\
&\vec{N_1} = \nabla F(P_1) = \nabla F(1,1,3) = \langle 2,2,-1\rangle\\
&\vec{N_2} = \nabla F(P_2) = \nabla F(-1,-2,6) = \langle -2,-4,-1\rangle
\end{aligned}$$

Utilizando el producto punto, se calcula el ángulo entre la recta y la normal a la superficie en los puntos de intersección:

$$\begin{aligned}
\cos\theta_1 &= \frac{\vec{R}\cdot\vec{N_1}}{\|\vec{R}\|\|\vec{N_1}\|}\\
\cos\theta_1 &= \frac{\langle 2,3,-3\rangle\cdot\langle 2,2,-1\rangle}{\sqrt{2^2+3^2+(-3)^2}\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}\\
\cos\theta_1 &= \frac{4+6+3}{3\sqrt{22}}\\
\cos\theta_1 &= \frac{13}{3\sqrt{22}}\\
\theta_1 &\approx 42{,}73^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos\theta_2 &= \frac{\vec{R}\cdot\vec{N_2}}{\|\vec{R}\|\|\vec{N_2}\|}\\
\cos\theta_2 &= \frac{\langle 2,3,-3\rangle\cdot\langle -2,-4,-1\rangle}{\sqrt{2^2+3^2+(-3)^2}\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+(-1)^2}}\\
\cos\theta_2 &= \frac{-4-12+3}{\sqrt{22}\sqrt{21}}\\
\cos\theta_2 &= -\frac{13}{\sqrt{462}}\\
\theta_2 &\approx 148{,}83^\circ
\end{aligned}$$

Ejercicio 142.
En qué puntos (x,y,z), de la superficie $x^2 + y^2 - xy + 2z^2 = 4$ son los planos tangentes paralelos al plano yz?
Solución
Sea $\vec{N_1}$: vector normal a la superficie.
$\vec{N_2}$: vector normal al plano yz.

$$\begin{aligned}
\vec{N_1} &= \nabla F\left(P_0\right)\\
\nabla F\left(x,y,z\right) &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right\rangle
\end{aligned}$$

Donde $F\left(x,y,z\right) = x^2 + y^2 - xy + 2z^2 - 4 = 0$.

$$\begin{aligned}
\nabla F\left(x,y,z\right) &= \langle 2x - y, 2y - x, 4z\rangle\\
\vec{N_1} &= \langle 2x_0 - y_0, 2y_0 - x_0, 4z_0\rangle\\
\vec{N_2} &= \langle 1,0,0\rangle
\end{aligned}$$

Como los planos son paralelos, entonces:

$$\vec{N_1}\|\vec{N_2}$$
$$\vec{N_1} = K\vec{N_2}$$

$$\langle 2x_0 - y_0, 2y_0 - x_0, 4z_0\rangle = K\langle 1,0,0\rangle$$
$$\langle 2x_0 - y_0, 2y_0 - x_0, 4z_0\rangle = \langle K,0,0\rangle$$

$$\begin{cases} 2x_0 - y_0 = K & (2.39)\\ 2y_0 - x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 2y_0 & (2.40)\\ 4z_0 = 0 \Rightarrow z_0 = 0 & (2.41)\end{cases}$$

$P_0 \in$ a la superficie, entonces:

$$x_0{}^2 + y_0{}^2 + 2z_0^2 - x_0y_0 = 4 \tag{2.42}$$

Reemplezando (2.40) y (2.41) en (2.42):

$$4y_0{}^2 + y_0{}^2 - 2y_0{}^2 = 4$$
$$3y_0{}^2 = 4$$
$$y_0 = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$P_1\left(\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right), \quad P_2\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$$

Ejercicio 143.
¿En qué puntos de la superficie $z^2 - y^2 - 2x = 0$, los planos tangentes son paralelos a la recta $x - 2 = \frac{z+1}{-1}; y = 1$ y, además pasa por el punto $(1, 0, -1)$?

Solución
Sea $\vec{R}$ el vector que da dirección a la recta, dado por:

$$\vec{R} = \langle 1, 0, -1\rangle$$

Sea $\vec{N}$ el vector normal al plano tangente en P_0 :

$$\vec{N} = \nabla F\,(x_0, y_0, z_0)$$
$$\nabla F = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right\rangle$$
$$\nabla F = \langle -2, -2y, 2z\rangle$$
$$\vec{N} = \nabla F\,(P_0) = \langle -2, -2y_0, 2z_0\rangle$$

El plano tangente es paralelo a la recta, se tiene:

$$\vec{N} \perp \vec{R}$$
$$\vec{N}\cdot\vec{R} = 0$$
$$\langle -2, -2y_0, 2z_0\rangle \cdot \langle 1, 0, -1\rangle = 0$$
$$-2 - 2z_0 = 0$$

$$z_0 = -1 \tag{2.43}$$

La ecuación del plano tangente en P_0 está dado por:

$$\frac{\partial F(P_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(P_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F(P_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0$$
$$-2\,(x - x_0) - 2y_0\,(y - y_0) + 2z_0\,(z - z_0) = 0$$

El punto $(1, 0, -1)$ es parte del plano tangente, entonces:

$$-2\,(1 - x_0) - 2y_0\,(0 - y_0) + 2z_0\,(-1 - z_0) = 0$$
$$-1 + x_0 + y_0{}^2 - z_0 - z_0^2 = 0 \tag{2.44}$$

Por último P_0 es parte de la superficie, por lo que:

$$z_0^2 - y_0{}^2 - 2x_0 = 0 \tag{2.45}$$

Resolviendo e1 sistema:

$$\begin{cases} z_0 = -1 \\ -1 + x_0 + {y_0}^2 - z_0 - z_0^2 = 0 \\ z_0^2 - {y_0}^2 - 2x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (2.43) \text{ en } (2.44): \\ (2.43) \text{ en } (2.45): \end{aligned} \quad \begin{cases} x_0 + {y_0}^2 - 1 = 0 \Rightarrow {y_0}^2 = 1 - x_0 \\ 1 - {y_0}^2 - 2x_0 = 0 \Rightarrow {y_0}^2 = 1 - 2x_0 \end{cases}$$

Igualando las dos ecuaciones anteriores:

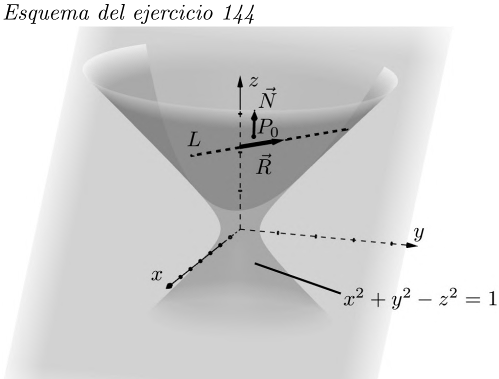
$$\begin{aligned} 1 - x_0 &= 1 - 2x_0 \\ -x_0 &= 0 \\ x_0 &= 0 \\ y_0 &= \pm 1 \\ z_0 &= -1 \end{aligned}$$

Por lo tanto existen dos puntos: $P_1(0, 1, -1), P_2(0, -1, -1)$.

Ejercicio 144.
Indique un punto si es que existe en la superficie $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ donde el plano tangente contenga a la recta dada por la intersección de los planos $x + y + z = 1,\ x + 3y - 3z = 3$.

Solución
Representando las superficies y la recta en la Figura 2.57:

Figura 2.57
Esquema del ejercicio 144



Sea la recta L: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 3y - 3z = 3 \end{cases}$
Para pasar a la forma simétrica:
Eliminando x:

$$\begin{aligned} -2y + 4z &= -2 \\ z &= \frac{y-1}{2} \end{aligned}$$

Eliminando y:

$$\begin{aligned} -2x - 6z &= 0 \\ z &= -\frac{x}{3} \end{aligned}$$

Obteniendo:

$$\frac{x}{-3} = \frac{y-1}{2} = z$$

Siendo $\vec{R}$ el vector que da dirección a la recta L:

$$\vec{R} = \langle -3, 2, 1 \rangle$$

Si $\vec{N}$ es el vector normal al plano tangente, entonces:

$$\begin{aligned}
\vec{N} &= \nabla F\left(x_0, y_0, z_0\right) \\
F\left(x, y, z\right) &= x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0 \\
\nabla F &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right\rangle \\
\nabla F &= \left\langle 2x, 2y, -2z \right\rangle \\
\vec{N} &= \nabla F(P_0) = \left\langle 2x_0, 2y_0, -2z_0 \right\rangle
\end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}
&\vec{N} \perp \vec{R}: \\
&\vec{N} \cdot \vec{R} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle 2x_0, 2y_0, -2z_0 \right\rangle \cdot \left\langle -3, 2, 1 \right\rangle &= 0 \\
-6x_0 + 4y_0 - 2z_0 &= 0 \qquad (2.46)
\end{aligned}$$

$P(0, 1, 0)$ es parte de la recta L y por ende será parte del plano cuya ecuación es:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(P_0)}{\partial x}\left(x - x_0\right) + \frac{\partial F(P_0)}{\partial y}\left(y - y_0\right) + \frac{\partial F(P_0)}{\partial z}\left(z - z_0\right) &= 0 \\
2x_0\left(x - x_0\right) + 2y_0\left(y - y_0\right) - 2z_0\left(z - z_0\right) &= 0 \\
2x_0\left(0 - x_0\right) + 2y_0\left(1 - y_0\right) - 2z_0\left(0 - z_0\right) &= 0 \\
-2{x_0}^2 + 2y_0 - 2{y_0}^2 + 2z_0^2 &= 0 \\
{x_0}^2 - y_0 + {y_0}^2 - z_0^2 &= 0 \qquad (2.47)
\end{aligned}$$

$P_0\ \left(x_0, y_0, z_0\right)$ es parte de la superficie, entonces:

$$ {x_0}^2 + {y_0}^2 - z_0^2 = 1 \qquad (2.48)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}
-6x_0 + 4y_0 - 2z_0 = 0 \\
{x_0}^2 - y_0 + {y_0}^2 - z_0^2 = 0 \\
{x_0}^2 + {y_0}^2 - 2{x_0}^2 = 1
\end{cases}$$

(2.47) - (2.48): $\quad -y_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 1$ (2.49)
(2.49) en (2.46): $\quad -6x_0 + 4 - 2z_0 = 0 \Rightarrow z_0 = 2 - 3x_0$ (2.50)
(2.49) y (2.50) en (2.48):

$$\begin{aligned}
{x_0}^2 + 1 - \left(2 - 3x_0\right)^2 &= 1 \\
{x_0}^2 - 4 + 12x_0 - 9{x_0}^2 &= 0 \\
-8{x_0}^2 + 12x_0 - 4 &= 0 \\
2{x_0}^2 - 3x_0 + 1 &= 0 \\
\left(2x_0 - 2\right)\left(2x_0 - 1\right) &= 0
\end{aligned}$$

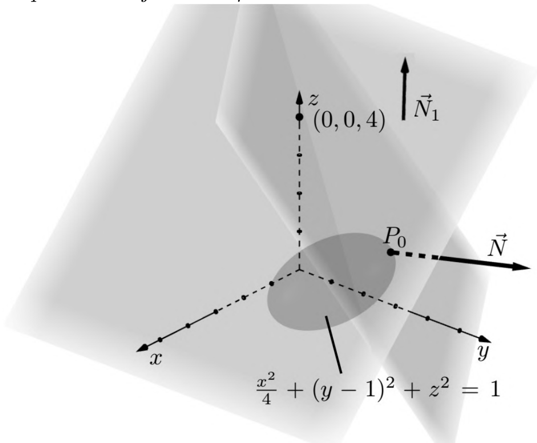
$$\begin{array}{lcl}
x_0 = 1 & \vee & x_0 = \frac{1}{2} \\
y_0 = 1 & & y_0 = 1 \\
z_0 = -1 & & z_0 = \frac{1}{2}
\end{array}$$

Por lo tanto existen dos puntos que satisfacen las condiciones planteadas: $P_1(1, 1, -1)$ y $P_2\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$.

Ejercicio 145.
Determinar los puntos (x, y, z) en la superficie $\frac{x^2}{4} + (y - 1)^2 + z^2 = 1$ donde el plano tangente es perpendicular al plano $x + z = 3$ y pasa por el punto $(0, 0, 4)$.

Solución
Representando las superficies y el plano en la Figura 2.58:

Figura 2.58
Esquema del ejercicio 145



Sea $\vec{N}$: el vector normal al plano tangente a la superficie
$\vec{N}_1$: el vector normal al plano dado.
Como los planos son perpendiculares, sus normales también lo son:

$$\vec{N} \perp \overrightarrow{N_1}$$
$$\vec{N} \cdot \vec{N}_1 = 0$$
$$\vec{N} = \nabla F\left(x_0.y_0, z_0\right)$$

$$F\left(x, y, z\right) = x^2 + 4(y-1)^2 + 4z^2 - 4 = 0$$
$$\nabla F = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right\rangle$$
$$\nabla F = \langle 2x, 8(y-1), 8z \rangle$$
$$\vec{N} = \nabla F(P_0) = \langle 2x_0, 8\left(y_0 - 1\right), 8z_0 \rangle$$
$$\vec{N}_1 = \langle 1, 0, 1 \rangle$$

$$\langle 2x_0, 8y_0 - 8, 8z_0 \rangle \cdot \langle 1, 0, 1 \rangle = 0$$
$$2x_0 + 8z_0 = 0$$

$$z_0 = -4z_0 \tag{2.51}$$

El punto $(0, 0, 4)$ es parte del plano tangente dado por:

$$\frac{\partial F(P_0)}{\partial x}\left(x - x_0\right) + \frac{\partial F(P_0)}{\partial y}\left(y - y_0\right) + \frac{\partial F(P_0)}{\partial z}\left(z - z_0\right) = 0$$
$$2x_0\left(x - x_0\right) + \left(8y_0 - 8\right)\left(y - y_0\right) + 8z_0\left(z - z_0\right) = 0$$
$$2x_0\left(0 - x_0\right) + \left(8y_0 - 8\right)\left(0 - y_0\right) + 8z_0\left(4 - z_0\right) = 0$$

$$-2{x_0}^2 - 8{y_0}^2 + 8y_0 + 32z_0 - 8z_0^2 = 0$$
$$-{x_0}^2 - 4{y_0}^2 + 4y_0 + 16z_0 - 4z_0^2 = 0 \tag{2.52}$$

P_0 es parte de la superficie por lo tanto:

$${x_0}^2 + 4\left(y_0 - 1\right)^2 + 4z_0^2 - 4 = 0$$
$${x_0}^2 + 4{y_0}^2 - 8y_0 + 4z_0^2 = 0 \tag{2.53}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_0 = -4z_0 \\ -{x_0}^2 - 4{y_0}^2 + 4y_0 + 16z_0 - 4z_0^2 = 0 \\ {x_0}^2 + 4{y_0}^2 - 8y_0 + 4z_0^2 = 0 \end{cases}$$

(2.51) en (2.52):

$$-\left(4z_0\right)^2 - 2{y_0}^2 + 4y_0 + 16z_0 - 4z_0^2 = 0$$
$$-20z_0^2 + 16z_0 - 4{y_0}^2 + 4y_0 = 0 \tag{2.54}$$

(2.51) en (2.53):

$$\left(-4z_0\right)^2 + 4{y_0}^2 - 8y_0 + 4z_0^2 = 0$$
$$20z_0^2 + 4{y_0}^2 - 8y_0 = 0 \tag{2.55}$$

(2.54) + (2.55):

$$16z_0 + 4y_0 - 8y_0 = 0$$
$$16z_0 - 4y_0 = 0$$
$$4z_0 - y_0 = 0$$
$$y_0 = 4z_0 \tag{2.56}$$

(2.51) y (2.56) en (2.53):

$$\left(-4z_0\right)^2 + 4\left(4z_0\right)^2 - 8\left(4z_0\right) + 4z_0^2 = 0$$
$$84z_0^2 - 32z_0 = 0$$
$$4z_0\left(21z_0 - 8\right) = 0$$

$$\begin{array}{ll} z_0 = 0 & z_0 = \frac{8}{21} \\ y_0 = 0 & y_0 = \frac{32}{21} \\ x_0 = 0 & x_0 = -\frac{32}{21} \end{array}$$

Por lo tanto existen dos puntos que satisfacen las condiciones dadas: $P_1(0,0,0)$ y $P_2\left(-\frac{32}{21}, \frac{32}{21}, \frac{8}{21}\right)$

2.10. Extremos relativos.

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x, y) \mapsto z = f(x, y)$

Los extremos relativos de f se obtienen siguiendo el siguiente procedimiento:
Condiciones necesarias para determinar extremos relativos en (x_0, y_0):
Se buscan los puntos críticos de $f(x_0, y_0) \in D$ tales que:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \quad \wedge \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

Condiciones suficientes para determinar extremos relativos en (x_0, y_0):
Se calcula la matriz Hessiana de f en (x_0, y_0), así:

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0,, y_0) \end{vmatrix}$$

A partir del cual:
a) Si $\Delta > 0$ y $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow f$ tiene un mínimo relativo en (x_0, y_0)
b) Si $\Delta > 0$ y $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow f$ tiene un máximo relativo en (x_0, y_0)
c) Si $\Delta < 0 \Rightarrow f$ no tiene extremo relativo, (x_0, y_0) es un punto silla.
d) Si $\Delta = 0$ no se tiene conclusión sobre los extremos relativos, hay que continuar el estudio (Bruzual y Dominguez, 2016).

Ejercicio 146.
Determinar los extremos relativos para $f(x, y) = 2y^3 - x^2y - 2x^2 - 3y^2 + 4$
Solución
$D_f = \left\{(xy) \in \left(\mathbb{R}^2\right\}\right.$

Condiciones necesarias:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -2xy - 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x(y+2) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0, \quad y = -2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 6y^2 - x^2 - 6y = 0 \quad ; \quad \text{para } x = 0 \;\Rightarrow\; 6y^2 - 6y = 0 \end{cases}$$

$$6y(y-1) = 0$$
$$y = 0\ ,\ y = 1$$

$$\text{para } y = -2 \;\Rightarrow\; -x^2 + 36 = 0$$
$$x = \pm 6$$

Los puntos críticos obtenidos son:

$$P_1\,(0,0) \quad P_2(0,1) \quad P_3(6,-2) \quad P_4(-6-2)$$

Condiciones suficientes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$
$$\Delta = \begin{vmatrix} -2y-4 & -2x \\ -2x & 12y-6 \end{vmatrix}$$

Se calcula el hessiano Δ para $P_1\,(0,0)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 24 > 0$$

Como $\Delta > 0$ y $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} < 0$, entonces se tiene un máximo relativo en $(0,0,f\,(0,0))$
Δ para $P_2(0,1)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -36 < 0$$

Como $\Delta < 0$, entonces se tiene un punto silla en $(0,1,f(0,1))$.
Δ para $P_3(6,-2)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -12 \\ -12 & -30 \end{vmatrix} = -144 < 0$$

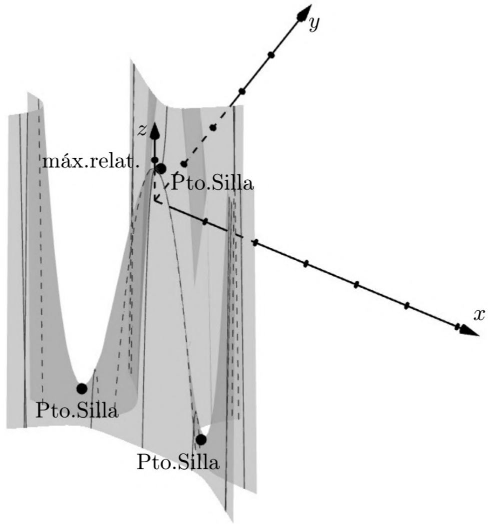
Como $\Delta < 0$, entonces se tiene un punto silla en $(6,-2,f(6,-2))$.
Δ para $P_4(-6,-2)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 12 \\ 12 & -30 \end{vmatrix} = -144 < 0$$

Como $\Delta < 0$, entonces se tiene un punto silla en $(-6,-2,f(-6,-2))$.
En la Figura 2.59 se representa $f\,(x,y)$ con sus extremos relativos.

Figura 2.59

Extremos relativos y puntos silla de $f(x,y)$



Ejercicio 147.

Hallar los extremos relativos para $f(x,y) = x^3 - 3x + e^y - y$

Solución

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

Condiciones necesarias:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3 = 0 \;\Rightarrow\; x = \pm 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = e^y - 1 = 0 \;\Rightarrow\; y = 0 \end{cases}$$

Los puntos críticos obtenidos son $P_1(1,0)$ y $P_2(-1,0)$.

Condiciones suficientes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & e^y \end{vmatrix}$$

Se calcula el Hessiano Δ para $P_1(1,0)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 > 0$$

Como $\Delta > 0$ y $\frac{\partial^2 f(1,0)}{\partial x^2} > 0$, entonces se tiene un mínimo relativo en $(1, 0, f(1,0))$.

Δ para $P_2(-1,0)$:

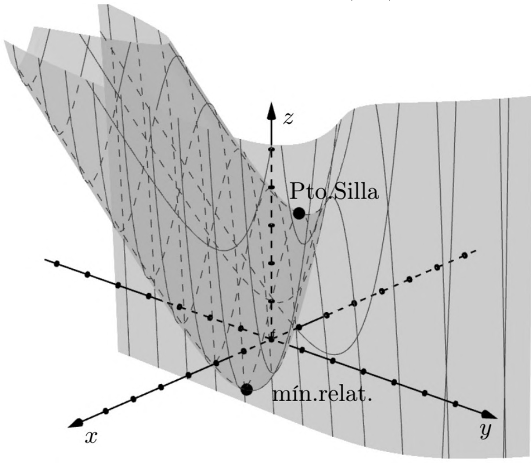
$$\Delta = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 < 0$$

Como $\Delta < 0$, entonces se tiene un punto silla en $(-1, 0, f(1,0))$.

En la Figura 2.60 se representa en la gráfica de $f(x,y)$.

Figura 2.60

Extremo relativo y punto silla de $f(x,y)$



Ejercicio 148.

Hallar los extremos relativos para $f(x,y) = x\sin y$

Solución

$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$

Condiciones necesarias:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \sin y = 0 & \Rightarrow \ y = K\pi \quad (K \in \mathbb{Z}) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x\cos y = 0 & \Rightarrow \ x = 0 \quad \vee \quad y = \frac{\pi}{2} + K\pi \end{cases}$$

Los puntos críticos obtenidos son: $(0, K\pi)$.

Condiciones suficientes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \cos y \\ \cos y & -x\sin y \end{vmatrix} = 0 - \cos^2 y$$

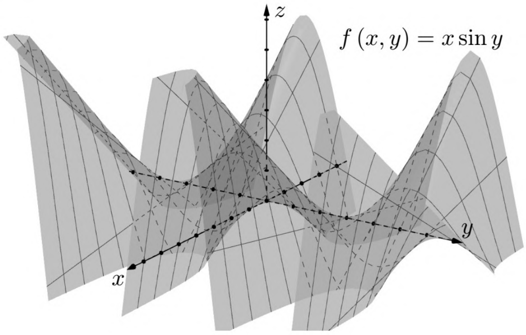
Ahora $-1 \leq \cos y \leq 1$, entonces $\Delta < 0$.

Como $\Delta < 0$, entonces se obtiene infinitos puntos sillas en $(0, K\pi, f(0, K\pi))$.

En la Figura 2.61 se presenta la gráfica de $f(x,y)$.

Figura 2.61

Puntos silla de $f(x,y)$



Ejercicio 149.
Suponga que la presión (Pa). a la que está sometido un gas está en función de la temperatura ($°C$) y el volumen $\left(\mathrm{~m}^{3} .\right)$, dada por la ecuación:

$$P(T, V)=T^{2}-2 T+V^{2}-6 V+14$$

¿A qué temperatura y volumen el gas alcanza su presión mínima? ¿Cuál es su valor?
Solución
Se trata de un problema de extremos relativos, por lo tanto:
Condiciones necesarias:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P}{\partial T}=2 T-2=0 \Rightarrow T=1 \\ & \frac{\partial P}{\partial V}=2 V-6=0 \Rightarrow V=3 \end{aligned}$$

Punto crítico $(1,3)$.
Condiciones suficientes:

$$\begin{aligned} & \Delta=\left|\begin{array}{cc} \frac{\partial^{2} P\left(P_{0}\right)}{\partial T^{2}} & \frac{\partial^{P} P\left(P_{0}\right)}{\partial T \partial V} \\ \frac{\partial^{3} P\left(P_{0}\right)}{\partial V \partial T} & \frac{\partial^{2} P\left(P_{0}\right)}{\partial V^{2}} \end{array}\right| \\ & \Delta=\left|\begin{array}{ll} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{array}\right| \end{aligned}$$

Se calcula el hessiano para el punto crítico $(1,3)$:

$$\Delta=\left|\begin{array}{ll} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{array}\right|=4>0$$

Como $\Delta>0, \frac{\partial^{2} P\left(P_{0}\right)}{\partial T^{2}}>0 \Rightarrow$ se tiene un mínimo en $(1,3, f(1,3))$.
Por lo tanto el gas alcanza su presión mínima en $T=1°C, V=3 \mathrm{~m}^{3}$. cuyo valor es de 4 Pa.

Ejercicio 150.
Una fábrica produce "x" cortadoras de aluminio e "y" cortadoras de acero, cuyo costo (en \$) de producirlos está dado por:

$$C(x, y)=x^{2}-6 x+y^{2}-4 y+75$$

Determinar cuántas cortadoras de aluminio y cuántas cortadoras de acero se deben producir para que el costo de producirlas sea mínimo.

Solución
Se trata de un problema de extremos relativos, asi:
Condiciones necesarias:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial C}{\partial x}=2 x-6=0 \Rightarrow x=3 \\ \frac{\partial C}{\partial y}=2 y-4=0 \Rightarrow y=2 \end{array}\right.$$

Punto crítico $(3,2)$
Condiciones suficientes:

$$\Delta=\left|\begin{array}{cc} \frac{\partial^{2} C\left(P_{0}\right)}{\partial x^{2}} & \frac{\partial^{2} C\left(P_{0}\right)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^{2} C\left(P_{0}\right)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^{2} C\left(P_{0}\right)}{\partial y^{2}} \end{array}\right|$$

Se calcula el hessiano para el punto crítico $(3,2)$:

$$\Delta=\left|\begin{array}{ll} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{array}\right|=4>0$$

Como el $\Delta>0, \frac{\partial^{2} C}{\partial x^{2}}>0$, entonces se tiene un mínimo en $(3,2, f(3,2))$.
Por lo tanto se debe producir 3 cortadoras de aluminio y 2 cortadoras de acero para que el costo sea mínimo, cuyo valor es de $f(3,2)=62$ dólares.

2.11. Extremos condicionados.

Para maximizar o minimizar funciones sujetas a una restricción se tienen dos métodos:
1. Reducción del número de variables de f.
Sea $\quad f : D \subset \mathbb{R}^2 \ \rightarrow \ \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto z = f\,(x, y)$$

Si se tiene la restricción $g(x, y) = 0$, se despeja una de las variables y se sustituye en f, reduciéndola a una sola variable y procediendo luego a maximizar o minimizar por el método que se conoce para funciones de una sola variable.

Sea $\quad f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y, z) \mapsto \mathrm{w} = f\,(x, y, z)$$

Si se tiene la restricción $g\,(x, y, z) = 0$, se despeja una de las variables y se sustituge en f, reduciéndola a dos variables y procediendo luego a maximizar o minimizar por el método que se conoce para funciones de dos variables (Quiroga, 2008).
2. Método de Multiplicadores de Lagrange.

Sea $\quad f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto z = f\,(x, y) \quad , \quad g(x, y) = 0 \quad \text{(restricción)}$$

Los puntos críticos candidatos a extremos condicionados, se producen en la función de Lagrange (Alcázar, 2022). La ecuación está dada por:

$$F(x, y, \lambda) = f\,(x, y) + \lambda \quad g(x, y) \tag{2.57}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Para $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y, z) \mapsto \mathrm{w} = f\,(x, y, z) \quad , \quad g\,(x, y, z) = 0 \quad \text{(restricción)}$$

Los puntos críticos se producen en:

$$F(x, y, z, \lambda) = f\,(x, y, z) + \lambda g\,(x, y, z) \tag{2.58}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = \dfrac{\partial f}{\partial z} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = g\,(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Se determinarán si son máximos o mínimos a partir de las características geométricas o del contenido del problema (Martin, García y Getino, 2014).
Usualmente se evalua f en los puntos críticos, el mayor valor es el máximo condicionado y el menor valor el mínimo condicionado.

Ejercicio 151.
Hallar los extremos de $f\,(x, y) = 18 - x^2 - y^2$ sujeto a la condición $x + y = 4$
Solución
Utilizando el método de reducción del número de variables de f:

$$\begin{aligned} f\,(x, y) &= 18 - x^2 - y^2 \quad \text{función objetivo} \\ g(x, y) &= x + y - 4 = 0 \quad \text{restricción} \\ y &= 4 - x \end{aligned}$$

Condiciones necesarias:

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= 18 - x^2 - (4-x)^2 \\
f_1'(x) &= -2x - 2(4-x)(-1) \\
f_1'(x) &= -2x + 8 - 2x \\
f_1'(x) &= 8 - 4x = 0
\end{aligned}
$$

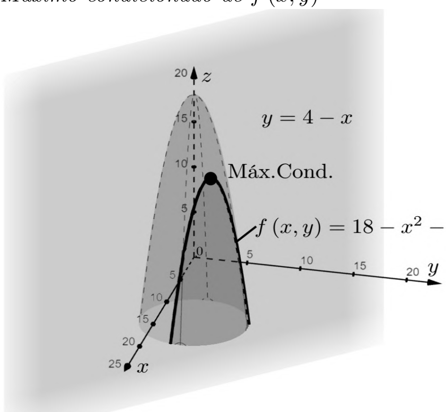
$$
\begin{aligned}
x &= 2 \\
y &= 4 - x = 4 - 2 = 2
\end{aligned}
$$

Punto crítico: $P(2,2)$
Condiciones suficientes:
Utilizando la prueba de segunda derivada para determinar si es máximo o mínimo se tiene:

$$
\begin{aligned}
f_1''(x) &= -4 \\
f_1''(2) &= -4
\end{aligned}
$$

Como $f_1''(2)$ es negativa, entonces en $(2,2)$ se produce un máximo condicionado dado por $(2,2,f(2,2))$.
En la Figura 2.62 se muestra las superficies dadas.

Figura 2.62
Máximo condicionado de $f\,(x,y)$



Ejercicio 152.
Determinar los extremos de $f\,(x,y) = x^2 + y^2 + 2$ sujeto a la condición $x^2 - 2x + y^2 = 0$
Solución
Utilizando el método de multiplicadores de Lagrange:

$$
\begin{array}{lc}
f\,(x,y) = x^2 + y^2 + 2 & \text{función objetivo} \\
g(x,y) = x^2 - 2x + y^2 = 0 & \text{condición}
\end{array}
$$

$$
F(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + 2 + \lambda\left(x^2 - 2x + y^2\right)
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2\lambda x - 2\lambda = 0 & (2.59) \\
\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2\lambda y = 0 & (2.60) \\
\dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 - 2x + y^2 = 0 & (2.61)
\end{cases}
$$

De (2.60): $\quad 2y(1+\lambda) = 0$

$$y = 0 \vee \lambda = -1$$

En (2.59) para $\lambda = -1 \quad ; \quad 1 \neq 0$
En (2.61) para $y = 0 \quad ; \quad x^2 - 2x = 0$

$$
\begin{aligned}
x(x-2) &= 0 \\
x = 0 &\quad x = 2
\end{aligned}
$$

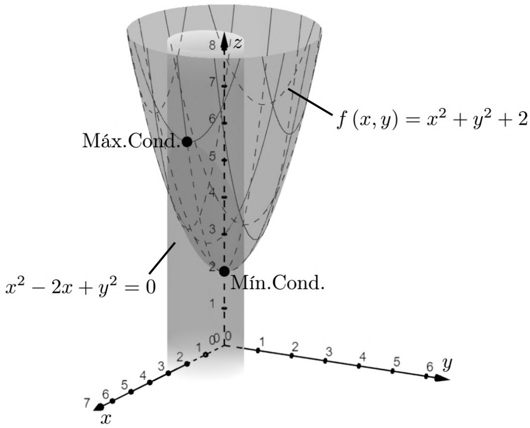
Puntos críticos: $(0,0)$ y $(2,0)$

$$f(0,0) = 2$$
$$f(2,0) = 6$$

Por lo tanto se tiene un mínimo condicionado en $(0,0,2)$ y un máximo condicionado en $(2,0,6)$
Representando las superficies en la Figura 2.63:

Figura 2.63

Extremos condicionados de $f(x,y)$



Ejercicio 153.
Hallar los extremos para la función $f(x,y,z) = x^3 - y - z^3$ sujeto a la condición $-3x + y + 3z = 1$.
Solución
Método de reducción del número de variables:
Si $\quad y = 1 + 3x - 3z$

$$f_1(x,z) = x^3 - (1 + 3x - 3z) - z^3$$
$$f_1(x,z) = x^3 - 1 - 3x + 3z - z^3$$

Condiciones necesarias:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} = 3x^2 - 3 = 0 & \Rightarrow \quad x = \pm 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} = 3 - 3z^2 = 0 & \Rightarrow \quad z = \pm 1 \end{cases}$$

Se obtiene cuatro puntos críticos: $(1,1,1), (1,7,-1), (-1,-5,1)$ y $(-1,1,-1)$

Condiciones suficientes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial z^2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6z \end{vmatrix}$$

El hessiano para $(1,1,1)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -36 < 0$$

Como $\Delta < 0$, entonces se tiene un punto silla en $(1,1,1, f(1,1,1))$.
Hessiano para $(1,7,-1)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 36 > 0$$

Como $\Delta > 0$ y $\frac{\partial^2 f(1,1,1)}{\partial x^2} > 0$, entonces se tiene un mínimo condicionado en $(1,7,-1, f(1,7,-1)$.
Hessiano para $(-1,-5,1)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 36 > 0$$

Como $\Delta > 0$ y $\frac{\partial^2 f(-1,-5,1)}{\partial x^2} < 0$, entonces se tiene un máximo condicionado en $(-1,-5,1,f(-1,-5,1))$.
Hessiano para $(-1,1,-1)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -36 < 0$$

Como $\Delta < 0$, se tiene un punto silla en $(-1,1,-1,f(-1,1,-1))$.

Ejercicio 154.
Determinar los extremos condicionados para la función $f(x,y,z) = x^2 + 2\ln y + z^2$ sujetos a la restricción $x+y+z=3$.
Solución
Utilizando el método de multiplicadores de Lagrange:

$$f(x,y,z) = x^2 + 2\ln y + z^2$$
$$g(x,y,z) = x+y+z-3 = 0$$

$$F(x,y,z,\lambda) = x^2 + 2\ln y + z^2 + \lambda(x+y+z-3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x+\lambda = 0 & \Rightarrow\ x = -\frac{\lambda}{2} \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2}{y}+\lambda = 0 & \Rightarrow\ y = -\frac{2}{\lambda} \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z+\lambda = 0 & \Rightarrow\ z = -\frac{\lambda}{2} \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x+y+z-3 = 0 & \Rightarrow\ -\frac{\lambda}{2} - \frac{2}{\lambda} - \frac{\lambda}{2} - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$
$$(\lambda+2)(x+1) = 0$$
$$\lambda = -2 \quad \lambda = -1$$

Para $\lambda = -2$, $P_1(1,1,1)$
Para $\lambda = -1$, $P_2\left(\frac{1}{2},2,\frac{1}{2}\right)$
Obteniendo dos puntos críticos P_1 y P_2.

$$f(1,1,1) = 2$$
$$f\left(\frac{1}{2},2,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \ln 4$$

Por lo tanto se tiene un mínimo condicionado en $\left(\frac{1}{2},2,\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\ln 4\right)$ y un máximo condicionado en $(1,1,1,2)$.

Ejercicio 155.
Hallar los extremos condicionados para $f(x,y,z) = x^2+y^2+z$ sujetos a la restricción $2x+2y+z=1$
Solución

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z$$
$$g(x,y,z) = 2x+2y+z-1 = 0$$

$$F(x,y,z,\lambda) = x^2+y^2+z+\lambda(2x+2y+z-1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x+2\lambda = 0 & \Rightarrow\ x = 1 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y+2\lambda = 0 & \Rightarrow\ y = 1 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 1+\lambda = 0 & \Rightarrow\ \lambda = -1 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 2x+2y+z-1 = 0 & \Rightarrow\ 2+2+z-1 = 0 \\ & \qquad z = -3 \end{cases}$$

Se tiene un único punto crítico $P(1,1,-3)$.
Se toma un punto en la vecindad del punto $(1,1-3)$, el punto $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},0\right)$ para evaluar f y comparar:

$$f(1,1,-3) = -1$$
$$f\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},0\right) = \frac{1}{8}$$

Como $f(1,1,-3) < f\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},0\right)$, entonces se tiene un mínimo condicionado en $(1,1,-3,-1)$.

Ejercicio 156.
Hallar el punto sobre la gráfica de $y = e^x$ en el que el producto $x \cdot y$ sea lo más pequeño posible.
Solución

$$\begin{array}{ll} f(x,y) = xy & \text{función objetivo a minimizar} \\ g(x,y) = y - e^x = 0 & \text{restricción} \end{array}$$

Utilizando el método de redución del número de variables de f:

$$f_1(x) = x \cdot e^x$$

Condiciones necesarias:

$$\begin{aligned} f_1'(x) = xe^x + e^x &= 0 \\ e^x(x+1) &= 0 \\ e^x = 0 \quad \vee \quad & x = -1 \end{aligned}$$

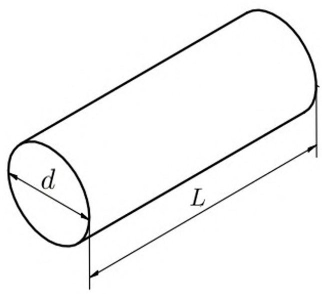
Condiciones suficientes:

$$f_1''(x) = xe^x + 2e^x$$
$$f_1''(-1) = -\frac{1}{e} + \frac{2}{e} = \frac{1}{e} > 0$$

Como $f_1''(-1) > 0$, entonces se tiene un mínimo condicionado en $x = -1 \wedge y = \frac{1}{e}$.

Ejercicio 157.
María quiere enviarle a una amiga una pintura como regalo. La enrolla y coloca en un tubo cilíndrico de diámetro d y lougitud L. Lo va a enviar mediante el servicio postal cuyas regulaciones piden que la suma de la longitud del tubo más su contorno, es decir la circunferencia del tubo, mida como máximo 108 cm. Determinar las dimensiones del tubo de volumen más grande que puede enviar.
Solución
Representando el tubo cilindrico en la Figura 2.64:

Figura 2.64
Asignación de variables



$$\begin{array}{lll} V(d,L) = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 L & \text{función objetivo a maximizar} & (d > 0, L > 0) \\ 108 = L + \pi d & \text{restricción} & \end{array}$$

Utilizando el método de reducción del número de variables de f:

$$V_1(d) = \frac{\pi}{4} d^2 (108 - \pi d)$$
$$V_1(d) = 27\pi d^2 - \frac{\pi^2}{4} d^3$$

Condiciones necesarias:

$$\begin{aligned} V_1'(d) = 54\pi d - \tfrac{3}{4}\pi^2 d^2 &= 0 \\ 216\pi d - 3\pi^2 d^2 &= 0 \\ \pi d(216 - 3\pi d) &= 0 \\ d = 0 \quad , \quad & d = \tfrac{72}{\pi} \end{aligned}$$

Condiciones suficientes:

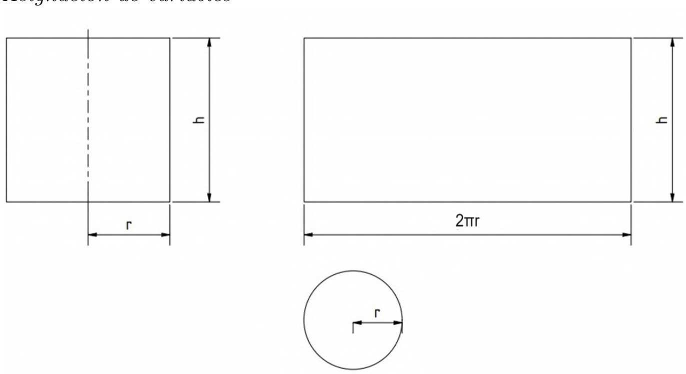
$$V_1''(d) = 54\pi - \frac{3}{2}\pi^2 d$$
$$V_1''\left(\frac{72}{\pi}\right) = 54\pi - \frac{3}{2}\pi^2\left(\frac{72}{\pi}\right)$$
$$V_1''\left(\frac{72}{\pi}\right) = -103\pi$$

Como $V_1''\left(\frac{72}{\pi}\right) < 0$, entonces se tiene un máximo condicionado para $d = \frac{72}{\pi}$ cm. y $L = 36$ cm.

Ejercicio 158.
Se elabora un envase en forma de cilindro circular recto sin tapa con un costo de material de \$ 200. Si el material para el fondo cuesta \$50 c/m^2. y el material para el cuerpo cuesta \$25 c/m^2. Determine las dimensiones del envase de mayor volumen que puede elaborarse.

Solución
Representando el envase abierto en la Figura 2.65:

Figura 2.65
Asignación de variables



$$V = f(r,h) = \pi r^2 h \quad \text{función a maximizar} \quad (r > 0,\ h > 0)$$
$$Ce = Cb\ Ab + Cc\ Ac$$
$$200 = 50\left(\pi r^2\right) + 25(2\pi r h)$$
$$4 = \pi r^2 + \pi r h \quad \text{restricción}$$

Utilizando el método de reducción del número de variables de f:

$$h = \frac{4 - \pi r^2}{\pi r}$$
$$f_1(r) = \pi r^2\left(\frac{4 - \pi r^2}{\pi r}\right)$$
$$f_1(r) = 4r - \pi r^3$$

Condiciones necesarias:

$$f_1'(r) = 4 - 3\pi r^2 = 0$$
$$r^2 = \frac{4}{3\pi}$$
$$r = \pm\frac{2}{\sqrt{3\pi}}$$
$$r = \frac{2}{\sqrt{3\pi}}$$

Condiciones suficientes:

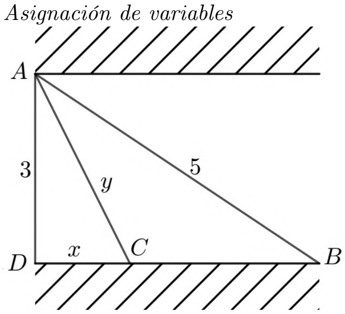
$$f_1''(r) = -6\pi r$$
$$f_1''\left(\frac{2}{\sqrt{3\pi}}\right) = -6\pi\left(\frac{2}{\sqrt{3\pi}}\right) = -4\sqrt{3\pi}$$

Como $f_1''\left(\frac{2}{\sqrt{3\pi}}\right) < 0$, entonces se produce un máximo condicionado en $r = \frac{2}{\sqrt{3\pi}}m, \quad h = \frac{4}{\sqrt{3\pi}}m$

Ejercicio 159.
Un oleoducto va a conectar dos puntos A y B que se encuentran a 5 Km. uno del otro en riberas opuestas de un río recto de 3 km. de ancho. El oleoducto va a ir bajo el agua de A a un punto C en la ribera opuesta y luego sobre el suelo de C a B. El costo por Kilómetro de tuberia bajo el agua es dos veces el costo sobre tierra. Encontrar la posición de C que minimizará la construcción del oleoducto.

Solución
Esquematizando los datos en la Figura 2.66:

Figura 2.66
Asignación de variables



En el $\triangle ABD$:

$$\begin{aligned}
5^2 &= 3^2 + \overline{BD}^2 \\
\overline{BD} &= \sqrt{25-9} \\
\overline{BD} &= 4 \text{ Km.} \\
\overline{CB} &= 4 - x \\
C_T &= 2\overline{AC} + CB \\
C_T &= f(x,y) = 2y + 4 - x \quad \text{función objetivo a minimizar}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{AC}^2 &= 3^2 + DC^2 \\
y^2 &= 9 + x^2 \\
y &= \sqrt{9+x^2} \quad \text{restricción}
\end{aligned}$$

Utilizando el método de reducción del número de variables de f:

$$f_1(x) = 2\sqrt{9+x^2} + 4 - x$$

Condiciones necesarias:

$$\begin{aligned}
f_1'(x) &= \frac{2x}{\sqrt{9+x^2}} - 1 = 0 \\
(2x)^2 &= \left(\sqrt{9+x^2}\right)^2 \\
4x^2 &= 9 + x^2 \\
3x^2 &= 9 \\
x &= \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Condiciones suficientes:

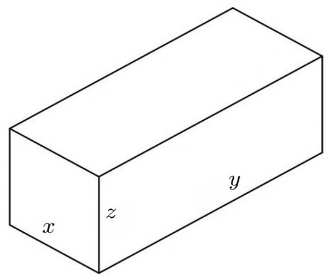
$$\begin{aligned}
f_1''(x) &= \frac{2\sqrt{9+x^2} - 2x\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}}{9+x^2} \\
f''(x) &= \frac{18}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}} \\
f''(\sqrt{3}) &= \frac{\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$

Como $f_1''(\sqrt{3}) > 0$, entonces se tiene un mínimo condicionado en $x = \sqrt{3}$ Km. por lo tanto el oleoducto debe ir bajo el agua $4\sqrt{3}$ km. y por tierra $4 - \sqrt{3}$ km.

Ejercicio 160.
Calcular las dimensiones de la caja rectangular cerrada de volumen máximo que se puede construir con una plancha de acero de 8 m^2.

Solución
Representando la caja en la Figura 2.67:

Figura 2.67
Asignación de variables



$$
\begin{aligned}
V = f(x,y,z) &= xyz \quad \text{función objetivo a maximizar} \quad (x>0, y>0, z>0)\\
8 &= 2xz + 2xy + 2yz\\
4 &= xz + xy + yz\\
g(x,y,z) &= xz + xy + yz - 4 = 0 \quad \text{restricción}
\end{aligned}
$$

Utilizando el método de multiplicadores de Lagrange:

$$F(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda(xz + xy + yz - 4)$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial F}{\partial x} = yz + \lambda x + \lambda y = 0 & \Rightarrow \lambda = \dfrac{-yz}{x+y} \quad (2.62)\\
\dfrac{\partial F}{\partial y} = xz + \lambda x + \lambda z = 0 & \Rightarrow \lambda = \dfrac{-xz}{x+z} \quad (2.63)\\
\dfrac{\partial F}{\partial z} = xy + \lambda x + \lambda y = 0 & \Rightarrow \lambda = \dfrac{-xy}{x+y} \quad (2.64)\\
\dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = xz + xy + yz - 4 = 0 & \quad (2.65)
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
(2.62) = (2.64): \qquad \frac{-yz}{x+y} &= \frac{-xy}{x+y}\\
x &= z \qquad (2.66)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2.63) = (2.64): \qquad \frac{-xz}{x+z} &= \frac{-xy}{x+y}\\
2(x+y) &= y(x+z)\\
xz + yz &= xy + yz\\
z &= y \qquad (2.67)\\
\Rightarrow \quad x &= y \qquad (2.68)
\end{aligned}
$$

Reemplazando (2.66), (2.67), (2.68) en (2.65):

$$
\begin{aligned}
x^2 + x^2 + x^2 - 4 &= 0\\
3x^2 - 4 &= 0
\end{aligned}
$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$y = \frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$z = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Se tiene un punto crítico $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$; se escoge un punto en la vecindad de este: $\left(1, 1, \frac{3}{2}\right)$ y se procede a evaluar f:

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{8}{3\sqrt{3}}$$
$$f\left(1, 1, \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

Como $f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) > f\left(1, 1, \frac{3}{2}\right)$, entonces se produce un máximo condicionado, por lo tanto las dimensiones de la caja que se puede construir para que el volumen sea máximo es $x = y = z = \frac{2}{\sqrt{3}}m$.

2.12. Extremos absolutos.

Sea R una región acotada y cerrada del plano xy, y sea f una función continua en M. Entonces f tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en R.
Se procede a determinar los extremos relativos en el interior de la región, en la frontera y los vértices, de la región (Martin, P., García, A., Getino, J., 2014, P. 306).
Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x, y) \mapsto z = f(x, y)$
Los candidatos a extremos absolutos serán:
1. En el interior del conjunto R donde $f_x = 0 \wedge f_y = 0$
2. En la frontera:

   2.1 En los lados de la figura: puntos que se obtengan de aplicar los extremos condicionados (una condición)

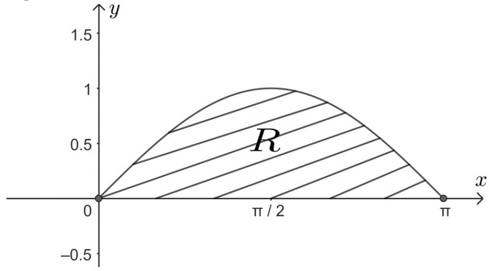
   2.2 Los vértices de la figura.

3. Se evalua f en los puntos obtenidos en 1) y 2), al mayor de los valores será el máximo absoluto y el menor el mínimo absoluto.
"Cuando se van a determinar los extremos absolutos de f no es necesario utilizar la matriz Hessiana para ver si efectivamente los puntos obtenidos son extremos relativos o extremos relativos condicionados". (Martin et al., 2014).

Ejercicio 161.
Hallar los extremos absolutos de la función $f(x, y) = x - y^2$ en la región acotada por $y = \sin x,\ 0 \leq x \leq \pi$.

Solución
Se representa la región R en la Figura 2.68:

Figura 2.68
Representación de R



Hallando los extremos relativos al interior de la región R:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial x} = 1 \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} = 2y \Rightarrow y = 0 \end{cases} \Rightarrow \nexists \text{ puntos críticos}$$

Extremos condicionados:
Utilizando el método de reducción del número de variables de f:

Para la recta $y = 0$:
$$\begin{array}{l} f_1(x) = x \\ f_1'(x) = 1 = 0 \end{array} \quad \nexists \text{ puntos críticos}$$

Para $y = \sin x$:
$$f_2(x) = x - \sin^2 x$$
$$f_2'(x) = 1 - 2\sin x \cos x$$
$$f_2'(x) = 1 - \sin 2x = 0$$
$$\sin 2x = 1$$
$$2x = \frac{\pi}{2} + K_\pi$$
$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

$$\text{Si } K = 0, \quad x = \frac{\pi}{4}, \quad y = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad P_1\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\text{Si } K = 1, \quad x = \frac{3}{4}\pi, \quad y = \sin\frac{3}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad P_2\left(\frac{3}{4}\pi, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Vértices de R:
$$P_3\,(0, 0)\,, P_4(\pi, 0)$$

Evaluando f en los puntos críticos encontrados como se muestra en la Tabla 2.2:

Tabla 2.2

Extremos absolutos

(x, y)	$f\,(x, y)$	
$(0, 0)$	0	Mínimo absoluto $(0, 0, 0)$
$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$	
$\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}$	
$(\pi, 0)$	π	Máximo absoluto $(\pi, 0, \pi)$

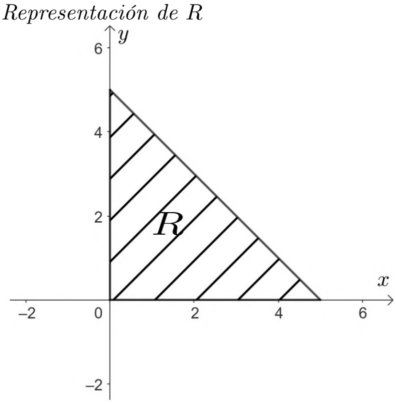
Ejercicio 162.
Hallar los extremos absolutos de la función $f\,(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 3$ en la región $R = \left\{(x, y) \in \left(R^2 / x + y \leq 5, x \geq 0, y \geq 0\right\}\right.$.

Solución

Representando la región R en la Figura 2.69:

Figura 2.69

Representación de R



Puntos críticos en el interior de R:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1 \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow P_0(1,1)$$

Puntos críticos en la frontera de R:

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ f_1(x) &= x^2 - 2x + 3 && \Rightarrow P_2(1,0) \\ f_1'(x) &= 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ y &= 5 - x \\ f_2(x) &= x^2 + (5-x)^2 - 2x - 2(5-x) + 3 \\ f_2'(x) &= 2x - 2(5-x) - 2 + 2 \\ f_2'(x) &= 4x - 10 = 0 \\ x = \frac{5}{2} &\Rightarrow y = \frac{5}{2} && \Rightarrow P_4\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) \\ x &= 0 \\ f_3(y) &= y^2 - 2y + 3 \\ f_3'(y) &= 2y - 2 = 0 \\ y &= 1 && \Rightarrow P_6(0,1) \end{aligned}$$

Puntos críticos en los vértices de R:

$$P_1\,(0,0)\,, \quad P_3(5,0), \quad P_5(0,5)$$

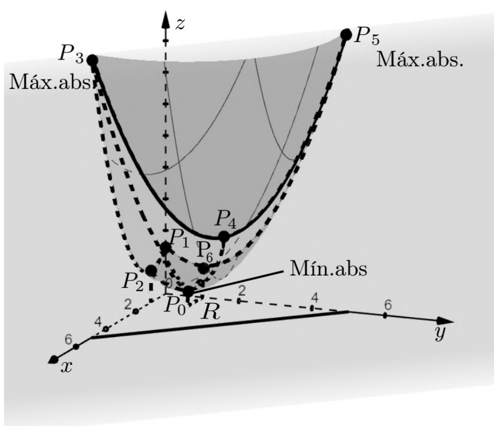
Evaluando f en los puntos críticos encontrados, como se muestra en la Tabla 2.3:

Tabla 2.3
Extremos absolutos

(x,y)	$f\,(x,y)$	
$(1,1)$	1	Mínimo absoluto
$(0,0)$	3	
$(1,0)$	2	
$(5,0)$	18	Máximo absoluto
$(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$	$\frac{11}{2}$	
$(0,5)$	18	Máximo absoluto
$(0,1)$	2	

Representando los máximos y mínimos absolutos en la Figura 2.70:

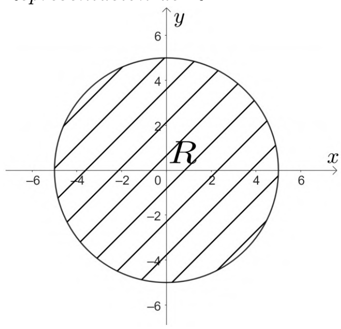
Figura 2.70
Máximos y mínimos absolutos de $f\,(x,y)$ en R



Ejercicio 163.
La intensidad (en amperios) distribuido por una placa que tiene la forma $x^2 + y^2 = 25$ está data por: $I(x, y) = 2 + x^2 - 2xy + y^2$. Un breaker está situado sobre la placa y se activa a intensidades superiones a 10 amperios ¿Se disparara el breaker?

Solución
Se representa la región R en la Figura 2.71:

Figura 2.71
Representación de R



Puntos críticos en el interior de R:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I}{Ox} = 2x - 2y \Rightarrow x = y \\ \dfrac{\partial I}{\partial y} = 2y - 2x \Rightarrow x = y \end{cases} \quad \text{Infinitos puntos críticos}$$

Puntos críticos en la frontera de R:
Utilizando el método de multiplicadores de Lagrange:

$$F(x, y, \lambda) = 2 + x^2 - 2xy + y^2 + \lambda\left(x^2 + y^2 - 25\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{Ox} = 2x - 2y + 2\lambda x = 0 & (2.69) \\ \dfrac{QF}{\partial y} = -2x + 2y + 2\lambda y = 0 & (2.70) \\ \dfrac{QF}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 25 = 0 & (2.71) \end{cases}$$

(2.69) menos (2.70) : $\quad 2\lambda x - 2\lambda y = 0 \Rightarrow x = y$. reemplazando en (2.71):

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 - 25 &= 0 \\ 2x^2 &= 25 \\ x^2 &= \frac{25}{2} \\ x &= \pm\frac{5}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Ahora $y^2 = 25 - x^2 = 25 - \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{25}{2} \Rightarrow y = \pm\frac{5}{\sqrt{2}}$

$$P_1\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right), P_2\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}\right), P_3\left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right), P_4\left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$$

Puntos críticos en los vértices de R:

$$P_5(5, 0),\ P_6(0, 5),\ P_7(-5, 0),\ P_8(0, -5)$$

Evaluando los puntos críticos en f, como se muestra en la Tabla 2.4:

Tabla 2.4
Extremos absolutos

(x,y)	$I(x,y)$	
$x=y$	2	Mínimo absoluto
$\left(\frac{5}{\sqrt{2}},\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$	2	Mínimo absoluto
$\left(\frac{5}{\sqrt{2}},-\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$	$2+\frac{10}{\sqrt{2}}$	
$\left(-\frac{5}{\sqrt{2}},\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$	$2+\frac{10}{\sqrt{2}}$	
$\left(-\frac{5}{\sqrt{2}},-\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$	2	Mínimo absoluto
$(5,0)$	27	Máximo absoluto
$(0,5)$	27	Máximo absoluto
$(-5,0)$	27	Máximo absoluto
$(0,-5)$	27	Máximo absoluto

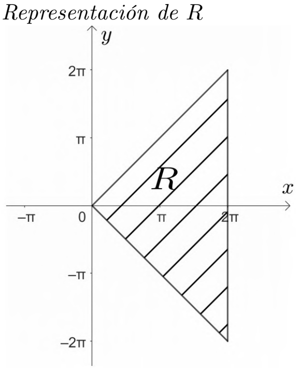
Por lo tanto se disparará el breaker.

Ejercicio 164.
La presión distribuida sobre una placa que tiene la forma de la región R está dada por $P(x,y) = \sin x + \cos y$. Determinar los puntos sobre la placa que estén a la mayor y menor presión.

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = x, y = -x, x = 2\pi\right\}$$

Solución
Representando la región R en la Figura 2.72:

Figura 2.72
Representación de R



Puntos críticos en el interior de R:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + K\pi; & \begin{array}{l} K=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ K=1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}\pi \end{array} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\sin y = 0 \Rightarrow y = K\pi; & \begin{array}{l} K=0 \Rightarrow y = 0 \\ K=1 \Rightarrow y = \pi \end{array} \end{cases}$$

$$P_1\left(\frac{\pi}{2},0\right), P_2\left(\frac{3}{2}\pi,0\right), P_3\left(\frac{3}{2}\pi,\pi\right)$$

Puntos críticos en la frontera de R:

$$P(x,y) = \sin x + \cos y$$

Si $y = x$:

$$P_1(x) = \sin x + \cos x$$
$$P_1'(x) = \cos x - \sin x = 0$$
$$\operatorname{tg} x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$$

$$P_4\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right),\ P_5\left(\frac{5}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right)$$

Si $x = 2\pi$:

$$\begin{aligned} P_2(y) &= \cos y \\ P_2'(y) &= -\sin y = 0 \\ y &= K\pi \end{aligned}$$

$$y = 0,\ y = \pi,\ y = 2\pi$$

$$P_6(2\pi, 0),\ P_7(2\pi, \pi),\ P_8(2\pi, 2\pi)$$

Si $y = -x$:

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \sin x + \cos x \\ P_3'(x) &= \cos x - \sin x = 0 \\ \operatorname{tg} x &= 1 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\pi}{4},\ x = \frac{5}{4}\pi$$

$$P_9\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right),\ P_{10}\left(\frac{5}{4}\pi - \frac{5}{4}\pi\right)$$

Puntos críticos en los vértices de R:

$$P_{11}(0,0),\ P_{12}(2\pi, -2\pi)$$

Evaluando los puntos críticos en f, como se muestra en la Tabla 2.5:

Tabla 2.5

Extremos absolutos

(x, y)	$P(x, y)$	
$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$	2	Máximo absoluto
$\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\pi, 0\right)$	0	
$\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\pi, \pi\right)$	-2	Mínimo absoluto
$\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$	$\sqrt{2}$	
$\left(-\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$	$-\sqrt{2}$	
$(2\pi, 0)$	1	
$(2\pi, \pi)$	-1	
$(2\pi, 2\pi)$	1	
$\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$	$\sqrt{2}$	
$\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}\right)$	$-\sqrt{2}$	
$(0, 0)$	1	
$(2\pi, -2\pi)$	1	

Por lo tanto el punto que está a mayor presión es $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ y el que está a menor presión es $\left(\frac{3}{2}\pi, \pi\right)$.

Ejercicio 165.

Una manada de ganzos van a ser puestos sobre una laguna que tiene la forma de la curva C: $\vec{f}(t) = \langle \cos t, 1 + \sin t \rangle$, donde la temperatura del agua está descrita por $T(x, y) = x^2 - 2y + y^2 + 20$. Sabiendo que el rango de temperatura ideal para la supervivencia de estos animales va de 17 a $20°C$. Se pregunta: ¿es éste el lugar adecuado para ellos?

Solución

Expresando la curva C en forma vectorial:

$$\vec{f}(t) = \langle \cos t, 1 + \sin t \rangle$$

Expresada en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{cases}$$

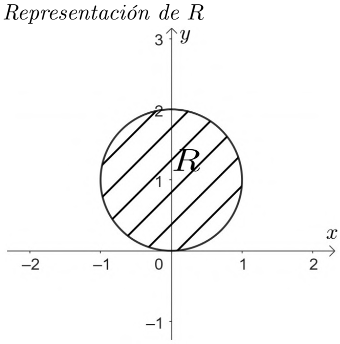
Eliminando t :

$$C: \quad x^2 + (y-1)^2 = 1$$

Representando la región R en la Figura 2.73:

Figura 2.73

Representación de R



Puntos críticos en el interior de R:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} = 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial y} = 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

$$P_1(0,1)$$

Puntos críticos en la frontera de R:
Utilizando el método de multiplicadores de Lagrange:

$$F(x,y,\lambda) = x^2 - 2y + y^2 + 20 + \lambda\left(x^2 + y^2 - 2y\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0 & (2.72) \\ \dfrac{\theta F}{\partial y} = -2 + 2y + 2\lambda y - 2\lambda = 0 & (2.73) \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 2y = 0 & (2.74) \end{cases}$$

De (2.72): $2x(1+\lambda) = 0 \quad \Rightarrow x = 0,\ \lambda = -1$

$$\begin{aligned} \lambda = -1 \text{ en (2.73):} \quad & -2 + 2y - 2y + 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \\ \lambda = 0 \text{ en (2.74):} \quad & y^2 - 2y = 0 \\ & y(y-2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} y = 0 & \vee & y = 2 \\ x = 0 & & x = 0 \end{array}$$

$$P_2\,(0,0)\ ,\ P_3(0,2)$$

Otros puntos considerados críticos en la frontera de R:

$$P_4(1,1)\ ,\ P_5(-1,1)$$

Evaluando f en los puntos críticos obtenidos, como se muestra en la Tabla 2.6:

Tabla 2.6

Extremos absolutos

(x,y)	$T(x,y)$	
$(0,1)$	19	Mínimo absoluto
$(0,0)$	20	Máximo absoluto
$(0,2)$	20	Máximo absoluto
$(1,1)$	20	Máximo absoluto
$(-1,1)$	20	Máximo absoluto

Por lo tanto es el lugar adecuado para los gansos.

CAPÍTULO 3

Integrales múltiples

Capítulo 3

Integrales múltiples

3.1. Integrales dobles en coordenadas cartesianas

El cálculo de integrales dobles se lo hará por medío de integrales iteradas.
Se considera tres casos:
Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua en la región cerrada D, donde:
a) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \ \wedge \ c \leq y \leq d\right\}$
Entonces la integral de f sobre D es:

$$\iint\limits_D f(x, y) \ dA = \int_a^b \left[\int_C^d f(x, y)\, dy\right] dx = \int_C^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx\right] dy \tag{3.1}$$

b) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \ \wedge \ h(x) \leq y \leq g(x)\right\}$ donde g y h son continuas en $[a; b]$

$$\iint\limits_D f(x, y) \ dA = \int_a^b \left[\int_{h(x)}^{g(x)} f(x, y)\, dy\right] dx \tag{3.2}$$

c) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / c \leq y \leq d \ \wedge \ h(y) \leq x \leq g(y)\right\}$ donde g y h son continuas en $[c; d]$

$$\iint\limits_D f(x, y) \ dA = \int_C^d \left[\int_{h(y)}^{g(y)} f(x, y)\, dx\right] dy \tag{3.3}$$

Geométricamente, la integral doble representa el volumen del sólido limitado por un prisma cuya base es D y cuya tapa es la parte de la superficie $z = f(x, y)$, si cumple que $f(x, y) \geqslant 0 \,\forall\, (x, y) \in D$ (Alcázar, 2022).
En el caso a) se pueden intercambiar los límites de integración sin mayor análisis, no así los casos b) y c) en donde es necesario conocer la región D para realizar cambios en los límites de integración.

Ejercicio 166.
Calcular la siguiente integral doble:

$$\int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} |2 - y| \sin 2x \ dxdy$$

Solución
El integrando para x no es complicado de resolver, por lo que:

$$\int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} |2 - y| \sin 2x \ dxdy = -\frac{1}{2} \int_0^3 |2 - y| \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} dy$$

$$\int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} |2 - y| \sin 2x \ dxdy = -\frac{1}{2} \int_0^3 |2 - y| \left[\cos 2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos 2(0)\right] dy$$

$$\int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} |2 - y| \sin 2x \ dxdy = -\frac{1}{2} \int_0^3 |2 - y|(0 - 1) dy$$

$$\int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} |2 - y| \sin 2x \ dxdy = \frac{1}{2} \int_0^3 |2 - y| dy$$

Ahora hay que eliminar el valor absoluto, para lo cual se aplica el concepto de valor absoluto, así:

$$|2-y| = \begin{cases} 2-y; \ 2-y \geq 0 & (y \leq 2) \\ y-2; \ 2-y < 0 & (y \geq 2) \end{cases}$$

Por lo que:

$$\int_0^3 |2-y|dy = \frac{1}{2}\int_0^2 (2-y)dy + \frac{1}{2}\int_2^3 (y-2)dy$$

$$\int_0^3 |2-y|dy = \frac{1}{2}\left(2y - \frac{y^2}{2}\right)\bigg|_0^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2} - 2y\right)\bigg|_2^3$$

$$\int_0^3 |2-y|dy = 1 + \frac{1}{4}$$

$$\int_0^3 |2-y|dy = \frac{5}{4}$$

Por lo tanto:

$$\int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} |2-y| \sin 2x \ dxdy = \frac{5}{4}$$

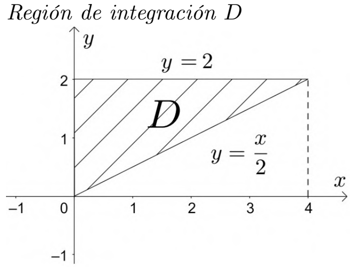
Ejercicio 167.
Calcular la integral doble:

$$\int_0^4 \int_{\frac{x}{2}}^2 e^{y^2} dydx$$

Solución
El integrando para y es muy díficil de integrar, entonces será necesario cambiar los límites de integración para integrar primero para x, para lo cuál representamos gráficamente la región de integración D:
Los límites de integración son:

D: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ \dfrac{x}{2} \leq y \leq 2 \end{cases}$ de esta inecuación se toma $y = \dfrac{x}{2}$ para graficarla, como se muestra en la Figura 3.1

Figura 3.1
Región de integración D



Los nuevos límites de integración serán:

$$D: \begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ 2y \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Entonces:

$$\int_0^4 \int_{\frac{x}{2}}^2 e^{y^2} dydx = \int_0^2 \int_{2y}^4 e^{y^2} dxdy$$

$$\int_0^4 \int_{\frac{x}{2}}^2 e^{y^2} dydx = \int_0^2 e^{y^2} x\bigg|_0^{2y} dy$$

$$\int_0^4 \int_{\frac{x}{2}}^2 e^{y^2} dydx = \int_0^2 e^{y^2}(2y-0)dy$$

$$\int_0^4 \int_{\frac{x}{2}}^2 e^{y^2} dydx = \int_0^2 2ye^{y^2} dy$$

Por el método de sustitución:

$$u = y^2 \quad du = 2y\ dy$$
$$\int 2ye^{y^2} dy = \int e^u du$$
$$\int 2ye^{y^2} dy = e^u$$

Volviendo a la variable original:

$$\int 2ye^{y^2} dy = e^{y^2}$$

Por lo tanto:

$$\int_0^4 \int_{\frac{x}{2}}^2 e^{y^2} dydx = e^{y^2}\Big|_0^2$$
$$\int_0^4 \int_{\frac{x}{2}}^2 e^{y^2} dydx = e^4 - e^0$$
$$\int_0^4 \int_{\frac{x}{2}}^2 e^{y^2} dydx = e^4 - 1$$

Ejercicio 168.
Resolver la siguiente integral doble:

$$\iint\limits_D \sqrt{y^3+2} \quad dA$$

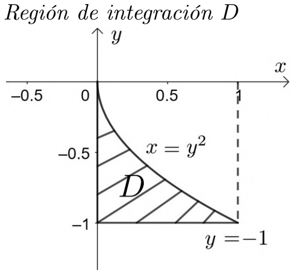
$$D : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le -\sqrt{x} \end{cases}$$

Solución

Se debe representar la región D con el fin de tomar los límites de integración adecuados en función del grado de complejidad del intregando. Para la integral dada, la integral para x es más simple. De la inecuación $-1 \le y \le -\sqrt{x}$ se toma la ecuación $y = -\sqrt{x}$ para graficarla, como se muestra en la Figura 3.2:

$$(y)^2 = (-\sqrt{x})^2$$
$$x = y^2$$

Figura 3.2
Región de integración D



Los nuevos límites de integración serán:

$$D : \begin{cases} -1 \le y \le 0 \\ 0 \le x \le y^2 \end{cases}$$

Entonces:

$$\iint\limits_D \sqrt{y^3+2}\ dy\ dx = \int_{-1}^0 \int_0^{y^2} \sqrt{y^3+2}\ dxdy$$
$$\iint\limits_D \sqrt{y^3+2}\ dy\ dx = \int_{-1}^0 \sqrt{y^3+2}\ \ x\Big|_0^{y^2} dy$$
$$\iint\limits_D \sqrt{y^3+2}\ dy\ dx = \int_{-1}^0 \sqrt{y^3+2}\ y^2 dy$$

Ahora la $\int_{-1}^{0} y^2\sqrt{y^3+2}\ dy$ se lo puede integrar por sustitución en una nueva variable, así:

$$u = y^3 + 2$$
$$du = 3y^2 dy$$

Por lo que la integral indefinida se resuelve como:

$$\int y^2\sqrt{y^3+2}\ dy = \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}\ du$$
$$\int y^2\sqrt{y^3+2}\ dy = \frac{1}{3}\ \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$
$$\int y^2\sqrt{y^3+2}\ dy = \frac{2}{9}\ u^{\frac{3}{2}}$$
$$\int y^2\sqrt{y^3+2}\ dy = \frac{2}{9}\left(y^3+2\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$\int y^2\sqrt{y^3+2}\ dy = \frac{2}{9}\left(y^3+2\right)\sqrt{y^3+2}$$

Finalmente:

$$\iint\limits_D \sqrt{y^3+2}\ dy\ dx = \frac{2}{9}\left(y^3+2\right)\sqrt{y^3+2}\ \Big|_{-1}^{0}$$
$$\iint\limits_D \sqrt{y^3+2}\ dy\ dx = \frac{2}{9}\ [(2)\sqrt{2} - (-1+2)\sqrt{1}]$$
$$\iint\limits_D \sqrt{y^3+2}\ dy\ dx = \frac{2}{9}\ (2\sqrt{2} - 1)$$

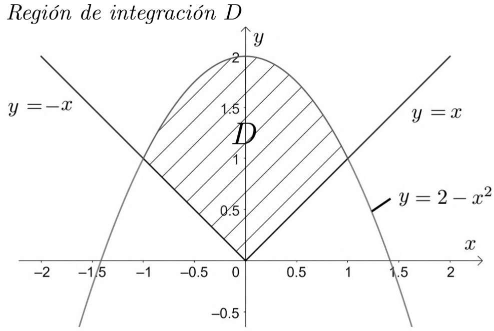
Ejercicio 169.
Calcular la siguiente integral doble:

$$\iint\limits_D \frac{1}{x^2+1}\ dA$$

$$D : \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ |x| \le y \le\ 2 - x^2 \end{cases}$$

Solución
Representando la región D, se tiene dos ecuaciones: $y = |x|$, $\quad y = 2 - x^2$, cuya representación gráfica está en la Figura 3.3:

Figura 3.3
Región de integración D



La región D es simétrica respecto al eje y, el integrando $f(x,y) = \frac{1}{x^2+1}$ tiene el mismo valor en las dos regiones divididas, por lo que la integral se puede calcular sobre la región que está a la derecha del eje y, multiplicando luego por dos.
Los límites para la región que está a la derecha del eje y:

$$D_1 : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \le y \le 2 - x^2 \end{cases}$$

$$\iint\limits_D \frac{1}{x^2+1}\ dA = 2\int_0^1 \int_x^{2-x^2} \frac{1}{1+x^2}\ dy\ dx$$

$$\iint\limits_D \frac{1}{x^2+1}\ dA = 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\quad y\ \Big|_x^{2-x^2} dx$$

$$\iint\limits_D \frac{1}{x^2+1}\ dA = 2\int_0^1 \frac{2-x^2-x}{1+x^2}\ dx$$

$$\iint\limits_D \frac{1}{x^2+1}\ dA = -2\int_0^1 \frac{x^2+x-2}{x^2+1}\ dx$$

Hallando la integral indefinida de:

$$\int \frac{x^2+x-2}{x^2+1}\ dx$$

Expresando la fracción impropia como la suma de su polinomio y una fracción propia:

$$\frac{x^2+x-2}{x^2+1}\ =\ 1+\frac{x-3}{x^2+1}$$

Luego:

$$\int \frac{x^2+x-2}{x^2+1}\ dx = \int \left(1+\frac{x-3}{x^2+1}\right) dx$$

$$\int \frac{x^2+x-2}{x^2+1}\ dx = \int dx + \int \frac{x}{x^2+1}\ dx - \int \frac{3}{x^2+1}\ dx$$

$$\int \frac{x^2+x-2}{x^2+1}\ dx = x+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-3\operatorname{arc\,tg} x$$

Por lo tanto:

$$\iint\limits_D \frac{1}{x^2+1}\ dA = -\ 2\left[x+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-3\operatorname{arc\,tg} x\right]\Bigg|_0^1$$

$$\iint\limits_D \frac{1}{x^2+1}\ dA = -2\left[\left(1+\frac{1}{2}\ln 2-3\operatorname{arc\,tg} 1\right)-\left(\frac{1}{2}\ln 1\right)\right]$$

$$\iint\limits_D \frac{1}{x^2+1}\ dA = -2\left(1+\frac{1}{2}\ln 2-3\cdot\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\iint\limits_D \frac{1}{x^2+1}\ dA = \frac{3}{2}\pi-\ln 2-2$$

Ejercicio 170.

Resolver la siguiente integral doble:

$$\int_0^1 \int_{|x-2|}^{|x^2-4|} \frac{1}{2y}\ dy\ dx$$

Solución

$$\int_0^1 \int_{|x-2|}^{|x^2-4|} \frac{1}{2y}\ dy\ dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln y\Big|_{|x-2|}^{|x^2-4|} dx$$

$$\int_0^1 \int_{|x-2|}^{|x^2-4|} \frac{1}{2y}\ dy\ dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\ln\left|x^2-4\right|-\ln|x-2|\right) dx$$

$$\int_0^1 \int_{|x-2|}^{|x^2-4|} \frac{1}{2y}\ dy\ dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln\left|\frac{x^2-4}{x-2}\right| dx$$

$$\int_0^1 \int_{|x-2|}^{|x^2-4|} \frac{1}{2y}\ dy\ dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln\left|\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}\right| dx$$

$$\int_0^1 \int_{|x-2|}^{|x^2-4|} \frac{1}{2y}\ dy\ dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln|x+2|\ dx$$

$$\int_0^1 \int_{|x-2|}^{|x^2-4|} \frac{1}{2y}\ dy\ dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(x+2)\ dx$$

Resolviendo la integral indefinida:

$$\int \ln(x+2)dx$$

Integrando por partes:

$$u = \ln(x+2); \quad \int dv = \int dx$$

$$du = \frac{dx}{x+2}; \quad v = x$$

$$\int \ln(x+2)dx = x\ln(x+2) - \int \frac{x}{x+2}dx$$

$$\int \ln(x+2)dx = x\ln(x+2) - \int \frac{x+2-2}{x+2}dx$$

$$\int \ln(x+2)dx = x\ln(x+2) - \int \left(\frac{x+2}{x+2} - \frac{2}{x+2}\right) dx$$

$$\int \ln(x+2)dx = x\ln(x+2) - \int \left(1 - \frac{2}{x+2}\right) dx$$

$$\int \ln(x+2)dx = x\ln(x+2) - x + 2\ln(x+2)$$

Por lo tanto:

$$\int_0^1 \int_{|x-2|}^{|x^2-4|} \frac{1}{2y}\ dy\ dx = \frac{1}{2}[x\ln(x+2) - x + 2\ln(x+2)]\Big|_0^1$$

$$\int_0^1 \int_{|x-2|}^{|x^2-1|} \frac{1}{2y}\ dy\ dx = \frac{1}{2}[(\ln 3 - 1 + 2\ln 3) - (2\ln 2)]$$

$$\int_0^1 \int_{|x-2|}^{|x^2-4|} \frac{1}{2y}\ dy\ dx = \frac{1}{2}(3\ln 3 - 2\ln 2 - 1)$$

$$\int_0^1 \int_{|x-2|}^{|x^2-4|} \frac{1}{2y}\ dy\ dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{27}{4}\right) - \frac{1}{2}$$

3.2. Integrales dobles en coordenadas polares

En algunas ocasiones es bastante complicado la descripción de la región D en coordenadas cartesianas, pero puede describirse fácilmente en coordenadas polares.
Para resolver las integrales dobles en coordenadas polares se tomará como plano polar el plano horizontal xy, cuyas ecuaciones que relacionan las coordenadas polares con las rectangulares están dadas por:

$$\begin{array}{ll} x = r\cos\theta & r^2 = x^2 + y^2 \\ y = r\sin\theta & \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} \end{array}$$

El cálculo de integrales dobles en coordenadas polares se lo hace por medio de integrales iteradas (Stewart, 2012). Se tienen dos casos:
Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua sobre D.
a) $D = \{(r,\theta)/\alpha \leq \theta \leq \beta \wedge a \leq r \leq b\}$

$$\iint_D f(r,\theta)\ dA = \int_\alpha^\beta \left[\int_a^b f(r,\theta) r\ dr\right]\ d\theta = \int_a^b \left[\int_\alpha^\beta f(r,0) r\ dr\right]\ d\theta \tag{3.4}$$

b)$D = \{(r,\theta)/\alpha \leq \theta \leq \beta \wedge \varphi_1(\theta) \leq r \leq \varphi_2(\theta)\}$

$$\iint_D f(r,\theta)\ dA = \int_\alpha^\beta \left[\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r,\theta)\ dr\right]\ d\theta \tag{3.5}$$

Se recomienda usar coordenadas polares para resolver las integrales dobles cuando la región D tenga formas circulares o afines.

Ejercicio 171.
Calcular la siguiente integral doble en coordenadas polares:

$$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dA$$

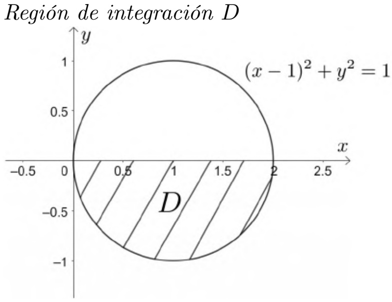
$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ -\sqrt{2x-x^2} \leq y \leq 0 \end{cases}$$

Solución
Hay que representar la región D, para lo cual se parte de la ecuación:

$$\begin{aligned} y &= -\sqrt{2x-x^2} \\ (y)^2 &= \left(-\sqrt{2x-x^2}\right)^2 \\ y^2 &= 2x-x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2-2x+1+y^2 &= 1 \quad \text{completado el cuadrado perfecto} \\ (x-1)^2+y^2 &= 1 \quad \text{cuya gráfica está en la Figura 3.4} \end{aligned}$$

Figura 3.4
Región de integración D



Pasando a coordenadas polares:

$$\begin{aligned} x^2+y^2-2x &= 0 \\ r^2-2r\cos\theta &= 0 \\ r(r-2\cos\theta) &= 0 \\ r=0,\ r &= 2\cos\theta \end{aligned}$$

Por lo tanto: $0 \leq r \leq 2\cos\theta$.
La curva que rodea a D está entre los puntos $(0,0)$ y $(2,0)$. Hay que determinar qué ángulos les corresponde a estos puntos. Para el punto $(0,0)$:
En este punto $r=0$, entonces:

$$\begin{aligned} r &= 2\cos\theta \\ 0 &= 2\cos\theta \\ \cos\theta &= 0 \\ \theta &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Para el punto $(2,0)$, se utiliza la ecuación $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\theta &= \frac{0}{2} \\ \operatorname{tg}\theta &= 0 \\ \theta &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto: $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$
El integrando $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pasando a coordenadas polares. sería $f(r,\theta) = \frac{1}{r}$.

Por lo que:

$$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \int_{0}^{2\cos\theta} \frac{1}{r} \cdot r \; dr \; d\theta$$

$$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} r \Bigg|_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 2\cos\theta \; d\theta$$

$$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2\sin\theta \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}$$

$$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2\left(\sin 0 - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2(0+1)$$

$$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2$$

Ejercicio 172.
Resuelva la siguiente integral doble en coordenadas polares:

$$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{2x^2+2y^2}} \; dA$$

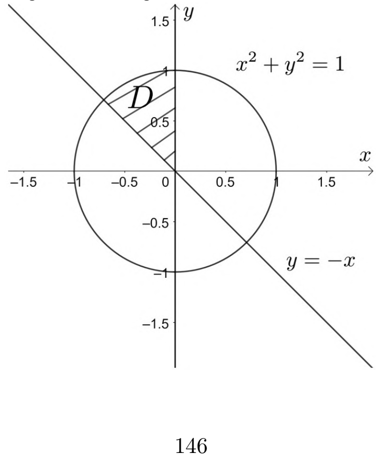
$$D : \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 0 \\ -x \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

Solución
Para representar la región D, graficamos las ecuaciones $y = -x \;\wedge\; y = \sqrt{1-x^2}$.

$$(y)^2 = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2$$
$$y^2 = 1 - x^2$$
$$x^2 + y^2 = 1$$

Lo cual se muestra en la Figura 3.5:

Figura 3.5
Región de integración D



Para hallar los límites de integración:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ r^2 &= 1 \\ r &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$0 \leq r \leq 1$$

La región D está entre los puntos $(0, 1)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, por lo que los ángulos serán:
Para el punto (0,1):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{y}{x} = \frac{1}{0} = \infty \\ \theta &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Para el punto $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{y}{x} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -1 \\ \theta &= \frac{3}{4}\pi \end{aligned}$$

Por lo tanto: $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi$
El integrando expresado en coordenadas polares:

$$\begin{aligned} f\left(x, y\right) &= \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 2y^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}} \\ f(r, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{2}\ r} \end{aligned}$$

Por lo que:

$$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 2y^2}}\ dA = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}\ r}\ r\ dr\ d\theta$$

$$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 2y^2}}\ dA = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} r \Bigg|_0^1\ d\theta$$

$$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 2y^2}}\ dA = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} d\theta$$

$$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 2y^2}}\ dA = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \theta \Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}$$

$$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 2y^2}}\ dA = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 2y^2}}\ dA = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

Ejercicio 173.
Calcular la siguiente integral doble en coordenadas polares:

$$\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}\ dA$$

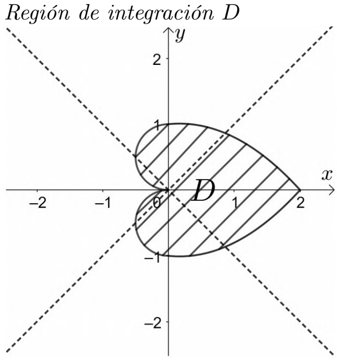
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / r = 1 + \cos\theta\right\}$$

Solución
Representando gráficamente la región D en la Figura 3.6 a partir de los datos de la Tabla 3.1:

Tabla 3.1
r en función de θ

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
r	2	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	2

Figura 3.6
Región de integración D



Por lo que los límitcs de integración son:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$
$$0 \leq r \leq 1+\cos\theta$$

Entonces:

$$\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\ dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} \frac{r}{r+r\cos\theta}\ r\ dr\ d\theta$$

$$\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\ dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} \frac{1}{1+\cos\theta}\ r\ dr\ d\theta$$

$$\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\ dA = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\cos\theta}\ \frac{r^2}{2}\ \Bigg|_0^{1+\cos\theta}\ d\theta$$

$$\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\ dA = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos\theta)^2}{1+\cos\theta}\ d\theta$$

$$\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\ dA = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)\ d\theta$$

$$\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\ dA = \frac{1}{2}(\theta+\sin\theta)\ \Bigg|_0^{2\pi}$$

$$\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\ dA = \frac{1}{2}((2\pi-0)-(0-0))$$

$$\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\ dA = \pi$$

Ejercicio 174.
Resolver la siguiente integral doble en coordenadas polares:

$$\int_{-1}^{0}\int_{x}^{-1-\sqrt{-1-x^2}} \frac{|xy|}{x^2+y^2}\ dy\ dx$$

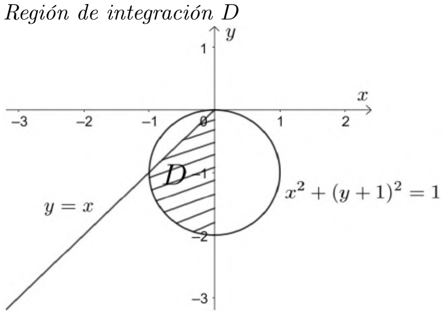
Solución
Representando la región D (Figura 3.7):

$$D : \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ x \leq y \leq -1 - \sqrt{1 - x^2} \end{cases}$$

Partiendo de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} y &= x \\ y &= -1 - \sqrt{1 - x^2} \\ (y+1)^2 &= \left(-\sqrt{1 - x^2}\right)^2 \\ (y+1)^2 &= 1 - x^2 \\ x^2 + (y+1)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Figura 3.7
Región de integración D



Se determina los límites de integración como:

$$\begin{aligned} y &= x \\ y' &= \operatorname{tg}\theta = 1 \\ \theta &= \frac{5}{4}\pi \end{aligned}$$

Para el punto $(0, -2)$:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = -\frac{2}{0} = \infty$$

$$\theta = \frac{3}{2}\pi$$

Por lo que:

$$\frac{5}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$$

.
Pasando la ecuación $x^2 + (y+1)^2 = 1$ a coordenadas polares:

$$x^2 + y^2 + 2y = 0$$

$$r^2 + 2r\sin\theta = 0$$

$$r(r + 2\sin\theta) = 0$$

$$r = 0 \quad \vee \quad r = -2\sin\theta$$

Por lo que:

$$0 \leq r \leq -2\sin\theta$$

El integrando en coordenadas polares:

$$f(x, y) = \frac{|xy|}{x^2 + y^2} = \frac{(-x)(-y)}{x^2 + y^2} = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$f(r, \theta) = \frac{r^2 \cos\theta \ \sin\theta}{r^2} = \sin\theta \ \cos\theta$$

Entonces la integral doble operada en cordenadas polares quedaría como:

$$\int_{-1}^{0}\int_{x}^{-1-\sqrt{1-x^2}} \frac{|xy|}{x^2+y^2}\ dy\ dx = \int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\int_{0}^{-2\sin\theta} \sin\theta\ \cos\theta\ r\ dr\ d\theta$$

$$\int_{-1}^{0}\int_{x}^{-1-\sqrt{1-x^2}} \frac{|xy|}{x^2+y^2}\ dy\ dx = \int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sin\theta\ \cos\theta\ \frac{r^2}{2}\Bigg|_{0}^{-2\sin\theta}\ d\theta$$

$$\int_{-1}^{0}\int_{x}^{-1-\sqrt{1-x^2}} \frac{|xy|}{x^2+y^2}\ dy\ dx = \int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sin\theta\ \cos\theta\ \frac{(-2\sin\theta)^2}{2}\ d\theta$$

$$\int_{-1}^{0}\int_{x}^{-1-\sqrt{1-x^2}} \frac{|xy|}{x^2+y^2}\ dy\ dx = 2\int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sin^3\theta\ \cos\theta\ d\theta$$

Resolviendo la integral indefinida por sustitución:

$$\int \sin^3\theta\ \cos\theta\ d\theta$$

$$u = \sin\theta \qquad du = \cos\theta\ d\theta$$

$$\int \sin^3\theta\ \cos\theta\ d\theta = \int u^3 du$$

$$\int \sin^3\theta\ \cos\theta\ d\theta = \frac{1}{4}\ u^4$$

$$\int \sin^3\theta\ \cos\theta\ d\theta = \frac{1}{4}\ \sin^4\theta$$

Regresando a la integral original se tendría:

$$\int_{-1}^{0}\int_{x}^{-1-\sqrt{1-x^2}} \frac{|xy|}{x^2+y^2}\ dy\ dx = 2\left(\frac{1}{4}\sin^4\theta\right)\Bigg|_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}$$

$$\int_{-1}^{0}\int_{x}^{-1-\sqrt{1-x^2}} \frac{|xy|}{x^2+y^2}\ dy\ dx = \frac{1}{2}\left(\left(\sin\frac{3}{2}\pi\right)^4 - \left(\sin\frac{5}{4}\pi\right)^4\right)$$

$$\int_{-1}^{0}\int_{x}^{-1-\sqrt{1-x^2}} \frac{|xy|}{x^2+y^2}\ dy\ dx = \frac{1}{2}\left((-1)^4 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4\right)$$

$$\int_{-1}^{0}\int_{x}^{-1-\sqrt{1-x^2}} \frac{|xy|}{x^2+y^2}\ dy\ dx = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)$$

$$\int_{-1}^{0}\int_{x}^{-1-\sqrt{1-x^2}} \frac{|xy|}{x^2+y^2}\ dy\ dx = \frac{3}{8}$$

Ejercicio 175.
Calcular la siguiente integral doble en coordenadas polares:

$$\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{-2+\sqrt{4-y^2}} xy\ dx\ dy$$

Solución
Para representar la región D (Figura 3.8), se parte de los límites de integración:

$$D : \begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ -\sqrt{4y-y^2} \le x \le -2+\sqrt{4-y^2} \end{cases}$$

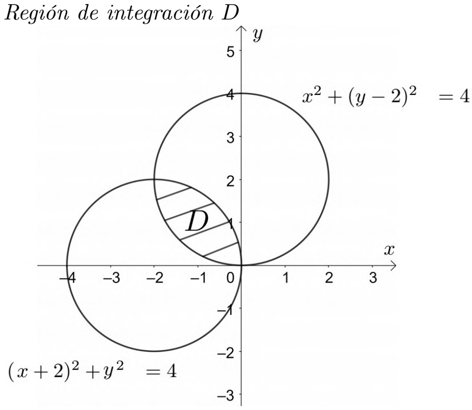
Se toman las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= -\sqrt{4y-y^2} \\ x^2 &= \left(-\sqrt{4y-y^2}\right)^2 \\ x^2 &= 4y-y^2 \\ x^2+y^2-4y+4 &= 4 \\ x^2+(y-2)^2 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= -2+\sqrt{4-y^2} \\ (x+2)^2 &= \left(\sqrt{4-y^2}\right)^2 \\ (x+2)^2 &= 4-y^2 \\ (x+2)^2+y^2 &= 4 \end{aligned}$$

Figura 3.8

Región de integración D



Pasando a coordenadas polares las ecuaciones de las circunferencias con centros desplazados:

$$\begin{array}{cc} x^2+(y-2)^2=4 & (x+2)^2+y^2=4 \\ x^2+y^2-4y=0 & x^2+4x+y^2=0 \\ r^2-4r\sin\theta=0 & r^2+4r\cos\theta=0 \\ r(r-4\sin\theta)=0 & r(r+4\cos\theta)=0 \\ r=0 \ \vee \ r=4\sin\theta & r=0 \ \vee \ r=-4\cos\theta \end{array}$$

Se halla el ángulo de intersección de las cincunferencias:

$$\begin{aligned} 4\sin\theta &= -4\cos\theta \\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta} &= -1 \\ \operatorname{tg}\theta &= -1 \\ \theta &= \frac{3}{4}\pi \end{aligned}$$

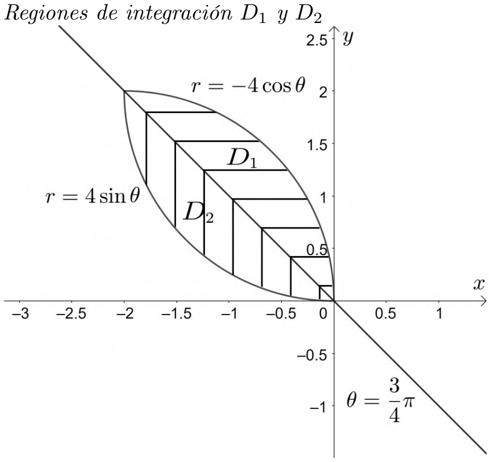
Es necesario también determinar en qué ángulos inicia y termina la región D, así se tiene:

$$\begin{array}{rlrl} r & = -r\cos\theta & r & = 4\sin\theta \\ r & = 0 & r & = 0 \\ -r(\cos\theta & = 0 & 4\sin\theta & = 0 \\ \cos\theta & = 0 & \sin\theta & = 0 \\ \theta & = \frac{\pi}{2} & \theta & = \pi \end{array}$$

Por lo que es necesario dividir la región en dos subregiones, D_1 y D_2 como se observa en la Figura 3.9:

Figura 3.9

Regiones de integración D_1 y D_2



El integrando pasando a coordenadas polares:

$$f(x,y) = xy$$
$$f(r,\theta) = \mathbb{R}^2 \cos\theta \sin\theta$$

Los límites para D_1 y D_2 son:

$$D_1 \colon \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{3}{4}\pi \\ 0 \leq r \leq -4\cos\theta \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} \dfrac{3}{4}\pi \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 4\sin\theta \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{-2+\sqrt{4y-y^2}} xy\ dx\ dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \int_0^{-4\cos\theta} r^2 \cos\theta\ \sin\theta\ r\ dr\ d\theta + \int_{3\pi}^{\pi} \int_0^{4\sin\theta} r^2\ \cos\theta\ \sin\theta\ r\ dr\ d\theta$$

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{-2+\sqrt{4y-y^2}} xy\ dx\ dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \int_0^{-4\cos\theta} \cos\theta\ \sin\theta\ r^3\ dr\ d\theta + \int_{3\pi}^{\pi} \int_0^{4\sin\theta} \cos\theta\ \sin\theta\ r^3\ dr\ d\theta$$

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{-2+\sqrt{4y-y^2}} xy\ dx\ dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \int_0^{-4\cos\theta} \cos\theta\ \sin\theta\ \frac{r^4}{4}\bigg|_0^{-4\cos\theta} d\theta + \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \int_0^{4\sin\theta} \cos\theta\ \sin\theta\ \frac{r^4}{4}\ \bigg|_0^{4\sin\theta} d\theta$$

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{-2+\sqrt{4y-y^2}} xy\ dx\ dy = 64\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \cos^5\theta\ \sin\theta\ d\theta + 64\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \sin^5\theta\ \cos\theta\ d\theta$$

Resolviendo las integrales indefinidas:

$$\begin{array}{ll}
\int \cos^5\theta\ \sin\theta\ d\theta & \int \sin^5\theta\ \cos\theta\ d\theta \\
u = \cos\theta \quad du = -\sin\theta\ d\theta & u = \sin\theta\ du = \cos\theta\ d\theta \\
\int \cos^5\theta\ \sin\theta\ d\theta = -\int u^5 du & \int \sin^5\theta\ \cos\theta\ d\theta = \int w^5 dw \\
\int \cos^5\theta\ \sin\theta\ d\theta = -\frac{u^6}{6} & \int \sin^5\theta\ \cos\theta\ d\theta = \frac{w^6}{6} \\
\int \cos^5\theta\ \sin\theta\ d\theta = -\frac{\cos^6\theta}{6} & \int \sin^5\theta\ \cos\theta\ d\theta = \frac{\sin^6\theta}{6}
\end{array}$$

Por lo tanto:

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{-2+\sqrt{4y-y^2}} xy\ dx\ dy = 64\left(-\frac{\cos^6\theta}{6}\bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} + \frac{\sin^6\theta}{6}\bigg|_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\right)$$

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{-2+\sqrt{4y-y^2}} xy\ dx\ dy = \frac{32}{3}\left[\left[-\left(\cos\frac{3}{4}\pi\right)^6 + \left(\cos\frac{\pi}{2}\right)^6\right] + \left[(\sin\pi)^6 - \left(\sin\frac{3\pi}{4}\right)^6\right]\right]$$

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{-2+\sqrt{4y-y^2}} xy\ dx\ dy = \frac{32}{3}\left[-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6\right]$$

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{-2+\sqrt{4y-y^2}} xy\ dx\ dy = \frac{32}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{-2+\sqrt{4y-y^2}} xy\ dx\ dy = -\frac{8}{3}$$

3.3. Aplicaciones de las integrales dobles

a) Cálculo del área de una región A en el plano

$$A(D) = \iint_D dA \quad (\mathrm{m}^2.) \tag{3.6}$$

b) Cálculo del volumen de una región acotada por dos superficies.

$$V = \iint_D f(x,y)\ dA \quad (\ \mathrm{m}^3.) \tag{3.7}$$

Si $f(x,y) \geqslant 0 \quad \forall (x,y) \in D$.

c) Masa de una placa delgada plana

$$M = \iint_D \delta(x, y)\ dA \quad \text{(kg)}. \tag{3.8}$$

Donde $\delta(x, y)$ es la densidad superficial en kg/m^2.
d) Centro de masa de una placa delgada plana

$$\bar{x} = \frac{My}{M} \quad \text{(m)}. \tag{3.9}$$

$$\bar{y} = \frac{My}{M} \quad \text{(m)}. \tag{3.10}$$

donde Mx: momento estático respecto al eje x.
My: momento estático respecto al eje y.

$$M_x = \iint_D y\delta(x, y)\ dA \cdot (\text{ kg} - \text{m}). \tag{3.11}$$

$$M_y = \iint_D x\delta(x, y)\ dA(\text{ kg} - \text{m}). \tag{3.12}$$

e) Momentos de inercia de una placa delgada plana

$$I_x = \iint_D y^2\delta(x, y)\ dA \quad \left(\text{ kg} - \text{m}^2\right). \tag{3.13}$$

$$Iy = \iint_D x^2\delta(x, y)\ dA \quad \left(\text{ kg} - \text{m}^2\right). \tag{3.14}$$

$$I_0 = \iint_D \left(y^2 + x^2\right)\delta(x, y)\ dA = Ix + I_y \quad \left(\text{ kg} - \text{m}^2\right). \tag{3.15}$$

f) Radios de giro de una placa delgada plana

$$r_x^2 = \frac{I_x}{M} \quad \text{(m)}. \tag{3.16}$$

$$r_y^2 = \frac{I_y}{M} \quad \text{(m)}. \tag{3.17}$$

Las ecuaciones anteriores que están expresadas en coordenadas rectangulares pueden facilmente ser expresadas en coordenadas polares, es la forma de la región D que decidirá que sistema de coordenadas se usará para resolver la integral doble (Edwards y Larson, 2017).

Ejercicio 176.

Calcular el área limitada por la curva $\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^3} = 2xy$.
Solución
Utilizando la integral doble para el cálculo de áreas se tiene:

$$A = \iint_D dA$$

Por lo que es necesario identificar la región D, limitada por la curva $\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^3} = 2xy$. Pasando la ecuación a coordenadas polares:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^3} &= 2xy \\
\sqrt{\left(r^2\right)^3} &= 2\ r^2 \cos\theta\ \sin\theta \\
r^3 &= 2r^2 \cos\theta\ \sin\theta \\
r^3 - r^2 \sin 2\theta &= 0 \\
r^2(r - \sin 2\theta) &= 0 \\
r = 0 \quad v \quad r &= \sin 2\theta
\end{aligned}$$

Tabla 3.2

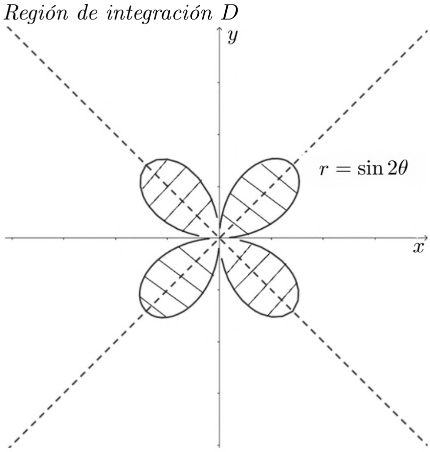
r en función de θ

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
r	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

La gráfica se muestra en la Figura 3.10, tomando como datos los de la Tabla 3.2:

Figura 3.10

Región de integración D



Se obtiene una rosa de 4 pétalos, es suficiente calcular el área de un pétalo y luego multiplicar por cuatro.
Los límites de integración serían:

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$
$$0 \leq r \leq \sin 2\theta$$

Por lo tanto:

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sin 2\theta} r\ dr\ d\theta$$
$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^{\sin 2\theta} d\theta$$
$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta\ d\theta$$
$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right) d\theta$$
$$A = \left.\left(\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$A = \frac{\pi}{2}\mathrm{m}^2.$$

Ejercicio 177.
Calcular el área de la región D mediante integrales dobles:

$$D : \begin{cases} y = |x^2 - 2| \\ y = x \end{cases}$$

Solución
Utilizando la integral doble para el cálculo de áreas:

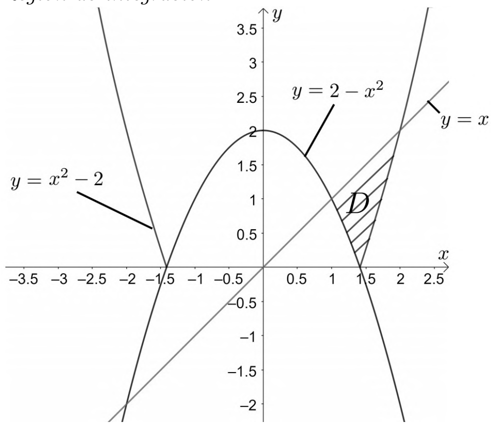
$$A = \iint\limits_D dA$$

Representando gráficamente las ecuaciones que limitan la región D (Figura 3.11):
$y = \left|x^2 - 2\right| \ \wedge \ y = x$

$$y = \begin{cases} x^2 - 2; & x^2 - 2 \geq 0 \\ 2 - x^2; & x^2 - 2 < 0 \end{cases}$$

Figura 3.11

Región de integración D



Hallando los puntos de intersección:

$$y = 2 - x^2 \wedge y = x \qquad ; \qquad y = x^2 - 2 \wedge y = x$$

$$\begin{aligned} 2 - x^2 &= x \\ x^2 + x - 2 &= 0 \\ (x+2)(x-1) &= 0 \\ x = 1,\ y &= 1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x^2 - 2 &= x \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x-2)(x+1) &= 0 \\ x = 2,\ y &= 2 \end{aligned}$$

Por lo que es necesario dividir en dos regiones, cuyos límites serán:

$$D_1 : \begin{cases} 1 \leq x \leq \sqrt{2} \\ 2 - x^2 \leq y \leq x \end{cases} \qquad\qquad D_2 : \begin{cases} \sqrt{2} \leq x \leq 2 \\ x^2 - 2 \leq y \leq x \end{cases}$$

Entonces:

$$A = \iint\limits_{D_1} dA + \iint\limits_{D_2} dA$$

$$A = \int_1^{\sqrt{2}} \int_{2-x^2}^{x} dy\ dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \int_{x^2-2}^{x} dy\ dx$$

$$A = \int_1^{\sqrt{2}} y \left|_{2-x^2}^{x} dx + \int_{\sqrt{2}}^{x} y \right|_{x^2-2}^{x} dx$$

$$A = \int_1^{\sqrt{2}} \left(x - 2 + x^2\right) dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \left(x - x^2 + 2\right) dx$$

$$A = \left(\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2}$$

$$A = \left(1 - 2\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) + \left(2 - \frac{8}{3} + 4\right) - \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{2}\right)$$

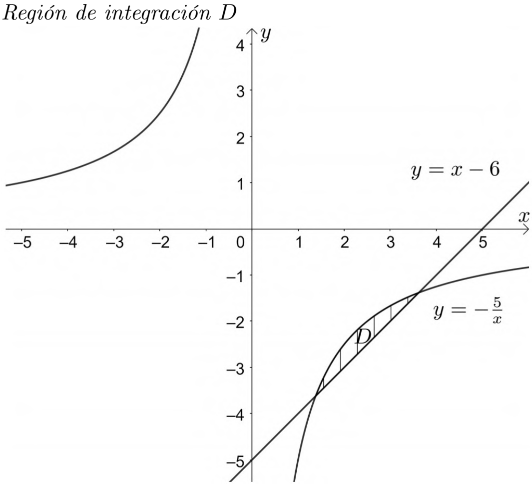
$$A = \frac{1}{6}(35 - 16\sqrt{2})\mathrm{m}^2.$$

Ejercicio 178.
Calcular la masa de una placa plana que tiene la forma de la región D, limitada por las ecuaciones siguientes:

$$D : \begin{cases} y = -\frac{5}{x} \\ y = x - 6 \end{cases}$$

Sabiendo que la densidad superficial varía como la distancia de un punto de la placa al eje y.
Solución
Representando las ecuaciones que límitan la región A, se tiene (Figura 3.12):

Figura 3.12
Región de integración D



Como se trata de una placa plana, se utiliza la integral doble para el cálculo de su masa.

$$M = \iint_D \delta(x, y)\ dA$$

De acuerdo con los datos, $\delta(x, y) = x\ (\mathrm{kg/m^2})$.
Hallando los límites de integración:

$$y = -\frac{5}{x}, \quad y = x - 6$$

Igualando para determinar los puntos de intersección:

$$-\frac{5}{x} = x - 6$$
$$-5 = x^2 - 6x$$
$$x^2 - 6x + 5 = 0$$
$$(x - 5)(x - 1) = 0$$
$$\begin{array}{lll} x = 5 & \vee & x = 1 \\ y = -1 & & y = -5 \end{array}$$

Por lo tanto:

$$M = \int_1^5 \int_{x-6}^{-\frac{5}{x}} x\ dy\ dx$$
$$M = \int_1^5 x\ y \Big|_{x-6}^{-\frac{5}{x}} dx$$
$$M = \int_1^5 x \left(-\frac{5}{x} - x + 6\right) dx$$
$$M = \int_1^5 \left(-5 - x^2 + 6x\right) dx$$
$$M = -5x - \frac{x^3}{3} + 3x^2 \Big|_1^5$$

$$M = \left(-25 - \frac{125}{3} + 75\right) - \left(-5 - \frac{1}{3} + 3\right)$$
$$M = \frac{32}{3} \text{ kg.}$$

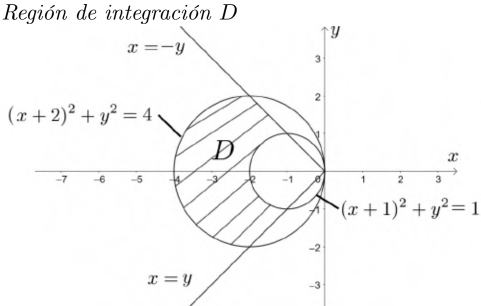
Ejercicio 179.
Calcular la masa de una plana plana homogénea que tiene la forma de la región D:

$$D : \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x \geq 0 \\ x^2 + y^2 + 4x \leq 0 \\ x = |y| \end{cases}$$

Solución
Graficando las ecuaciones que forman la región D (Figura 3.13):

$$x^2 + y^2 + 2x = 0 \quad ; \quad x^2 + y^2 + 4x = 0 \quad ; \quad x = |y|$$
$$(x+1)^2 + y^2 = 1 \quad ; \quad (x+2)^2 + y^2 = 4 \quad ; \quad x = \begin{cases} y; y \geq 0 \\ -y; y \geq 0 \end{cases}$$

Figura 3.13
Región de integración D



Puesto que la región D está limitada por formas circulares, se utilizarán coordenadas polares.
Los límites de integración se los obtiene de:

$$\begin{array}{rlcr} y = -x & & ; & y = x \\ y' = \operatorname{tg}\theta & = -1 & & y' = \operatorname{tg}\theta = 1 \\ \theta & = \frac{3}{4}\pi & & \theta = \frac{5}{4}\pi \end{array}$$

Entonces:
$$\frac{3}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{5}{4}\pi$$

.
Ahora:

$$\begin{array}{ccc} x^2 + y^2 + 2x = 0 & ; & x^2 + y^2 + 4x = 0 \\ r^2 + 2r\cos\theta = 0 & ; & r^2 + 4r\cos\theta = 0 \\ r(r + 2\cos\theta) = 0 & ; & r(r + 4\cos\theta) = 0 \\ r = 0 \ \vee \ r = -2\cos\theta & ; & r = 0 \ \vee \ r = -4\cos\theta \end{array}$$

Entonces:
$$-2\cos \leqslant r \leqslant -4\cos\theta$$

Calculando la masa mediante integrales dobles:

$$M = \iint_D \delta(x, y) \; dA$$

Como es una placa homogénea, entonces: $\delta(x, y) = K \left(\text{ kg/m}^2 \right)$.

$$M = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \int_{-2\cos\theta}^{-4\cos\theta} K \; r \; dr \; d\theta$$
$$M = K \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \left. \frac{r^2}{2} \right|_{-2\cos\theta}^{-4\cos\theta} d\theta$$
$$M = \frac{K}{2} \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \left(16\cos^2\theta - 4\cos^2\theta\right) \; d\theta$$

$$M = 6K \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \cos^2\theta \; d\theta$$

$$M = 6K \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) \; d\theta$$

$$M = 3K \left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Bigg|_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}$$

$$M = 3K \left[\left(\frac{5}{4}\pi + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\right)\right]$$

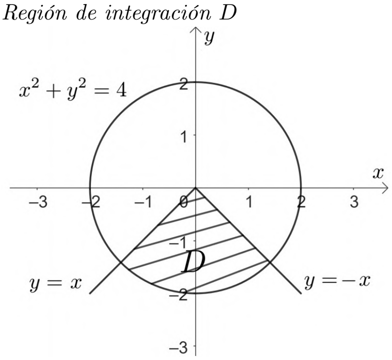
$$M = \frac{3}{2}K(\pi + 2) \text{ kg.}$$

Ejercicio 180.
Hallar el centro de gravedad de una placa plana homogénea que tiene la forma de la región D:

$$D : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ \quad y = -|x| \\ \quad y \leq 0 \end{cases}$$

Solución
Graficando las ecuaciones que limitan la región D (Figura 3.14):

Figura 3.14
Región de integración D



Puesto que la región D está limitada por una forma circular, se utilizarán coordenadas polares para resolver el ejercicio
El centro de gravedad tiene como ecuaciones:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

Donde Mx, My son los momentos estáticos M en la masa.

$$M_x = \iint_D y \; \delta(x, y) \; dA$$

$$My = \iint_D x \; \delta(x, y) \; dA$$

$$M = \iint_D \delta(x, y) \; dA$$

Determinando los límites de integración a partir de:

$$\begin{array}{rcr} y = x & ; & y = -x \\ y' = \operatorname{tg}\theta = 1 & ; & y' = \operatorname{tg}\theta = -1 \\ \theta = \frac{5}{4}\pi & ; & \theta = \frac{7}{4}\pi \end{array}$$

Entonces:

$$\frac{5}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{7}{4}\pi$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ r^2 &= 4 \\ r &= 2 \end{aligned}$$

Por lo que:

$$0 \leq r \leq 2$$

Calculando la masa:

$$M = \iint\limits_D \delta\left(x, y\right)\ dA$$

Como es una placa homogénea, $\delta\left(x, y\right) = K\left(\mathrm{kg/m^2}\right)$.

$$\begin{aligned} M &= K \int_0^2 \int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} r\ d\theta\ dr \\ M &= K \int_0^2 r\ \theta\ \Big|_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} dr \\ M &= \frac{K\pi}{2} \int_0^2 r\ dr \\ M &= \frac{K\pi}{4}\ r^2\ \Big|_0^2 \\ M &= K\pi\ \mathrm{kg.} \end{aligned}$$

Calculando el momento estático respecto al eje x :

$$\begin{aligned} M_x &= \iint\limits_D y\ \delta\left(x, y\right)\ dA \\ Mx &= K \int_0^2 \int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} r^2 \sin\theta\ d\theta\ dr \\ M_x &= -\ K \int_0^2 r^2 \cos\theta\ \Big|_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} dr \\ Mx &= -K \int_0^2 r^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) dr \\ Mx &= \sqrt{2}\ K \cdot \frac{r^3}{3}\ \Big|_0^2 \\ Mx &= -\frac{8}{3}\sqrt{2}\ K \quad \mathrm{kg - m.} \end{aligned}$$

Calculando el momento estático respecto al eje y:

$$\begin{aligned} My &= \iint\limits_D x\ \delta\left(x, y\right)\ dA \\ My &= K \int_0^2 \int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} r^2 \cos\theta\ d\theta\ dr \\ My &= K \int_0^2 r^2 \sin\theta\ \Big|_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} dr \\ My &= K \int_0^2 r^2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) dr \\ My &= 0 \quad \mathrm{kg - m.} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\bar{x} = \frac{My}{M} = \frac{0}{K\pi} = 0 \text{ m.}$$

$$\bar{y} = \frac{Mx}{M} = \frac{-\frac{8}{3}\sqrt{2}K}{K\pi} = -\frac{8\sqrt{2}}{3\pi}\text{m.}$$

$$c.g.\left(0, -\frac{-8\sqrt{2}}{3\pi}\right)$$

Ejercicio 181.
Hallar el centro de gravedad de una placa plana que tiene la forma de la región D limitada por la curva $x^2 + y^2 = \left(x^2 + y^2 + y\right)^2$, sabiendo que la densidad superficial varía en forma inversamente proporcional a la distancia de un punto de la placa al origen.
Solución
No es sencillo manejar la ecuación que limita a la región D en coordenades cartesianas, por lo que se usarán coordenadas polares, así se tiene:

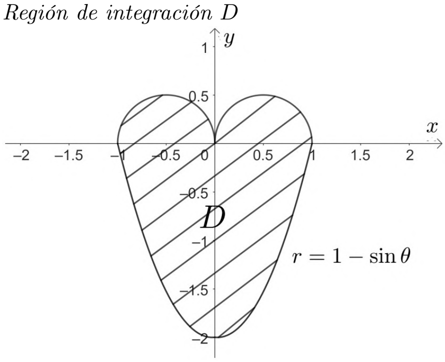
$$x^2 + y^2 = \left(x^2 + y^2 + y\right)^2$$
$$r^2 = \left(r^2 + r\sin\theta\right)^2$$
$$r^2 = r^2(r + \sin\theta)^2$$
$$r^2 - r^2(r + \sin\theta)^2 = 0$$
$$r^2\left[1 - (r + \sin\theta)^2\right] = 0$$
$$r = 0 \qquad \vee \qquad 1 - (r + \sin\theta)^2 = 0$$
$$\sqrt{1} = \sqrt{(r + \sin\theta)^2}$$
$$1 = r + \sin\theta$$
$$r = 1 - \sin\theta$$

Tabla 3.3
r en función de θ

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
r	1	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	2	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Cuya gráfica se muestra en la Figura 3.15 en base a los datos de la Tabla 3.3:

Figura 3.15
Región de integración D



Los límites de integración son:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \wedge \quad 0 \leq r \leq 1 - \sin\theta$$

La densidad superficial: $\delta(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ kg/m^2. $\Rightarrow$ $\delta(r, \theta) = \frac{1}{r}$ kg/m^2.
Calculando la masa:

$$M = \iint\limits_D \delta(x, y)\ dA$$

$$M = \iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ dA$$

Pasando a conordenadas polares:

$$M=\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\sin\theta}\frac{1}{r}\cdot r\ dr\ d\theta$$
$$M=\int_0^{2\pi} r\Big|_0^{1-\sin\theta} d\theta$$
$$M=\int_0^{2\pi}(1-\sin\theta)\ d\theta$$
$$M=(\theta+\cos\theta)\Big|_0^{2\pi}$$
$$M=2\pi+1-1$$
$$M=2\pi\ \text{kg.}$$

Calculando el momento estático respecto al aje x :

$$M_x=\iint_D y\ \delta(x,y)\ dA$$

Pasando a coordendas polares:

$$M_x=\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\sin\theta} r\ \sin\theta\ dr\ d\theta$$
$$Mx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin\theta\ r^2\Big|_0^{1-\sin\theta} d\theta$$
$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin\theta\ (1-\sin\theta)^2\ d\theta$$
$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin\theta\left(1-2\sin\theta+\sin^2\theta\right)\ d\theta$$
$$Mx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\sin\theta-2\sin^2\theta+\sin\theta\left(1-\cos^2\theta\right)\right]\ d\theta$$
$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(2\sin\theta-1+\cos 2\theta-\cos^3\theta\ \sin\theta\right)\ d\theta$$
$$M_x=\frac{1}{2}\left(-2\cos\theta-\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{\cos^4\theta}{4}\right)\Big|_0^{2\pi}$$
$$Mx=\frac{1}{2}\left[\left(-2-2\pi+\frac{1}{4}\right)-\left(-2+\frac{1}{4}\right)\right]$$
$$M_x=-\pi\quad \text{kg}-\text{m.}$$

Calculando el momento estático respecto al eje y:

$$M_y=\iint_D x\ \delta(x,y)\ dA$$

Pasando a coordenadas polares:

$$My=\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\sin\theta} r\ \cos\theta\ dr\ d\theta$$
$$My=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\Big|_0^{1-\sin\theta}\cos\theta\ d\theta$$
$$My=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos\theta(1-\sin\theta)^2\ d\theta$$
$$My=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos\theta\left(1-2\sin\theta+\sin^2\theta\right)\ d\theta$$
$$My=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta\cos\theta\right)\ d\theta$$
$$My=\frac{1}{2}\left(\sin\theta-\sin^2\theta+\frac{\sin^3\theta}{3}\right)\Big|_0^{2\pi}$$
$$My=0\quad \text{kg}-m.$$

Por lo tanto las coordenadas del centro de gravedad son:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{0}{2\pi} = 0 \quad \text{m.}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = -\frac{\pi}{2\pi} = -\frac{1}{2} \quad \text{m.}$$

$$c.g. \left(0, -\frac{1}{2}\right)$$

Era de esperarse que $\bar{x} = 0$ porque es una placa homogénea y simétrica respecto al eje y.

Ejercicio 182.

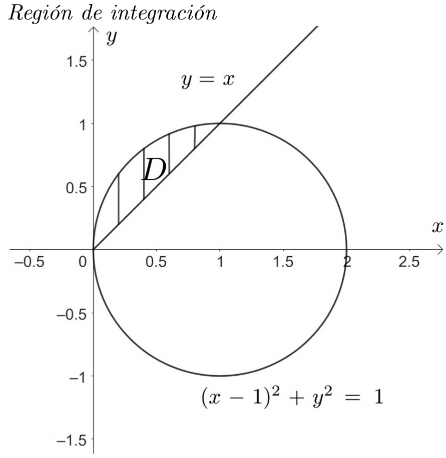
Calcular I_y de una placa plana limitada por las curvas $y \geq x, (x-1)^2 + y^2 \leq 1$, sabiendo que $\delta(x,y) = \frac{|y|}{x^2}$ kg/m^2.

Solución

Representando gráficamente las curvas (Figura 3.16):

Figura 3.16

Región de integración



Pasando a coordenadas polares porque se trata de una circunferencia que limita la región D:

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + y^2 &= 1 \\ x^2 - 2x + y^2 &= 0 \\ r^2 - 2r\cos\theta &= 0 \\ r(r - 2\cos\theta) &= 0 \\ r = 0 \quad \vee \quad r &= 2\cos\theta \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y &= x \\ y' = \operatorname{tg}\theta &= 1 \\ \theta &= \frac{\pi}{4} \\ 2\cos\theta &= 0 \\ \cos\theta &= 0 \\ \theta &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Los límites de integración son:

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq r \leq 2\cos\theta$$

Por lo tanto:

$$I_y = \iint_D x^2 \ \delta(x,y) \ dA$$

$$I_y = \iint_D x^2 \cdot \frac{y}{x^2} \ dA$$

$$I_y = \overset{1}{\iint_D} y \ dA$$

Pasando a coordenadas polares:

$$I_y = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r^2 \sin\theta \; dr \; d\theta$$

$$I_y = \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin\theta \Bigg|_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$I_y = \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \;\sin\theta \; d\theta$$

$$I_y = -\frac{2}{3}\cos^4\theta \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_y = -\frac{2}{3}\left(0 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4\right)$$

$$I_y = \frac{1}{6}\ \mathrm{kg - m^2}.$$

Ejercicio 183.

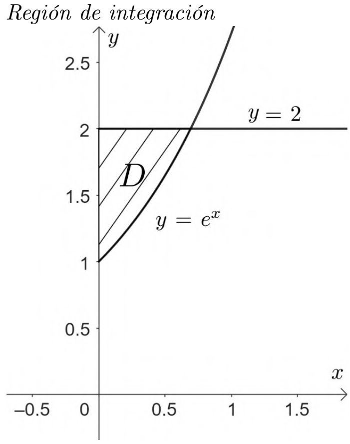
Hallar el I_x de la placa plana que tiene la forma de la región D limitada por $y = e^x, x = 0, y = 2$, sabiendo que $\delta(x, y) = \frac{x}{y^2}$ kg − m^2.

Solución

Graficando las curvas dadas en la Figura 3.17:

Figura 3.17

Región de integración



Utilizando coordenadas cartesianas, los límites son:

$$0 \le x \le \ln 2$$

$$e^x \le y \le 2$$

Por lo tanto:

$$I_x = \iint_D y^2 \;\delta(x, y)\; dA$$

$$I_x = \iint_D y^2 \cdot \frac{x}{y^2}\; dA$$

$$I_x = \int_0^{\ln 2} \int_{e^x}^{2} x \; dy \; dx$$

$$I_x = \int_0^{\ln 2} x \; y \Bigg|_{e^x}^{2} dx$$

$$I_x = \int_0^{\ln 2} x\,(2 - e^x)\, dx$$

$$I_x = \int_0^{\ln 2} (2x - xe^x)\, dx$$

Integrando por partes:
$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$$
$$\begin{array}{ccc} u = x & , & \int dv = \int e^x dx \\ du = dx & , & v = e^x \end{array}$$
$$I_x = \left(x^2 - xe^x + e^x\right)\Big|_0^{\ln 2}$$
$$I_x = \ln^2 2 - 2\ln 2 + 2 - 1$$
$$I_x = \ln^2 2 - 2\ln 2 + 1 \quad \text{kg} - \text{m}^2.$$

Ejercicio 184.

Calcular I_0 de la placa plana limitada por la curva: $y = \sqrt{(x^2+y^2)^3}$, sí la densidad superficial varía en forma inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de un punto de la placa al origen.

Solución

La ecuación dada en coordenadas rectangulares no es simple para ser representada, por lo que se utilizará coordenadas polares.
$$y = \sqrt{(x^2+y^2)^3}$$
$$r\sin\theta = \sqrt{(r^2)^3}$$
$$r\sin\theta = r^3$$
$$r^3 - r\sin\theta = 0$$
$$r\left(r^2 - \sin\theta\right) = 0$$
$$r = 0 \quad \vee \quad r = \sqrt{\sin\theta}$$
$$\sin\theta \geq 0$$
$$0 \leq \theta \leq \pi$$
$$0 \leq r \leq \sqrt{\sin\theta}$$

Tabla 3.4

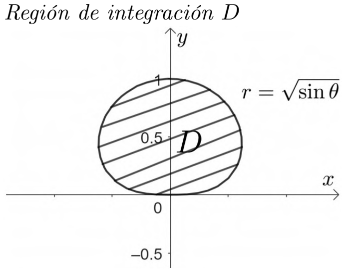
r en función de θ

r	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π
θ	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0

Representando gráficamente en la Figura 3.18, en base a los datos de la Tabla 3.4:

Figura 3.18

Región de integración D

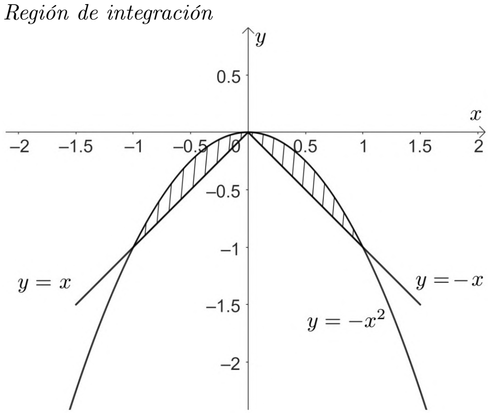


La densidad superficial es: $\delta(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ kg/m^2.
$$I_0 = \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\delta(x,y)\ dA$$
$$I_0 = \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\ dA$$
$$I_0 = \iint\limits_D dA$$

$$I_0 = \int_0^{\pi}\int_0^{\sqrt{\sin\theta}} r\ drd\theta$$
$$I_0 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2\Big|_0^{\sqrt{\sin\theta}}\ d\theta$$
$$I_0 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin\theta\ d\theta$$
$$I_0 = -\ \frac{1}{2}\cos\theta\ \Big|_0^{\pi}$$
$$I_0 = -\frac{1}{2}(\cos\pi - \cos 0)$$
$$I_0 = -\frac{1}{2}(-1-1)$$
$$I_0 = 1 \quad \mathrm{kg-m}^2.$$

Ejercicio 185.
Calcular r_y de la placa plana homogénea, limitada por $y = -x^2,\ y = -|x|$.
Solución
Graficando las curvas que limitan la región D, como se muestra en la Figura 3.19:

Figura 3.19
Región de integración



Puntos de intersección de las curvas:

$$\begin{array}{cc} y = -x^2 & y = -x^2 \\ y = x & y = -x \\ -x^2 = x & -x^2 = -x \\ x^2 + x = 0 & x^2 - x = 0 \\ x(x+1) = 0 & x(x-1) = 0 \\ x = 0\ \vee\ x = -1 & x = 0\ \vee\ x = 1 \end{array}$$

Calculando la masa:

$$M = \iint\limits_D \delta\,(x,y)\ dA$$
$$M = \iint\limits_D K\ dA$$

Como la placa es simétrica respecto al eje y el integrando es el mismo en los lados simétricos, se calcula la integral para la parte derecha de la placa y se multiplica por 2.

$$
\begin{aligned}
M &= 2k\int_0^1\int_{-x}^{-x^2} dy\ dx\\
M &= 2K\int_0^1 y\ \Big|_{-x}^{-x^2}\ dx\\
M &= 2K\int_0^1 \left(-x^2+x\right)dx\\
M &= 2K\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1\\
M &= 2K\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\\
M &= \frac{K}{3}\ \text{ kg.}
\end{aligned}
$$

Calculando el momento de inercia respecto al eje y:

$$
\begin{aligned}
I_y &= \iint\limits_D x^2\ \delta(x,y)\ dA\\
I_y &= K\iint x^2\ dA\\
I_y &= 2K\int_0^1\int_{-x}^{-x^2} x^2\ dy\ dx\\
I_y &= 2k\int_0^1 x^2\ y\ \Big|_{-x}^{-x^2}\ dx\\
I_y &= 2K\int_0^1 x^2\left(-x^2+x\right)dx\\
I_y &= 2K\int_0^1 \left(-x^4+x^3\right)dx\\
I_y &= 2K\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1\\
I_y &= 2K\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\\
I_y &= \frac{K}{10}\ \text{ kg}-\text{m}^2.
\end{aligned}
$$

Por lo que:

$$
\begin{aligned}
r_y &= \sqrt{\frac{I_y}{M}}\\
r_y &= \sqrt{\frac{\frac{K}{10}}{\frac{K}{3}}}\\
r_y &= \sqrt{\frac{3}{10}}\ \text{ m.}
\end{aligned}
$$

3.4. Integrales triples en coordenadas cartesianas

Sea $\begin{aligned} f: S\subset\mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}\\ (x,y,z) &\rightarrow \text{w}=f(x,y,z)\end{aligned}$ continua en la región S.

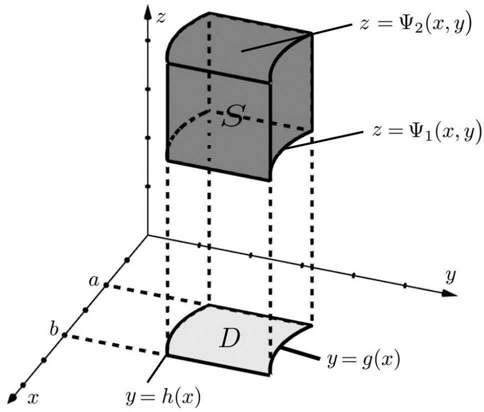
La integral triple en coordenadas cartesianas está dada por:

$$\iiint\limits_S f(x,y,z)\ dV$$

Representando (1 posibilidad) de S, como se muestra en la Figura 3.20:

Figura 3.20

Región de integración S



En esta gráfica, la base del sólido S se ha proyectado sobre el plano xy, obteniéndose la región D, de la cual se obtienen los cuatros límiles de integración, y los dos restantes de las ecuaciones de las superficies que limitan a S en z. Por lo tanto los límites para S en este caso estarán dados por:

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / a \leq x \leq b \wedge h(x) \leq y \leq g(x) \wedge \Psi_1(x,y) \leq z \leq \Psi_2(x,y)\right\}$$

Donde h y g son continuas, $h(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a;b]$.

Ψ_1 y Ψ_2 son continuas, $\Psi_1(x,y) \leq \Psi_2(x,y) \ \forall \ (x,y) \in D$.

Por lo tanto:

$$\iiint\limits_S f(x,y,z) \ dV = \int\int\limits_D \left[\int_{\Psi_1(x,y)}^{\Psi_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz\right] dA \tag{3.18}$$

$$\iiint\limits_S f(x,y,z) \ dV = \int_a^b \left[\int_{h(x)}^{g(x)} \left[\int_{\Psi_1(x,y)}^{\Psi_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz\right] dy\right] dx \tag{3.19}$$

La idea, es que al igual que en el caso anterior, se puede proyectar la base del sólido S sobre el plano xz o sobre el plano yz (Alcázar, 2022).

Ejercicio 186.

Calcular la integral:

$$\iiint\limits_S \sqrt{x}\ y \ dV$$

Donde S está limitado por las superficies:

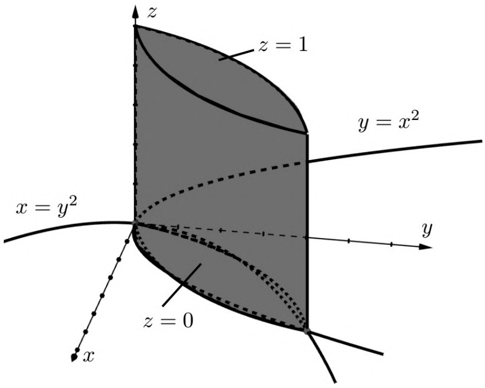
$$S : \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \\ z = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Solución

Representando el sólido S, como se muestra en la Figura 3.21:

Figura 3.21

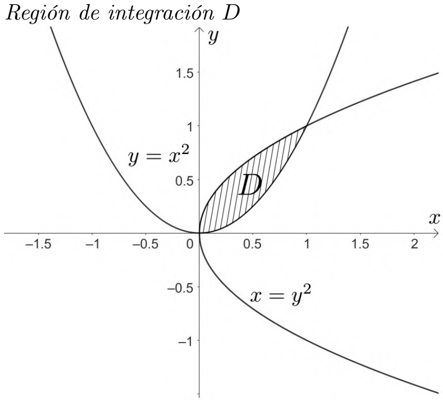
Región de integración S



Tomando la base del sólido en el plano xy, la región D se muestra en la Figura 3.22:

Figura 3.22

Región de integración D



Intersección de las curvas:

$$x = x^4$$
$$x^4 - x = 0$$
$$x\left(x^3 - 1\right) = 0$$
$$x = 0\ ,\ x = 1$$
$$y = 0\ ,\ y = 1$$

Los límiles de integración son:

$$0 \leq x \leq 1$$
$$x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$$
$$0 \leq z \leq 1$$

Por lo tanto la integral triple queda como:

$$\iiint\limits_S \sqrt{x}\ y\ dV = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \int_0^1 \sqrt{x}\ y\ dz\ dy\ dx$$

$$\iiint\limits_S \sqrt{x}\ y\ dV = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \sqrt{x}\ y\ z\ \bigg|_0^1 dy\ dx$$

$$\iiint\limits_S \sqrt{x}\ y\ dV = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \sqrt{x}\ y\ dy\ dx$$

$$\iiint\limits_S \sqrt{x}\ y\ dV = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{x}\ y^2\bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx$$

$$\iiint\limits_S \sqrt{x}\ y\ dV = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{x}\left(x - x^4\right) dx$$

$$\iiint\limits_S \sqrt{x}\ y\ dV = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{9}{2}}\right) dx$$

$$\iiint\limits_S \sqrt{x}\ y\ dV = \frac{1}{2}\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^{\frac{11}{2}}}{\frac{11}{2}}\right)\Bigg|_0^1$$

$$\iiint\limits_S \sqrt{x}\ y\ dV = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{11}\right)$$

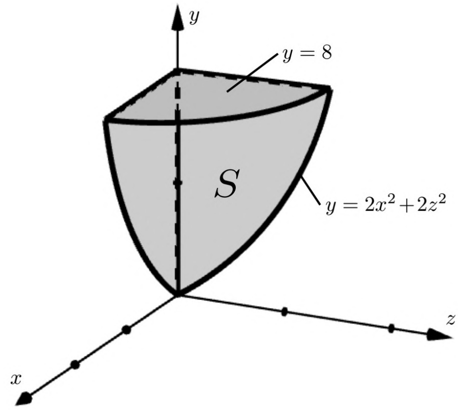
$$\iiint\limits_S \sqrt{x}\ y\ dV = \frac{6}{55}$$

Ejercicio 187.
Calcular la siguiente integral triple, limitada por las superficies: $y = 2x^2 + 2z^2, y = 8$, en el 1^{er} octante.

$$\iiint\limits_S \frac{1}{4 - x^2 - z^2}\ dV$$

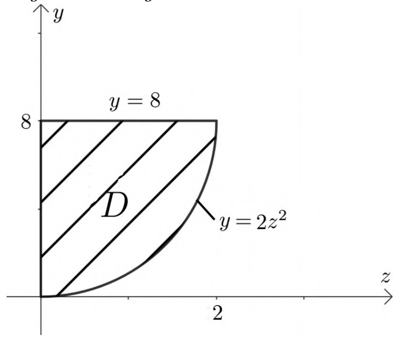
Solución
Se trata de un paraboloide dirigido a lo largo del eje y, por lo que es conveniente tomar a este eje como vertical, y el plano xz como el plano horizontal.
Representando el sólido S, como se muestra en la Figura 3.23:

Figura 3.23
Región de integración S



Si se toma la región D en el plano yz, como se muestra en la Figura 3.24:

Figura 3.24
Región de integración D



Los límites de integración serían:

$$0 \leq z \leq 2$$
$$2z^2 \leq y \leq 8$$
$$0 \leq x \leq \sqrt{\frac{y-2z^2}{2}}$$

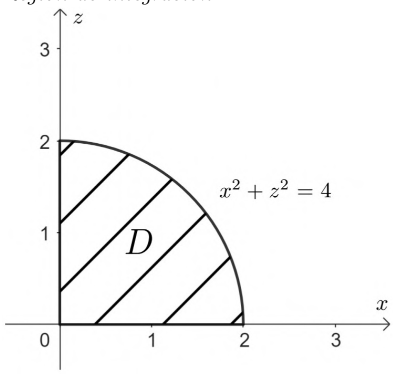
La integral quedaria como:

$$\iiint_S \frac{1}{4-x^2-z^2}\,dV = \int_0^2 \int_{2z^2}^8 \int_0^{\sqrt{\frac{y-2z^2}{2}}} \frac{1}{4-x^2-z^2}\,dx\,dy\,dz$$

Como se puede observar no es una integral fácil de resolver, por lo que es conveniente tomar la región D en los otros planos coordenados; si se toma en el plano xy, la integral triple también no sería fácil de resolver, entonces se toma la región D en el plano xz.
La intersección del paraboloide $y = 2x^2 + 2z^2$ y el plano $y = 8$ es la circunferencia $x^2 + z^2 = 4$, que proyectada en el plano xz en el 1^{er} octante está dada por la gráfica de la Figura 3.25.

Figura 3.25

Región de integración D



Los límites de integración son:

$$0 \leq x \leq 2$$
$$0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2}$$
$$2x^2 + 2z^2 \leq y \leq 8$$

Entonces la integral triple queda como:

$$\iiint_S \frac{1}{4-x^2-z^2}\,dV = 4\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_{2x^2+2z^2}^8 \frac{1}{4-x^2-z^2}\,dydzdx$$

$$\iiint_S \frac{1}{4-x^2-z^2}\,dV = 4\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{4-x^2-z^2}\,y\,\Big|_{2x^2+2z^2}^{8}\,dzdx$$

$$\iiint_S \frac{1}{4-x^2-z^2}\,dV = 4\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{4-x^2-z^2}\left(8-2x^2-2z^2\right)dzdx$$

$$\iiint_S \frac{1}{4-x^2-z^2}\,dV = 4\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{2\left(4-x^2-z^2\right)}{4-x^2-z^2}\,dzdx$$

$$\iiint_S \frac{1}{4-x^2-z^2}\,dV = 8\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dz\,dx$$

$$\iiint_S \frac{1}{4-x^2-z^2}\,dV = 8\int_0^2 z\,\Big|_0^{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

$$\iiint\limits_S \frac{1}{4-x^2-z^2}\ dV = 8\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$$
$$\iiint\limits_S \frac{1}{4-x^2-z^2}\ dV = 8\left(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+2\sin^{-1}\frac{x}{2}\right)\Big|_0^2$$
$$\iiint\limits_S \frac{1}{4-x^2-z^2}\ dV = 8\left[\left(0+2\sin^{-1}1\right)-(0+0)\right]$$
$$\iiint\limits_S \frac{1}{4-x^2-z^2}\ dV = 8\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\iiint\limits_S \frac{1}{4-x^2-z^2}\ dV = 8\pi$$

Ejercicio 188.
Calcular la siguiente integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_1^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{xy}\sin\left(\frac{z}{y}\right)dzdydx$$

Solución
El integrando no presenta mayor disficultad para resolver la integral tal cual están dispuestos los límites de integración. Los dos límites externos indican en que plano coordenado está la región D, que en este caso es el plano xy.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_1^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{xy}\sin\left(\frac{z}{y}\right)dzdydx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} y\cos\left(\frac{z}{y}\right)\Big|_0^{xy} dydx$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_1^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{xy}\sin\left(\frac{z}{y}\right)dzdydx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} y\cdot\cos\left(\frac{xy}{y}\right)dydx$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_1^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{xy}\sin\left(\frac{z}{y}\right)dzdydx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos xydydx$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{xy}\sin\left(\frac{z}{y}\right)dzdydx = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\ y^2\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} dx$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_1^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{xy}\sin\left(\frac{z}{y}\right)dzdydx = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 dx$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_1^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{xy}\sin\left(\frac{z}{y}\right)dzdydx = -\frac{\pi^2}{32}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{xy}\sin\left(\frac{z}{y}\right)dzdydx = -\frac{\pi^2}{32}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{xy}\sin\left(\frac{z}{y}\right)dzdydx = -\frac{\pi^2}{32}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{xy}\sin\left(\frac{z}{y}\right)dzdydx = -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{64}$$

Ejercicio 189.
Calcular la siguiente integral:

$$\int_1^2\int_z^{2z}\int_{\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{2yz}}\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\ dxdydz$$

Solución
Integrando con respecto a x :

$$\int\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\ dx$$

Sea $\begin{aligned} u &= x^2+y^2+z^2 \\ du &= 2x\ dx \end{aligned}$

$$\int \frac{x}{x^2+y^2+z^2}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\ du$$
$$\int \frac{x}{x^2+y^2+z^2}\ dx = \frac{1}{2}\ln u$$
$$\int \frac{x}{x^2+y^2+z^2}\ dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

Luego:

$$\int_1^2\int_z^{2z}\int_{\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{2yz}} \frac{x}{x^2+y^2+z^2}\ dV = \frac{1}{2}\int_1^2\int_z^{2z} \ln\left(x^2+y^2+z^2\right)\Big|_{\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{2yz}} dy\ dz$$
$$\int_1^2\int_z^{2z}\int_{\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{2yz}} \frac{x}{x^2+y^2+z^2}\ dV = \frac{1}{2}\int_1^2\int_z^{2z} \left[\ln\left(2yz+y^2+z^2\right)-\ln\left(1-x^2-z^2+y^2+z^2\right)\right] dy\ dz$$
$$\int_1^2\int_z^{2z}\int_{\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{2yz}} \frac{x}{x^2+y^2+z^2}\ dV = \frac{1}{2}\int_1^2\int_z^{2z} \ln(y+z)^2 dy\ dz$$
$$\int_1^2\int_z^{2z}\int_{\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{2yz}} \frac{x}{x^2+y^2+z^2}\ dV = \int_1^2\int_z^{2z} \ln(y+z)\ dy\ dz$$

Integrando:

$$\int \ln(y+z)\ dy$$
$$u = \ln(y+z) \qquad \int dv = \int dy$$
$$du = \frac{1}{y+z}\ dy \qquad v = y$$
$$\int \ln(y+z)dy = y\ln(y+z) - \int \frac{y}{y+z}\ dy$$
$$\int \ln(y+z)dy = y\ln(y+z) - \int \frac{y+z-z}{y+z}\ dy$$
$$\int \ln(y+z)dy = y\ln(y+z) - \int \left(1-\frac{z}{y+z}\right) dy$$
$$\int \ln(y+z)dy = y\ln(y+z) - y + z\ln(y+z)$$

Luego:

$$\int_1^2\int_z^{2z}\int_{\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{2yz}} \frac{x}{x^2+y^2+z^2}\ dV = \int_1^2 [y\ln(y+z) - y + z\ln(y+z)]\Big|_z^{2z} dz$$
$$\int_1^2\int_z^{2z}\int_{\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{2yz}} \frac{x}{x^2+y^2+z^2}\ dV = \int_1^2 [(2z\ln 3z - 2z + z\ln 3z) - (z\ln 2z - z + z\ln 2z)]\ dz$$
$$\int_1^2\int_z^{2z}\int_{\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{2yz}} \frac{x}{x^2+y^2+z^2}\ dV = \int_1^2 (3z\ln 3z - z - 2z\ln 2z)\ dz$$

Integrando:

$$\int 3z\ln 3z dz$$
$$u = \ln 3z \qquad \int dv = \int 3z\ dz$$
$$du = \frac{1}{z}\ dz \qquad v = \frac{3}{2}\ z^2$$
$$\int 3z\ln 3z\ dz = \frac{3}{2}\ z^2\ln 3z - \frac{3}{2}\int z\ dz$$
$$\int 3z\ln 3z\ dz = \frac{3}{2}\ z^2\ln 3z - \frac{3}{4}\ z^2$$

Integrando:

$$\int 2z \ln 2z \; dz$$

$$u = \ln 2z \qquad \int dv = \int 2z \; dz$$

$$du = \frac{1}{z} \qquad v = z^2$$

$$\int 2z \ln 2z \; dz = z^2 \ln 2z - \int z \; dz$$

$$\int 2z \ln 2z \; dz = z^2 \ln 2z - \frac{z^2}{2}$$

Por lo tanto:

$$\int_1^2 \int_z^{2z} \int_{\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{2yz}} \frac{x}{x^2+y^2+z^2} \; dV = \left(\frac{3}{2} z^2 \ln 3z - \frac{3}{4} z^2 - \frac{z^2}{2} - z^2 \ln 2z + \frac{z^2}{2} \right) \Bigg|_1^2$$

$$\int_1^2 \int_z^{2z} \int_{\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{2yz}} \frac{x}{x^2+y^2+z^2} \; dV = (6 \ln 6 - 3 - 4 \ln 4) - \left(\frac{3}{2} \ln 3 - \frac{3}{4} - \ln 2 \right)$$

$$\int_1^2 \int_z^{2z} \int_{\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{2yz}} \frac{x}{x^2+y^2+z^2} \; dV = 6 \ln 6 - 4 \ln 4 - \frac{3}{2} \ln 3 + \ln 2 - \frac{9}{4}$$

$$\int_1^2 \int_z^{2z} \int_{\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{2yz}} \frac{x}{x^2+y^2+z^2} \; dV = \frac{9}{2} \ln 3 - \ln 2 - \frac{9}{4}$$

Ejercicio 190.
Dada la integral:

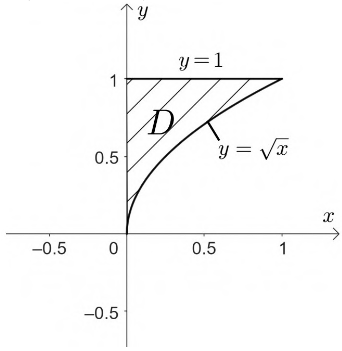
$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z) \; dz \; dy \; dx$$

Escribir las otras integrales para la forma:
a) $dz \; dx \; dy$
b) $dx \; dy \; dz$
c) $dx \; dz \; dy$

Solución
a) En este numeral, los límites constantes son para y, la región D está en el plano xy como se muestra en la Figura 3.26, por lo tanto se debe representar esta región para identificar los nuevos límites para $x \in y$.

$$D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x} \leq y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y = \sqrt{x} \\ x = y^2 \end{array}$$

Figura 3.26
Región de integración D



Ahora los nuevos límites con y constante son:

$$D: \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq y^2 \end{array} \right.$$

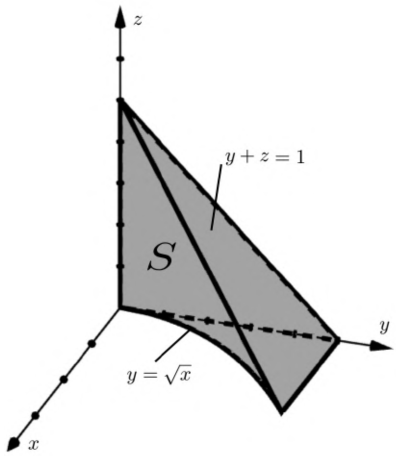
Por lo tanto:

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z) \ dzdydx = \int_0^1 \int_0^{y^2} \int_0^{1-y} f(x, y, z) \ dzdxdy$$

b) Para escribir los límites en el orden pedido en este numeral es necesario representar el sólido S, pero en el numeral a) ya se representó la región D, sólo faltaria representar las superficies que cobijan el sólido a lo largo del eje z.
Como $0 \leq z \leq 1 - y$, entonces las superficies que cobijan al sólido son los planos $z = 0 \quad \wedge \quad z = 1 - y$.
Representando el sólido en la Figura 3.27:

Figura 3.27

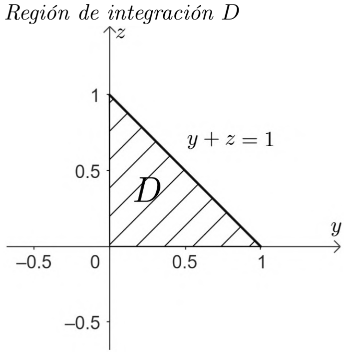
Región de integración S



Como los límites externos están en el plano yz, es necesario representar la región D en este plano, asi se tiene en la Figura 3.28:

Figura 3.28

Región de integración D



Por lo que los límites son:

$$S: \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq z \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - z \\ 0 \leq x \leq y^2 \end{array} \right.$$

Entonces:

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z) \ dzdydx = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{y^2} f(x, y, z) \ dxdydz$$

c) En base a las gráficas de S y D del literal b), los límites son:

$$S: \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1-y \\ 0 \leq x \leq y^2 \end{cases}$$

Entonces:

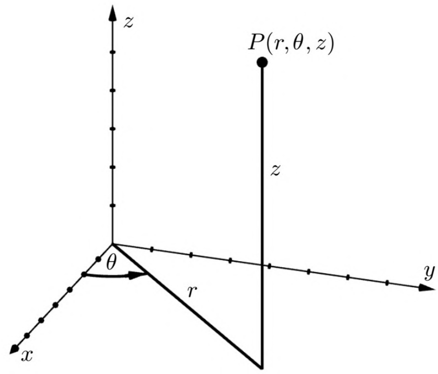
$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f\left(x,y,z\right)\ dzdydx = \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{y^2} f\left(x,y,z\right)\ dxdzdy$$

3.5. Integrales triples en coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas no son más que una extensión de los coordenadas polares al espacio tridimensional, donde el punto $P\left(x,y,z\right)$ en coordendas cartesianas, presentado en coordenadas cilíndricas es el punto $P(r,\theta,z)$, como lo muestra la Figura 3.29.

Figura 3.29

Coordenadas cilindricas



La relación entre coordenadas cartesianas y cilíndricas está dada por:

$$\begin{array}{ll} x = r\cos\theta & r^2 = x^2+y^2 \\ y = r\sin\theta & \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} \\ z = r & \end{array}$$

Lo anterior siempre y cuando el plano polar sea el plano xy; si el plano polar es otro de los planos coordenados, las ecuaciones son similares, solo cambiará el nombre de los ejes
La integral triple en coordenadas cartesianas esta dada por:

$$\iiint_S \int \left(x,y,z\right)\ dV = \iiint_S f\left(x,y,z\right)\ dzdydx$$

Para pasar a coordenadas cilíndricas, hay que realizar las transformaciones correspondientes al nuevo sistema de coordenadas, teniendo en consideración en que plano coordenado va a estar el plano polar puesto que aqui estará la región D, de la cual se extraerán los cuatro límites externos de la integral triple (Palacios, 2017)
Por lo tanto la integral triple escrita en coordenadas cilíndricas queda como:

$$\iiint_S f(r,\theta,z)\ dv = \iiint_S f(r,\theta,z)r\ dzdrd\theta \tag{3.20}$$

Se recomienda usar coordenadas cilíndricas para resolver la integral triple cuando el sólido S tenga un eje de simetría, y el integrando tenga la forma x^2+y^2.

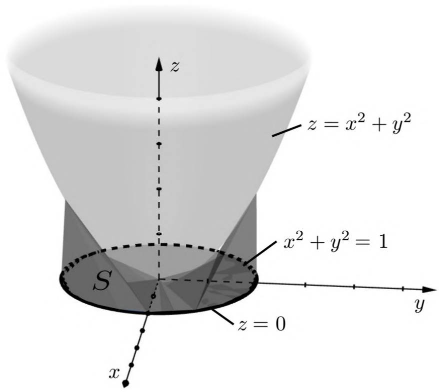
Ejercicio 191.
Calcular la siguiente integral:

$$\iiint\limits_{S} \frac{x^2}{x^2+y^2}\, dV$$

$$S: \begin{cases} z = x^2+y^2 \\ x^2+y^2 \leq 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

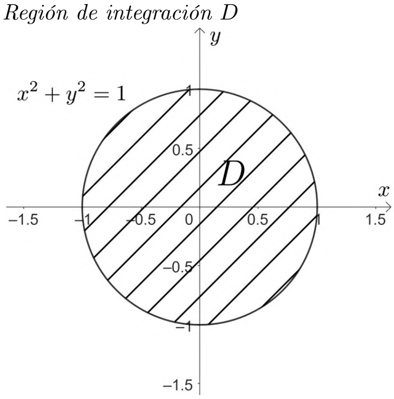
Solución
Representando el sólido S, como se muestra en la Figura 3.30:

Figura 3.30
Región de integración D



El sólido tiene al eje z como eje de simetría y en el integrando tiene la forma x^2+y^2, por lo tanto para resolver esta integral triple es recomendable usar coordenadas cilíndricas. El plano polar elegido es el plano xy, donde la región D está limitada por la cincunferencia $x^2+y^2=1$ que es la traza del cilindro circular recto $x^2+y^2=1$, como se muestra en la Figura 3.31:

Figura 3.31
Región de integración D



En la región D los límites son:

$$x^2+y^2=1$$

Pasando a coordenadas polares:

$$\begin{array}{ll} r^2 = 1 & \text{tomando el } P(1,0): \\ r = 1 & \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0 \\ 0 \leq r \leq 1 & \operatorname{tg}\theta = 0 \\ & \quad \theta = K\pi \\ & \left.\begin{array}{l} K=0, \quad \theta = 0 \\ K=2, \quad \theta = 2\pi \end{array}\right. \Rightarrow 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array}$$

La altura z:
Pasando a coordenadas polares:

$$z = x^2 + y^2$$
$$z = r^2$$
$$0 \leq z \leq r^2$$

Entonces los límites para S en coordenadas cilíndricas son:

$$S : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq z \leq r^2 \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\iiint\limits_S \frac{x^2}{x^2 + y^2}\ dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{r^2} \frac{r^2 \cos^2\theta}{r^2}\ r\ dz\ dr\ d\theta$$
$$\iiint\limits_S \frac{x^2}{x^2 + y^2}\ dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \cos^2\theta\ z\ r \Big|_0^{r^2}\ dr\ d\theta$$
$$\iiint\limits_S \frac{x^2}{x^2 + y^2}\ dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \cos^2\theta \cdot r^3 dr\ d\theta$$
$$\iiint\limits_S \frac{x^2}{x^2 + y^2}\ dV = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\ r^4 \Big|_0^1\ d\theta$$
$$\iiint\limits_S \frac{x^2}{x^2 + y^2}\ dV = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\ d\theta$$
$$\iiint\limits_S \frac{x^2}{x^2 + y^2}\ dV = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{(1 + \cos 2\theta)}{2}\ d\theta$$
$$\iiint\limits_S \frac{x^2}{x^2 + y^2}\ dV = \frac{1}{8} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Bigg|_0^{2\pi}$$
$$\iiint\limits_S \frac{x^2}{x^2 + y^2}\ dV = \frac{1}{8}(2\pi)$$
$$\iiint\limits_S \frac{x^2}{x^2 + y^2}\ dV = \frac{\pi}{4}$$

Ejercicio 192.
Calcular la siguiente integral:

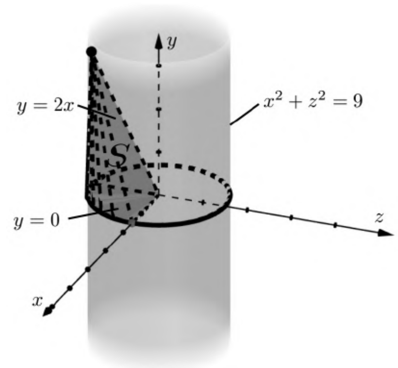
$$\iiint\limits_S \frac{1}{x}\ dV$$

$$S : \begin{cases} x^2 + z^2 = 9 \\ y = 2x \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Solución
Representando el sólido S en la Figura 3.32:

Figura 3.32

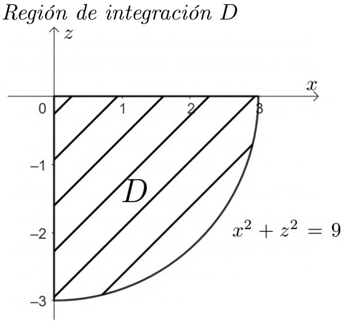
Región de integración S



La región D se la toma en el plano xz y como está limitada por la circunferencia $x^2 + z^2 = 9$, se utilizará coordenadas cilíndricas para resolver la integral triple. La región D se observa en la Figura 3.33:

Figura 3.33

Región de integración D



Ahora:

$$x = r\cos\theta$$
$$z = r\sin\theta$$
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{z}{x}$$

Pasando a coordenadas polares:

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 &= 9 \\ r^2 &= 9 \\ r &= 3 \\ \theta \le r &\le 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &P(0,-3) \\ &\operatorname{tg}\theta = \tfrac{z}{x} = -\tfrac{3}{0} = \infty \\ &\theta = -\tfrac{\pi}{2} \\ &-\tfrac{\pi}{2} \le \theta \le 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &P(3,0) \\ &\operatorname{tg}\theta = \tfrac{0}{3} = 0 \\ &\theta = 0 \end{aligned}$$

El límite para y:

$$\theta \le y \le 2x$$
$$\theta \le y \le 2r\cos\theta$$

Entonces los límites para la integral triple son:

$$S : \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le 0 \\ 0 \le r \le 3 \\ 0 \le y \le 2r\cos\theta \end{cases}$$

Pasando la integral triple a coordenadas cilíndricas:

$$\iiint\limits_S \frac{1}{x}\ dV = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{0}^{3}\int_{0}^{2r\cos\theta} \frac{1}{r\cos\theta} r\ dy\ dr\ d\theta$$

$$\iiint\limits_S \frac{1}{x}\ dV = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{0}^{3} \frac{1}{\cos\theta}\ y\Bigg|_{0}^{2r\cos\theta} dr\ d\theta$$

$$\iiint\limits_S \frac{1}{x}\ dV = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\int_{0}^{3} \frac{2r\cos\theta}{\cos\theta}\ dr\ d\theta$$

$$\iiint\limits_S \frac{1}{x}\ dV = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} r^2\Bigg|_{0}^{3} d\theta$$

$$\iiint\limits_S \frac{1}{x}\ dV = 9\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\theta$$

$$\iiint\limits_S \frac{1}{x}\ dV = 9\ \theta\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}$$

$$\iiint\limits_S \frac{1}{x}\ dV = \frac{9}{2}\pi$$

Ejercicio 193.
Calcular la siguiente integral triple:

$$\int_0^2\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}}\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{x^2+y^2}\ dzdxdy$$

Solución
Los límites de integración son:

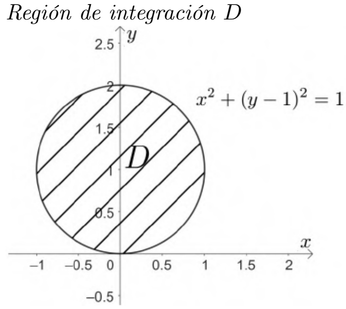
$$S: \begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ -\sqrt{2y-y^2} \le x \le \sqrt{2y-y^2} \\ 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

La región D está en el plano xy por lo que en la inecuación para x se puede determinar la ecuación de la curva que limita D.

$$(x)^2 = \left(\sqrt{2y-y^2}\right)^2$$
$$x^2 + y^2 - 2y = 0$$
$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

Representando gráficamente en la Figura 3.34:

Figura 3.34
Región de integración D



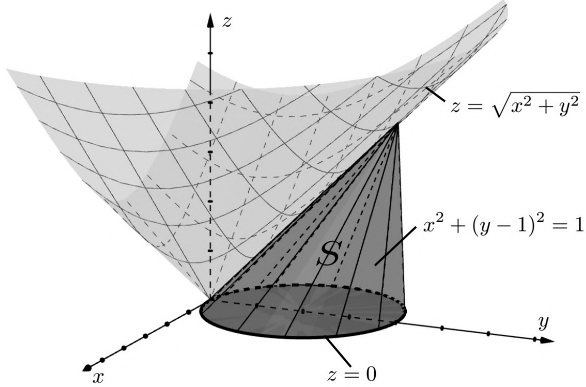
Pasando a coordenadas polares:

$$\begin{array}{ccc} x^2+y^2-2y=0 & \text{En } (0,0) \quad r=0 \Rightarrow & r=2\sin\theta \\ r^2-2\sin\theta=0 & & 0=2\sin\theta \\ r(r-2\sin\theta)=0 & & \sin\theta=0 \\ r=0 \quad \vee \quad r=2\sin\theta & & \theta=k\pi \\ 0\le r\le 2\sin\theta & & k=-1, \quad \theta=\pi \\ & & 0\le\theta\le\pi \end{array}$$

Representando las superficies $z=0 \quad \wedge \quad z=\sqrt{x^2+y^2}$ en la Figura 3.35:

Figura 3.35

Región de integración S



Los límites para z son: $\qquad 0\le z\le r$

Entonces los límites de la integral triple en coordenadas cilíndricas son:

$$S:\begin{cases} 0\le\theta\le\pi \\ 0\le r\le 2\sin\theta \\ 0\le z\le r \end{cases}$$

$$\int_0^2\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}}\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{x^2+y^2}\,dzdxdy=\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}\int_0^{r}\frac{1}{r^2}\cdot r\;dz\;dr\;d\theta$$

$$\int_0^2\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}}\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{x^2+y^2}\,dzdxdy=\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}\frac{1}{r}\cdot z\,\Big|_0^r\,dr\;d\theta$$

$$\int_0^2\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}}\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{x^2+y^2}\,dzdxdy=\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}\frac{1}{r}\;r\;dr\;d\theta$$

$$\int_0^2\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}}\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{x^2+y^2}\,dzdxdy=\int_0^{\pi}r\,\Big|_0^{2\sin\theta}\,d\theta$$

$$\int_0^2\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}}\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{x^2+y^2}\,dzdxdy=2\int_0^{\pi}\sin\theta\;d\theta$$

$$\int_0^2\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}}\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{x^2+y^2}\,dzdxdy=-2\cos\theta\,\Big|_0^{\pi}$$

$$\int_0^2\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}}\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{x^2+y^2}\,dzdxdy=-2(\cos\pi-\cos\theta)$$

$$\int_0^2\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}}\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{x^2+y^2}\,dzdxdy=-2(-1-1)$$

$$\int_0^2\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}}\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{x^2+y^2}\,dzdxdy=4$$

Ejercicio 194.
Calcular la siguiente integral:

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dzdydx$$

Solución
Los límites de integración son:

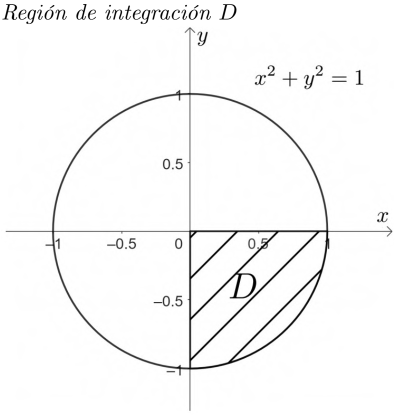
$$\text{s: } \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le 0 \\ 0 \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2} \end{cases}$$

La región D en el plano xy limitada por la curva:

$$(y)^2 = \left(-\sqrt{1-x^2}\right)^2$$
$$x^2+y^2 = 1$$

Tal como lo muestra la Figura 3.36:

Figura 3.36
Región de integración D



Pasando a coordenadas polares:

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 1 \\ r^2 &= 1 \\ r &= 1 \\ 0 \le r &\le 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &P(-1,0) \\ &\operatorname{tg}\theta = \tfrac{y}{x} = -\tfrac{1}{0} = \infty \\ &\theta = -\tfrac{\pi}{2} \\ &-\tfrac{\pi}{2} \le \theta \le 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &P(1,0) \\ &\operatorname{tg}\theta = \tfrac{0}{1} = 0 \\ &\theta = 0 \end{aligned}$$

Las superficies que limitan al sólido son:

$$z = 0 \qquad (z)^2 = \left(\sqrt{4-x^2-y^2}\right)^2$$
$$x^2+y^2+z^2 = 4$$

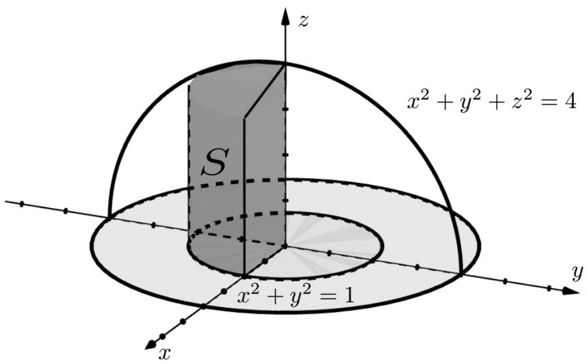
Transformando a coordenadas cilíndricas:

$$z = 0 \qquad z = \sqrt{4-r^2}$$

Representando el sólido en la Figura 3.37:

Figura 3.37

Región de integración S



Entonces los límites en coordenadas cilíndricas son:

$$S : \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0 \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2} \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dzdydx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-r^2}} \frac{z}{r} \cdot\, r\; dz\; dr\; d\theta$$

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dzdydx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \int_0^1 \frac{z^2}{2} \Bigg|_0^{\sqrt{4-r^2}} dr\; d\theta$$

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dzdydx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \int_0^1 \left(4 - r^2\right) dr\; d\theta$$

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dzdydx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left(4r - \frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 d\theta$$

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dzdydx = \frac{11}{6} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta$$

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dzdydx = \frac{11}{6}\, \theta \,\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^0$$

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dzdydx = -\frac{11}{12}\pi$$

Ejercicio 195.
Pasar la siguiente integral a coordenadas cartesianas:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{2\sin\theta} \int_0^{4-r^2} \frac{r}{4 - r^2}\, dzdrd\theta$$

Solución
Los límites en coordenadas cilíndricas son:

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 2\sin\theta \\ 0 \leq z \leq 4 - r^2 \end{cases}$$

El plano polar está en el plano xy, se trata entonces de hallar una ecuación cartesiana en xy, para lo cual partimos de la ecuación:

$$r = 2\sin\theta$$

Pasando a coordenadas cartesianas:

$$r = 2\frac{y}{r}$$

$$r^2 = 2y$$

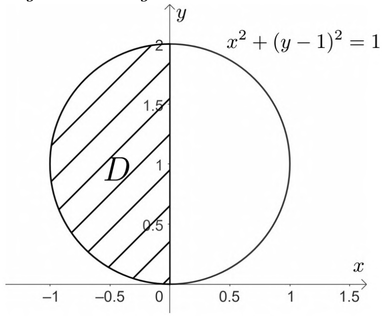
$$x^2 + y^2 - 2y = 0$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

Representando en la Figura 3.38:

Figura 3.38

Región de integración D



Los límites en coordenadas cartesianas para la región D serían:

$$-1 \leq x \leq 0$$

$$1 - \sqrt{1-x^2} \leq y \leq 1 + \sqrt{1-x^2}$$

Para la altura z el límite sería:

$$z = 0 \quad \wedge \quad z = 4 - x^2 - y^2$$

El integrando pasando a coordenadas cartesianas:

$$f(r,\theta) = \frac{1}{4 - x^2 - y^2}$$

Por lo tanto:

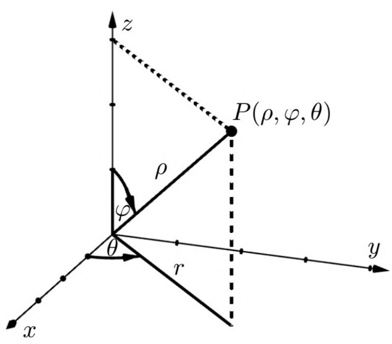
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{0}^{2\sin\theta}\int_{0}^{4-r^2} \frac{r}{4-r^2}\,dzdrd\theta = \int_{-1}^{0}\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{4-x^2-y^2} \frac{1}{4-x^2-y^2}\,dzdydx$$

3.6. Integrales triples en coordenadas esféricas

Otro sistema de coordenadas que es útil para resolver integrales triples son las coordenadas esféricas, donde el punto $P\,(x,y,z)$ representado en esféricas $P(\rho,\varphi,\theta)$ está representado en la Figura 3.39:

Figura 3.39

Coordenadas esféricas



Donde:
ρ : distancia del origen al punto ($\rho \geqslant 0$)
φ : ángulo medido entre la dirección positiva del eje z y ρ $\quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$
θ : ángulo medido en el plano xy ($0 \leqslant \theta \leq 2\pi$)
La transformación de coordenadas esféricas a cartesianas y viceversa esta dada por las ecuaciones siguientes:

$$\begin{array}{ll} x = \rho \sin\varphi \cos\theta & \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta & \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} \\ z = \rho \cos\varphi & \cos\varphi = \frac{z}{\rho} \end{array}$$

Es útil este sistema de coordenadas cuando el sòlido S sobre el cual se va a calcular la integral triple está limitado por esferas o conos, donde hay simetría respecto a un punto, y el origen se coloca en este punto (Stewart, 2012)
La integral triple en coordenadas cartesianas está dada por:

$$\iiint\limits_S f(x, y, z)\ dV = \iiint\limits_S f(x, y, z)\ dzdydx$$

En coordenadas esféricas $dV = \rho^2 \sin\varphi\ d\rho d\varphi d\theta$.
Por lo tanto, usando las transformaciones correspondientes, la integral triple queda como:

$$\iiint\limits_S f(\rho, \varphi, \theta)\ dV = \iiint\limits_S f(\rho, \varphi, \theta)\ \rho^2 \sin\varphi\ d\rho d\varphi d\theta \tag{3.21}$$

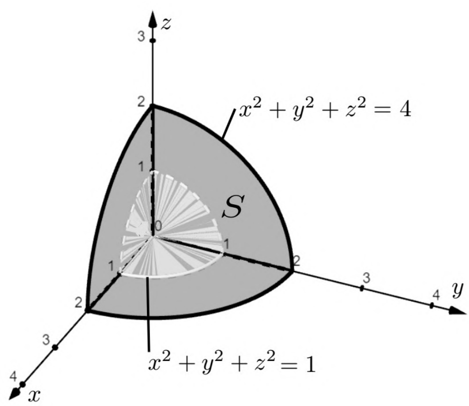
Ejercicio 196.
Calcular la siguiente integral:

$$\iiint\limits_S \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}\ dV$$

$$S : \left\{ \begin{array}{c} 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \\ 1^{er} \text{ octante} \end{array} \right.$$

Solución
Representando las esferas con centro en el origen y radios 1 y 2 en la Figura 3.40:

Figura 3.40
Región de integración S



Transformando a coordenadas esféricas las dos esferas:

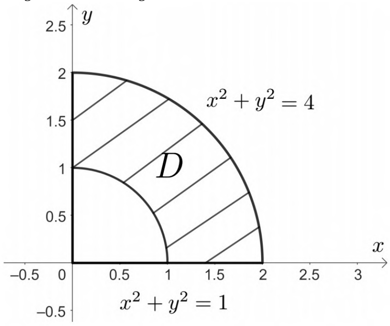
$$\begin{array}{rcr} x^2 + y^2 + z^2 = 1 & ; & x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ \rho^2 = 1 & & \rho^2 = 4 \\ \rho = 1 & & \rho = 2 \end{array}$$

$$1 \leq \rho \leq 2$$

Representando las trazas de las superficies en el plano xy (Figura 3.41):

Figura 3.41

Región de integración D



Para los puntos:

$$P(2,0) \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{0}{2} = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

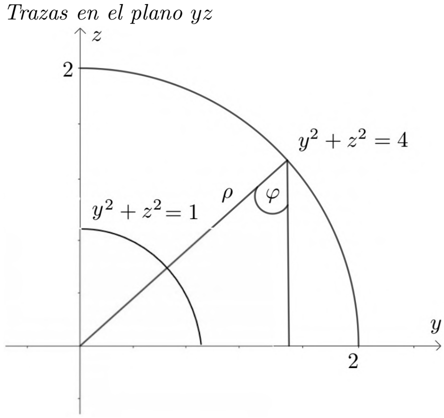
$$P(0,2) \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{2}{0} = \infty \qquad \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

Representando las trazas de las superficies en el plano yz (Figura 3.42):

Figura 3.42

Trazas en el plano yz



Para los puntos:

$$P(0,2) \Rightarrow \cos\varphi = \frac{z}{\rho} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \varphi = 0$$

$$P(2,0) \Rightarrow \cos\varphi = \frac{0}{2} = 0 \qquad \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

Entonces los límites en coordenadas esféricas son:

$$S : \begin{cases} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ \theta \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ 1 \le \rho \le 2 \end{cases}$$

El integrando en coordenadas esféricas:

$$f(x,y,z) = \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$f(\rho,\theta,\varphi) = \frac{\rho^2 \cos^2\varphi}{\rho^2} = \cos^2\varphi$$

Por lo tanto:

$$\iiint\limits_S \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\,dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 \cos^2\varphi\ \rho^2\sin\varphi\ d\rho d\varphi d\theta$$

$$\iiint\limits_S \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\,dV = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3\Big|_1^2 \cos^2\varphi\sin\varphi\ d\varphi d\theta$$

$$\iiint\limits_S \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\,dV = \frac{7}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\sin\varphi\ d\varphi d\theta$$

$$\iiint\limits_S \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\,dV = -\ \frac{7}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\ \cos^3\varphi\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

$$\iiint\limits_S \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\,dV = -\frac{7}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (0-1)\ d\theta$$

$$\iiint\limits_S \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\,dV = \frac{7}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

$$\iiint\limits_S \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\,dV = \frac{7}{9}\ \theta\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\iiint\limits_S \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\,dV = \frac{7}{18}\pi$$

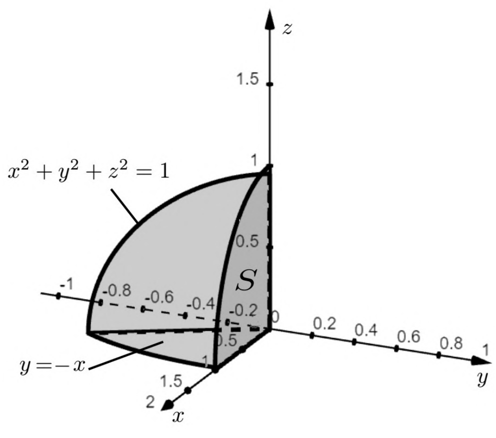
Ejercicio 197.
Calcular la siguiente integral:

$$\iiint\limits_S \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dV$$

$$S:\begin{cases} x^2+y^2+z^2\le 1\\ \hfill y\ge -x\\ \hfill \text{plano } xz\end{cases}$$

Solución
Representando las superficies en la Figura 3.43:

Figura 3.43
Región de integración S



Transformando a coordenadas esféricas la ecuación de la esfera:

$$x^2+y^2+z^2=1$$
$$\rho^2=1$$
$$\rho=1$$

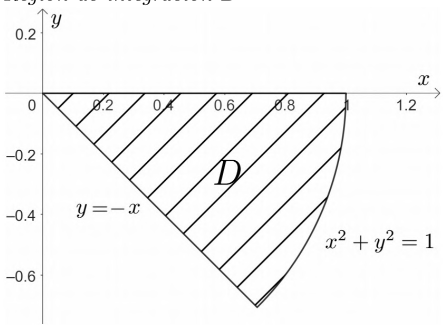
Luego:

$$0 \leq \rho \leq 1$$

Representando las trazas de las superficies en el plano xy (Figura 3.44):

Figura 3.44

Región de integración D



Hallando la intersección entre $\quad x^2 + y^2 = 1 \;\wedge\; y = -x$:

$$2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -1 \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = -1 \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$$

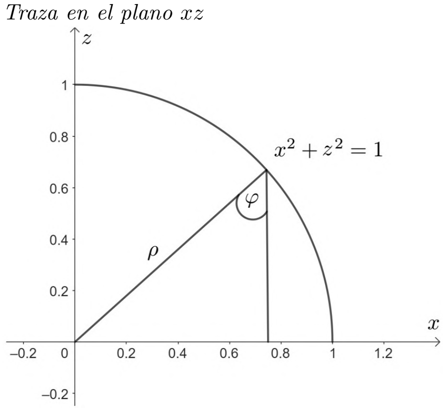
$$\text{Para} \quad P(1,0),\ \operatorname{tg}\theta = \frac{0}{1} = 0 \ \Rightarrow\ \theta = 0$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq 0$$

Representando la traza de la esfera en el plano xz (Figura 3.45):

Figura 3.45

Traza en el plano xz



Para el punto:

$$P(0,1): \ \cos\varphi = \frac{z}{\rho} = \frac{1}{1} = 1 \ \Rightarrow\ \varphi = 0$$

$$P(1,0): \ \cos\varphi = \frac{1}{0} = \infty \qquad \Rightarrow\ \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Entonces los límites en coordenadas esféricas son:

$$S:\begin{cases} -\dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq 0 \\ 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq \rho \leq 1 \end{cases}$$

El integrando transfomando a coordenadas esféricas:

$$f(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$f(\rho,\varphi,\theta) = \frac{\rho\cos\varphi}{\rho\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

Por lo tanto:

$$\iiint\limits_S \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dV = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{1} \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\ \rho^2\sin\varphi\ d\rho d\varphi d\theta$$

$$\iiint\limits_S \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dV = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \rho^3\Big|_0^1 \cos\varphi\ d\varphi d\theta$$

$$\iiint\limits_S \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dV = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\ d\varphi d\theta$$

$$\iiint\limits_S \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dV = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \sin\varphi\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

$$\iiint\limits_S \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dV = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) d\theta$$

$$\iiint\limits_S \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dV = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} d\theta$$

$$\iiint\limits_S \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dV = \frac{1}{3}\ \theta\ \Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{0}$$

$$\iiint\limits_S \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dV = \frac{1}{3}\left(0+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\iiint\limits_S \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dV = \frac{\pi}{12}$$

Ejercicio 198.
Calcular la siguiente integral:

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} dzdydx$$

Solución
Los límites en coordenadas cartesianas son:

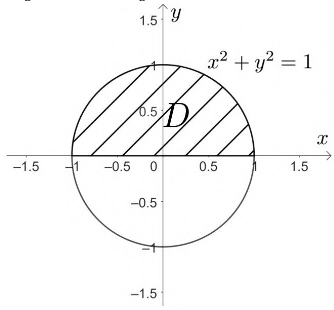
$$S:\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ 1-\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq 1+\sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases}$$

La región D está en el plano xy (Figura 3.46), la curva que la limita se la toma de uno de los límites, así:

$$(y)^2 = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2$$
$$x^2+y^2=1$$

Figura 3.46

Región de integración D



Para hallar el límite para θ :

$$P(1,0);\ \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0 \quad \Rightarrow\ \theta = 0$$
$$P(-1,0);\ \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0\ \Rightarrow\ \theta = \pi$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

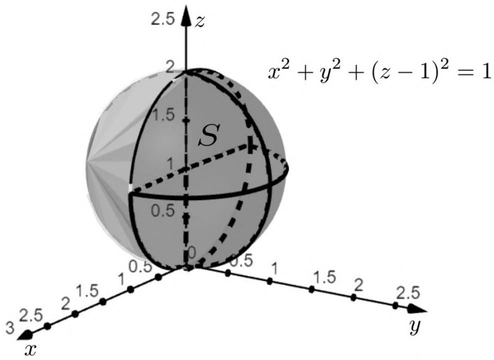
Pasando a coordenadas esféricas la ecuación de la superficie:

$$\begin{aligned}
z &= 1 \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2} \\
(z-1)^2 &= \left(\pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}\right)^2 \\
(z-1)^2 &= 1 - x^2 - y^2 \\
x^2 + y^2 + (z-1)^2 &= 1 \\
x^2 + y^2 + z^2 - 2z &= 0 \\
\rho^2 - 2\rho\cos\varphi &= 0 \\
\rho(\rho - 2\cos\varphi) &= 0 \\
\rho = 0 \quad \vee \quad \rho &= 2\cos\varphi \\
0 \leq \rho &\leq 2\cos\varphi
\end{aligned}$$

Representando el sólido S (Figura 3.47):

Figura 3.47

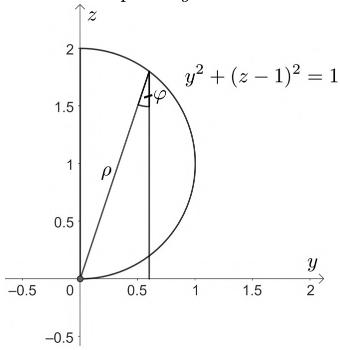
Región de integración S



Representando la traza de la esfera en el plano yz (Figura 3.48):

Figura 3.48

Traza en el plano yz



Para hallar el límite para φ :

$$\begin{aligned}
&P(0,2);\ \cos\varphi = \frac{z}{\rho} = \frac{2}{2\cos\varphi} \ \Rightarrow\ \cos^2\varphi = 1 \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0\\
&P\,(0,0)\,;\ \rho = 0\ \Rightarrow\ \rho = 2\cos\varphi\\
&\qquad\qquad\qquad 0 = 2\cos\varphi\\
&\qquad\qquad\qquad \cos\varphi = 0\\
&\qquad\qquad\qquad \varphi = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

Entonces los límites de integración son:

$$S : \begin{cases} 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \rho \le 2\cos\varphi \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} dzdydx = \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{2\cos\varphi} \rho^2 \sin\varphi\ d\rho d\varphi d\theta$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} dzdydx = \frac{1}{3}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\ \rho^3\Big|_{0}^{2\cos\varphi} d\varphi d\theta$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} dzdydx = \frac{1}{3}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 8\sin\varphi\cos^3\varphi\ d\varphi d\theta$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} dzdydx = -\frac{8}{3}\int_{0}^{\pi} \frac{\cos 4}{4}\ \varphi\ \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} dzdydx = -\frac{2}{3}\int_{0}^{\pi} \left(\cos^4\frac{\pi}{2} - \cos^4 0\right)\ d\theta$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2-y^2}} dzdydx = \frac{2}{3}\int_{0}^{\pi} d\theta$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} dzdydx = \frac{2}{3}\ \theta\ \Big|_{0}^{\pi}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} dzdydx = \frac{2}{3}\pi$$

Ejercicio 199.
Utilice coordenadas esféricas para resolver la siguiente integral:

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\; dzdydx$$

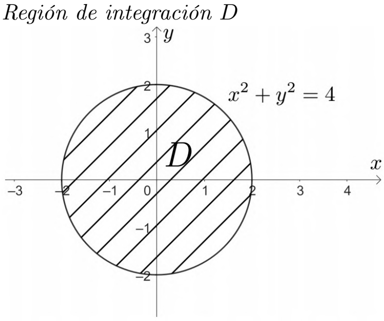
Solución
Los límites de la integral triple están dados por:

$$S:\begin{cases} -2\leq x\leq 2\\ -\sqrt{4-x^2}\leq y\leq \sqrt{4-x^2}\\ 0\leq z\leq \sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$$

La región D está en el plano xy (Figura 3.49), limitada por la curva que se toma del límite $y<\sqrt{1-x^2}$, así:

$$\begin{aligned}(y)^2&=(\sqrt{4-x^2})^2\\ x^2+y^2&=4\end{aligned}$$

Figura 3.49
Región de integración D



Hallando el límite para θ :

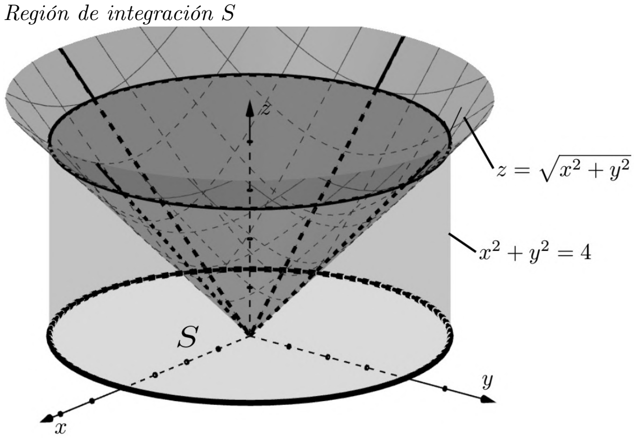
$$P(2,0);\ \operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}=\frac{0}{2}=0\ \Rightarrow\ \operatorname{tg}\theta=0\ \Rightarrow\ \theta=K\pi$$

$$\begin{aligned}\text{Si}\quad & K=0\ \Rightarrow\ \theta=0\\ & K=2\ \Rightarrow\ \theta=2\pi\end{aligned}$$

$$0\leq\theta\leq 2\pi$$

Representando el cilindro circular recto $x^2+y^2=4$ y el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ en la Figura 3.50:

Figura 3.50
Región de integración S



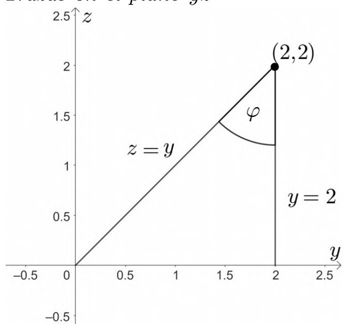
Transformando a coordenadas esféricas el cilindro $x^2 + y^2 = 4$:

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$\rho^2 \sin^2 \varphi = 4$$
$$\rho^2 = \frac{4}{\sin^2 \varphi}$$
$$\rho = \frac{2}{\sin \varphi}$$
$$0 \leq \rho \leq \frac{2}{\sin \varphi}$$

Representando las trazas de las superficies en el plano yz (Figura 3.51):

Figura 3.51

Trazas en el plano yz



Hallando los límites para φ :

$$P(2,2);\ \cos \varphi = \frac{z}{\rho} = \frac{2}{\frac{2}{\sin \varphi}} = \sin \varphi \ \Rightarrow\ \operatorname{tg} \varphi = 1 \ \Rightarrow\ \varphi = \frac{\pi}{4}$$
$$P(2,0);\ \cos \varphi = \frac{0}{\frac{2}{\sin \varphi}} = 0 \ \Rightarrow\ \cos \varphi = 0 \ \Rightarrow\ \varphi = \frac{\pi}{2}$$
$$\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Transformando el integrando a coordenadas esféricas:

$$f\,(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$f(\rho, \varphi, \theta) = \frac{1}{\rho^2}$$

Entonces los límites de la integral triple en coordenadas esféricas son:

$$S : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \dfrac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq \rho \leq \dfrac{2}{\sin \varphi} \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{0}^{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\ dzdydx = \int_{0}^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{\frac{2}{\sin \varphi}} \frac{1}{\rho^2} \cdot \rho^2 \sin \varphi\ d\rho d\varphi d\theta$$
$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{0}^{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\ dzdydx = \int_{0}^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rho \,\Bigg|_{0}^{\frac{2}{\sin \varphi}} \sin \varphi\ d\varphi d\theta$$
$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{0}^{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\ dzdydx = 2 \int_{0}^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin \varphi} \cdot \sin \varphi\ d\varphi d\theta$$
$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{0}^{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\ dzdydx = 2 \int_{0}^{2\pi} \varphi \,\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\ dzdydx = 2\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\ d\theta$$
$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\ dzdydx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{2\pi} d\theta$$
$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\ dzdydx = \pi^2$$

Ejercicio 200.
Expresar la siguiente integral en coordenadas cartesianas:

$$\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{0}^{\sqrt{8}} f(\rho,\varphi,\theta)\ \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

Solución
Los límites de la integral triple son:

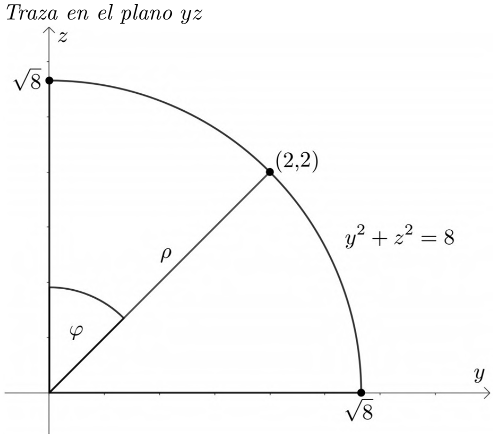
$$S:\begin{cases} 0\leq\theta\leq 2\pi \\ 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4} \\ 0\leq\rho\leq\sqrt{8}\end{cases}$$

Transformando a coordenadas cartesianas:

$$\rho=\sqrt{8}$$
$$\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2=(\sqrt{8})^2$$
$$x^2+y^2+z^2=8$$

Las trazas en el plano yz están dadas por (Figura 3.52):

Figura 3.52
Traza en el plano yz



Como: $\varphi=\frac{\pi}{4}\ \Rightarrow\ \operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{z}\ \Rightarrow\ \frac{y}{z}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\ \Rightarrow\ \frac{y}{z}=1\ \Rightarrow\ z=y$
Ahora: $z=\rho\cos\varphi=\frac{r}{\sin\varphi}\cos\varphi=\frac{r}{\operatorname{tg}\varphi}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\sqrt{x^2+y^2}$

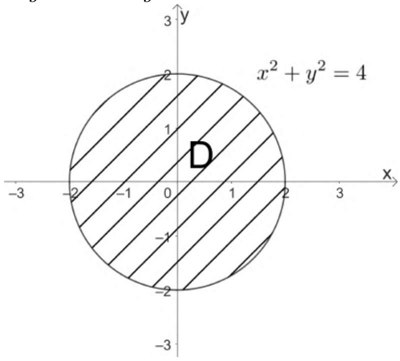
Por lo que la ecuación de la otra superficie es del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$, cuya traza en el plano yz es la recta $z=y$. La intersección de las dos trazas es si $z=y,\ 2z^2=8,\ z^2=4\ \Rightarrow\ z=2,\ y=2$.
Reemplazando $z=2$ en la ecuación de la esfera $x^2+y^2+z^2=8$, se tiene la curva de intersección de la esfera con el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$:

$$x^2+y^2=4$$

Proyectando en el plano horizontal se tiene (Figura 3.53):

Figura 3.53

Región de integración D



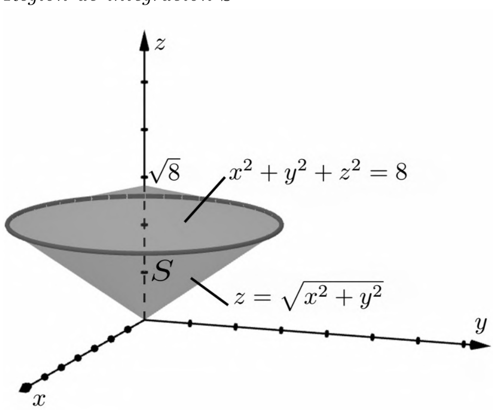
Para $0 \leq \theta \leq 2\pi$, los límites de integración en coordenadas cartesianas son:

$$-2 \leq x \leq 2$$
$$-\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$$

Representando el sólido en la Figura 3.54:

Figura 3.54

Región de integración S



Donde los límites de integración para z son:

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{8-x^2-y^2}$$

Entonces los límites de integración en coordenadas cartesianas son:

$$S: \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{8-x^2-y^2} \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{8}} f(\rho,\varphi,\theta)\ \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} \frac{f(\rho,\varphi,\theta)}{x^2+y^2+z^2}\ dzdydx$$

3.7. Aplicaciones de las integrales triples

Dentro de las aplicaciones más destacadas de las integrales triples están el cálculo del volumen, centro de masa, los momentos de inercia y radios de giro de un sólido S (Edwards y Larson, 2017).

1. Volumen de un sólido S.

$$V(S) = \iiint\limits_S dV \quad \left(\mathrm{m}^3\right). \tag{3.22}$$

2, Centro de masa de un sólido S.

Sea $D : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función continua sobre S, siendo $\delta(x, y, z)$ la densidad en el punto (x, y, z) en $\mathrm{kg/m^3}$.

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} \quad (\mathrm{m}). \tag{3.23}$$

Donde:

$$M = \iiint\limits_S \delta(x, y, z)\ dV \qquad (\mathrm{kg}). \qquad \text{Masa} \tag{3.24}$$

$$M_{xy} = \iiint\limits_S z\ \delta(x, y, z)\ dV \quad (\mathrm{kg - m}). \quad \text{Momento estático respecto al plano } xy \tag{3.25}$$

$$M_{xz} = \iiint\limits_S y\ \delta(x, y, z)\ dV \quad (\mathrm{kg - m}). \quad \text{Momento estático respecto al plano } xz \tag{3.26}$$

$$M_{yz} = \iiint\limits_S x\ \delta(x, y, z)\ dV \quad (\mathrm{kg - m}). \quad \text{Momento estático respecto al plano } yz \tag{3.27}$$

3. Momentos de inercia de un sólido S.

Respecto a los ejes coordenados:

$$I_x = \iiint\limits_S \left(y^2 + z^2\right) \delta(x, y, z)\ dV \quad \left(kg - \mathrm{m}^2\right). \tag{3.28}$$

$$I_y = \iiint\limits_S \left(x^2 + z^2\right) \delta(x, y, z)\ dV \quad \left(kg - \mathrm{m}^2\right). \tag{3.29}$$

$$I_z = \iiint\limits_S \left(x^2 + y^2\right) \delta(x, y, z)\ dV \quad \left(kg - \mathrm{m}^2\right). \tag{3.30}$$

Respecto a los planos coordenados:

$$I_{xy} = \iiint\limits_S z^2 \delta(x, y, z)\ dV \quad \left(\mathrm{kg - m}^2\right). \tag{3.31}$$

$$I_{xz} = \iiint\limits_S y^2 \delta(x, y, z)\ dV \quad \left(\mathrm{kg - m}^2\right). \tag{3.32}$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_S x^2 \delta(x, y, z)\ dV \quad \left(\mathrm{kg - m}^2\right). \tag{3.33}$$

Respecto al origen:

$$I_0 = \iiint\limits_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \delta(x, y, z)\ dV \quad \left(\mathrm{kg - m}^2\right). \tag{3.34}$$

$$I_0 = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz} \qquad \left(\mathrm{kg - m}^2\right). \tag{3.35}$$

4. Radios de giro de un sólido S.

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}} \quad (\mathrm{m}). \tag{3.36}$$

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}} \quad (\mathrm{m}). \tag{3.37}$$

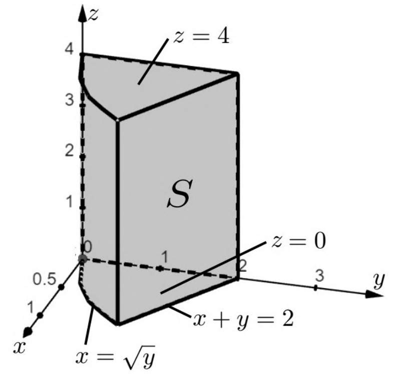
$$r_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}} \quad (\mathrm{m}). \tag{3.38}$$

Ejercicio 201.
Calcular el volumen del sólido limitado por las superficies:

$$x = \sqrt{y}, \; x + y = 2, \; x = 0, \; z = 0, \; z = 4$$

Solución
Representando las superficies que limitan al sólido en la Figura 3.55:

Figura 3.55
Región de integración S

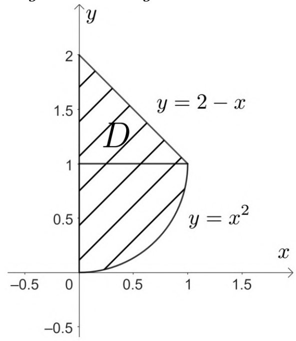


Por la forma del sólido y tomando la región D en el plano xy, es recomendable usar coordenadas cartesianas para calcular el volumen del sólido dado por:

$$V(S) = \iiint\limits_{S} dV$$

Eligiendo la región D en el plano xy (Figura 3.56):

Figura 3.56
Región de integración D



Hallando la intersección entre las curvas:

$$
\begin{aligned}
y &= 2 - x \\
y &= x^2 \\
x^2 &= 2 - x \\
x^2 + x - 2 &= 0 \\
(x+2)(x-1) &= 0 \\
x = -2 \quad &\vee \quad x = 1 \\
y = 0 \quad & \quad\;\; y = 1
\end{aligned}
$$

Los límiles para la region D son:

$$
\begin{aligned}
0 \leq x &\leq 1 \\
x^2 \leq y &\leq 2 - x
\end{aligned}
$$

Para la altura z :

$$0 \leq z \leq 4$$

Entonces los límites para S son:

$$
S : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq 2 - x \\ \theta \leq z \leq 4 \end{cases}
$$

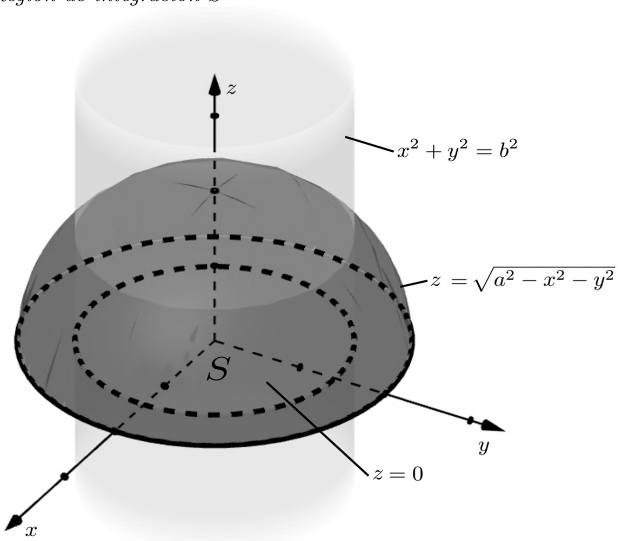
Por lo tanto el volumen del sólido es:

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint\limits_S dV \\
V &= \int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} \int_0^4 dzdydx \\
V &= 4 \int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} dydx \\
V &= 4 \int_0^1 \left(2 - x - x^2\right) dx \\
V &= 4 \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 \\
V &= 4 \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\
V &= \frac{14}{3} \text{ m}^3.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 202.
Calcular el volumen del sólido acotado por las superficies $z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, el plano xy, y $x^2 + y^2 \geqslant b^2$, donde $0 \leq b \leq a$.
Solución
Representando las superficies que limitan al sólido S, como lo muestra la Figura 3.57:

$$
\begin{aligned}
(z)^2 &= \left(\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right)^2 \\
x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 \quad \text{esfera} \\
x^2 + y^2 &= b^2 \quad \text{cilindro circular recto}
\end{aligned}
$$

Figura 3.57
Región de integración S

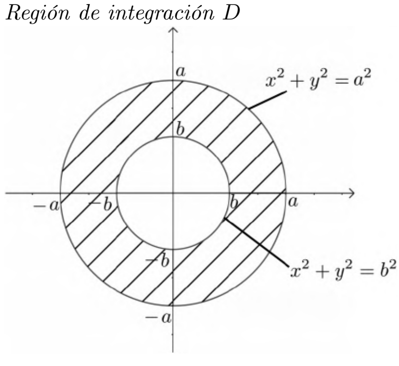


Por la forma del sólido (simétrico respecto al eje z), y tomando la región D en el plano xy (limitada por circunferencias), es recomendable usar coordenadas cilíndricas para calcular el volumen del sólido dado por:

$$V(S) = \iiint\limits_S dV$$

La región D está en el plano polar xy, como lo muestra la Figura 3.58:

Figura 3.58
Región de integración D



Pasando a coordenadas polares:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2 \\ r^2 &= a^2 \\ r &= a \end{aligned}$$

$$P(a, 0)$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{0}{a} = 0$$

$$\theta = K\pi$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= b^2 \\ r^2 &= b^2 \\ r &= b \end{aligned}$$

$$K = 0,\ 0 = \pi\ ;\ K = 2,\ \theta = 2\pi$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$b \leq r \leq a$$

La altura z :

$$z = 0, \quad z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$
$$z = \sqrt{a - r^2}$$
$$0 \leq z \leq \sqrt{a - r^2}$$

Entonces los límites en coordenadas cilíndricas son:

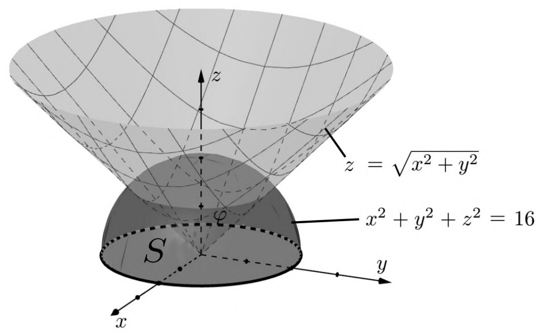
$$S : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ b \leq r \leq a \\ 0 \leq z \leq \sqrt{a - r^2} \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$V = \iiint_S dV$$
$$V = \int_0^{2\pi} \int_b^a \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r \; dzdrd\theta$$
$$V = \int_0^{2\pi} \int_b^a r\sqrt{a^2 - r^2} \; drd\theta$$
$$V = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} \left(a^2 - r^2\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_b^a \; d\theta$$
$$V = -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left[0 - \left(a^2 - b^2\right)^{\frac{3}{2}}\right] d\theta$$
$$V = \frac{1}{3} \left(a^2 - b^2\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$
$$V = \frac{1}{3} \left(a^2 - b^2\right)^{\frac{3}{2}} \; \theta \Big|_0^{2\pi}$$
$$V = \frac{2}{3}\pi \left(a^2 - b^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

Ejercicio 203.
Calcular el volumen del sólido limitado por las superficies $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$, $z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano xy.
Solución
Representando las superficies que limitan el sólido (Figura 3.59):

Figura 3.59
Región de integración S



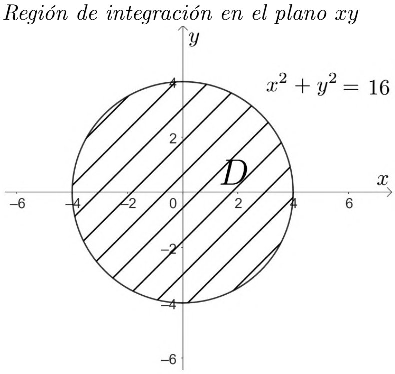
Puesto que el sólido tiene como punto de simetría el origen y además está limitado por una esfera y un cono, entonces es recomendable usar coordenadas esféricas para calcular el volumen del sólido.

$$V(S) = \iiint_S dV$$

Para hallar el ángulo θ, se representa la traza de la esfera en el plano xy (Figura 3.60):

Figura 3.60

Región de integración en el plano xy



$$P(4,0)$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = 0$$

$$\theta = K\pi$$

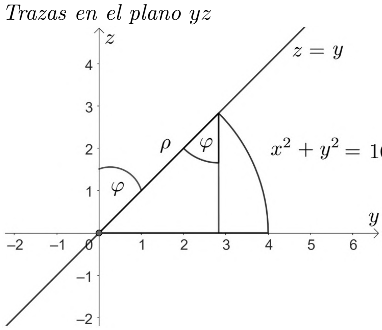
$$K = 0,\ \theta = 0\ ;\ K = 2,\ \theta = 2\pi$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Para hallar el ángulo φ, se representa las trazas del cono y de la esfera en el plano yz (Figura 3.61):

Figura 3.61

Trazas en el plano yz



Intersecando las curvas $\quad z = y, \quad y^2 + z^2 = 16$

$$2y^2 = 16$$

$$y^2 = 8$$

$$y = 2\sqrt{2}, \quad z = 2\sqrt{2}$$

$$P(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}):\ \cos\varphi = \frac{z}{\rho} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Donde:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16$$

$$\rho^2 = 16$$

$$\rho = 4$$

$$P(4,0):\ \cos\varphi = \frac{z}{\rho} = \frac{0}{1} = 0\ \Rightarrow\ \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Entonces los límites en coordenadas esféricas son:

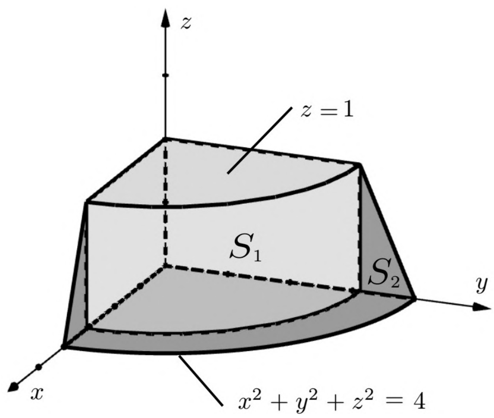
$$S : \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ \dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le \rho \le 4 \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
V &= \iiint\limits_S dV \\
V &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 \rho^2 \sin\varphi \; d\rho d\varphi d\theta \\
V &= \frac{64}{3} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \; d\varphi d\theta \\
V &= -\frac{64}{3} \int_0^{2\pi} \cos\varphi \, \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\
V &= -\frac{64}{3} \int_0^{2\pi} \left(0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) d\theta \\
V &= \frac{32}{3}\sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta \\
V &= \frac{32}{3}\sqrt{2}\; \theta \, \Bigg|_0^{2\pi} \\
V &= \frac{64}{3}\sqrt{2}\; \pi \text{ m}^3.
\end{aligned}$$

Ejercicio 204.
Calcular la masa del sólido homogéneo limitado por las superficies $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$, bajo el plano $z = 1$ en el 1^{er} octante.
Solución
Representando las superficies que limitan el sólido y dividiendo a éste en dos partes: S_1 y S_2, tal como lo muestra la Figura 3.62.

Figura 3.62
Regiones de integración S_1 y S_2



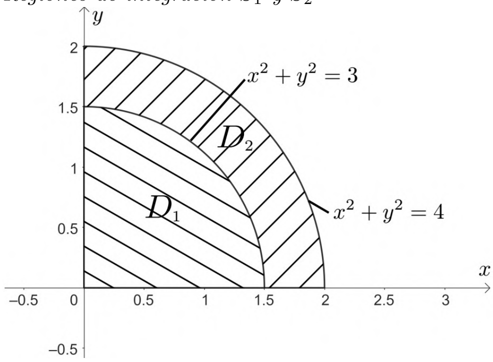
El sólido es simétrico respecto al eje z, se recomienda utilizar coordenadas cilíndricas para calcular la integral triple:

$$M = \iiint\limits_S \delta(x, y, z) \, dV$$

Tomando el plano polar en el plano xy, representando D_1 y D_2 en la Figura 3.63:

Figura 3.63

Regiones de integración S_1 y S_2



Transformando a coordenadas polares:

D_1 :

$$x^2 + y^2 = 3 \qquad P(\sqrt{3}, 0) : \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{0}{\sqrt{3}} = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$r^2 = 3 \qquad P(0, \sqrt{3}) : \operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{3}}{0} = \infty \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$r = \sqrt{3} \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

D_2 :

$$x^2 + y^2 = 4 \qquad P(2, 0); \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{0}{2} = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$r^2 = 4 \qquad P(0, 2) : \operatorname{tg}\theta = \frac{2}{0} = \infty \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$r = 2$$

$$\sqrt{3} \leq r \leq 2 \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

La altura para el sólido S_1 es:

$$0 \leq z \leq 1$$

La altura para el sólido S_2 es:

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

$$z = \sqrt{4 - r^2}$$

$$0 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}$$

Entonces los límites para S_1 y S_2 en coordenadas cilíndricas son:

$$S_1 : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq \sqrt{3} \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \sqrt{3} \leq r \leq 2 \\ 0 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2} \end{cases}$$

Por lo tanto la masa del sólido se calcula como:

$$M = \iiint_{S_1} \delta(x, y, z)\ dV + \iiint_{S_2} \delta(x, y, z)\ dV$$

Como es un sólido homogéneo, la densidad es constante, $\delta(x, y, z) = K\ (\mathrm{kg/\ m^3})$.

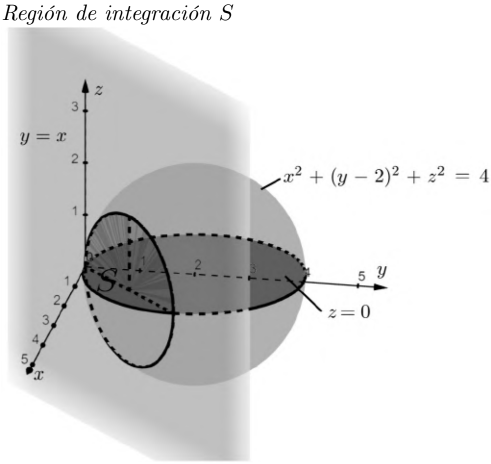
$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^1 Krdzdrd\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\sqrt{3}}^2 \int_0^{\sqrt{4-r^2}} Krdzdrd\theta$$

$$M = K \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{3}} r\ z \Big|_0^1 drd\theta + K \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\sqrt{3}}^2 r\ z \Big|_0^{\sqrt{4-r^2}} drd\theta$$

$$
\begin{aligned}
M &= K\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{3}} r\ drd\theta + K\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\sqrt{3}}^{2} r\sqrt{4-r^2}\ drd\theta\\
M &= \frac{K}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\Big|_0^{\sqrt{3}} d\theta - \frac{1}{2}K\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3}\left(4-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\sqrt{3}}^{2} d\theta\\
M &= \frac{3}{2}K\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta + \frac{1}{3}K\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\\
M &= \frac{3}{2}K\ \theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3}K\ \theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\
M &= \frac{3}{4}K\pi + \frac{1}{6}K\pi\\
M &= \frac{11}{12}K\pi \quad \text{kg.}
\end{aligned}
$$

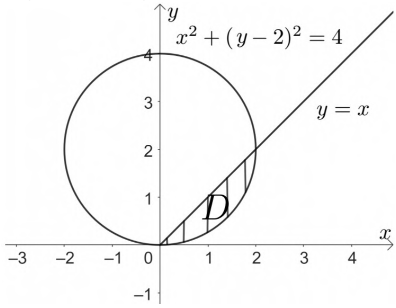
Ejercicio 205.
Calcular la masa del sólido limitado por las superficies $x^2+(y-2)^2+z^2 \le 4,\ y \le x, z \ge 0$, sí $\delta(x,y,z) = \frac{1}{y\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ kg/ m^3.
Solución
Representando las superficies que limitan el sólido, como lo muestra la Figura 3.64:

Figura 3.64
Región de integración S



Por la forma del sólido sería recomendable usar coordenadas esféricas. Para determinar el ángulo θ, se representa la región D en el plano xy:

Figura 3.65
Región de integración D



Intersecando las curvas:

$$
\begin{aligned}
y = x \;\Rightarrow\quad x^2 + (x-2)^2 &= 4\\
x^2 + x^2 - 4x + 4 &= 4\\
2x^2 - 4x &= 0\\
2x(x-2) &= 0\\
x = 0 \quad \vee \quad x &= 2\\
y = 0 \qquad\quad y &= 2
\end{aligned}
$$

Pasando a coordenadas polares:

$$x^2 + (y-2)^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 - 4y = 0$$

$$r^2 - 4r\sin\theta = 0$$

$$r(r - 4\sin\theta) = 0$$

$$r = 0 \quad \vee \quad r = 4\sin\theta$$

En el punto $P\,(0,0)\,,\; r = 0$, entonces:

$$0 = 4\sin\theta$$

$$\sin\theta = 0$$

$$\theta = k\pi$$

$$k = 0, \quad \theta = 0$$

En el punto $P(2,2),\; \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{2}{2} = 1 \;\Rightarrow\; \theta = \frac{\pi}{4}$.

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$$

Transformando la ecuación $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$ a coordenadas esféricas:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4y = 0$$

$$\rho^2 - 4\rho\sin\theta\sin\varphi = 0$$

$$\rho(\rho - 4\sin\theta\sin\varphi) = 0$$

$$\rho = 0 \quad \vee \quad \rho = 4\sin\theta\sin\varphi$$

$$0 \le \rho \le 4\sin\theta\sin\varphi$$

Para hallar el ángulo φ se toma los puntos en $(y,z), P\,(0,0)$ y el punto $P(2,0)$:

$$
\begin{aligned}
\text{En } P\,(0,0)\,,\; \rho = 0 \;\Rightarrow\quad 0 &= 4\sin\theta\sin\varphi\\
\sin\varphi &= 0\\
\varphi &= 0
\end{aligned}
$$

$$\text{En } P(2,0),\; \cos\varphi = \frac{z}{8} = \frac{0}{\rho} = 0 \;\Rightarrow\; \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

Entonces los límites en coordenadas esféricas son:

$$S : \begin{cases} 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4} \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le \rho \le 4\sin\theta\sin\varphi \end{cases}$$

$$M = \iiint\limits_S \delta\,(x,y,z)\;\, dV$$

$$M = \iiint\limits_S \frac{1}{y\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\; dV$$

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\sin\theta\sin\varphi} \frac{1}{\rho_{\sin\theta\sin\varphi}\;\rho}\; \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin\theta}\; \rho\, \Bigg|_0^{4\sin\theta\sin\varphi} d\varphi d\theta$$

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin\theta \sin\varphi}{\sin\theta}\ d\varphi d\theta$$

$$M = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} -\cos\varphi \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

$$M = -4\int_0^{\frac{\pi}{4}} (0-1)\ d\theta$$

$$M = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta$$

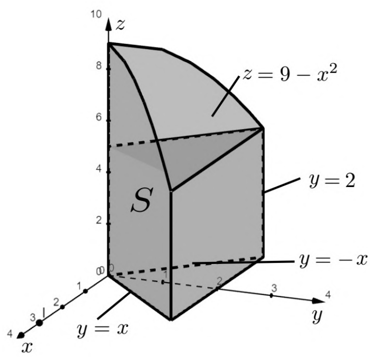
$$M = 4\ \theta \Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$M = 4 \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$M = \pi \text{ kg.}$$

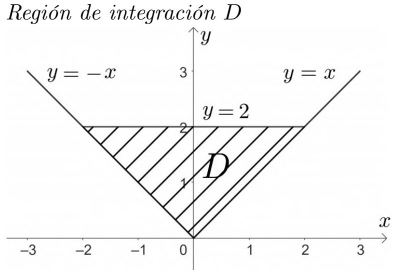
Ejercicio 206.
Calcular el centro de gravedad del sólido homogéneo limitado por las superficies: $y = x,\ y = -x,\ y = 2,\ z = 9 - x^2,\ z = 0.$
Solución
Representando las superficies que limitan al sólido en la Figura 3.66:

Figura 3.66
Región de integración S



Por la forma del sólido es recomendable usar coordenadas cartesianas, eligiendo la región D en el plano xy (Figura 3.67):

Figura 3.67
Región de integración D



Por lo que los límites para S están dados por:

$$S : \begin{cases} \theta \leq y \leq 2 \\ -y \leq x \leq y \\ 0 \leq z \leq 9 - x^2 \end{cases}$$

Calculando la masa del sólido S :

$$M = \iiint\limits_{S} \delta\left(x, y, z\right)\ dV$$

$$M = K \int_0^2 \int_{-y}^{y} \int_0^{9-x^2} dz dx dy$$

$$M = K \int_0^2 \int_{-y}^{y} \left(9 - x^2\right) dx dy$$

$$M = \frac{K}{3} \int_0^2 \left(27x - x^3\right)\Big|_{-y}^{y} dy$$

$$M = \frac{K}{3} \int_0^2 \left[\left(27y - y^3\right) - \left(-27y + y^3\right)\right] dy$$

$$M = \frac{K}{3} \int_0^2 \left(54y - 2y^3\right) dy$$

$$M = \frac{K}{3} \left(27y^2 - \frac{1}{2}y^4\right)\Big|_0^2$$

$$M = \frac{K}{3}(108 - 8)$$

$$M = \frac{100}{3}K \quad \text{kg.}$$

Calculando los primeros momentos respecto a los planos coordenados:

$$M_{xy} = \iiint\limits_{S} z\ \delta\left(x, y, z\right)\ dV$$

$$M_{xy} = K \int_0^2 \int_{-y}^{y} \int_0^{9-x^2} z\ dz dx dy$$

$$M_{xy} = \frac{K}{2} \int_0^2 \int_{-y}^{y} z^2\Big|_0^{9-x^2} dx dy$$

$$M_{xy} = \frac{K}{2} \int_0^2 \int_{-y}^{y} \left(81 - 18x^2 + x^4\right) dx dy$$

$$M_{xy} = \frac{K}{2} \int_0^2 \left(81x - 6x^3 + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-y}^{y} dy$$

$$M_{xy} = \frac{K}{2} \int_0^2 \left[\left(81y - 6y^3 + \frac{1}{5}y^5\right) - \left(-81y + 6y^3 - \frac{1}{5}y^5\right)\right] dy$$

$$M_{xy} = \frac{K}{2} \int_0^2 \left(162y - 12y^3 + \frac{2}{5}y^5\right) dy$$

$$M_{xy} = \frac{K}{2} \left(81y^2 - 3y^4 + \frac{1}{15}y^6\right)\Big|_0^2$$

$$M_{xy} = \frac{K}{2} \left[81(4) - 3(16) + \frac{1}{15}(2)^6\right]$$

$$M_{xy} = \frac{2102}{15}K \quad \text{kg} - \text{m.}$$

$$M_{xz} = \iiint\limits_{S} y\ \delta\left(x, y, z\right)\ dV$$

$$M_{xz} = k \int_0^2 \int_{-y}^{y} \int_0^{9-x^2} y\ dz dx dy$$

La integral para M_{xz} no es más que la misma integral que de la masa, multiplicado por y, por lo tanto, para no repetir el cálculo de toda la integral, se toma la integral de la masa antes del cálculo para dy y se agrega y, así:

$$\begin{aligned}
M_{xz} &= \frac{K}{3}\int_0^2 y\left(54y-2y^3\right)dy\\
M_{xz} &= \frac{K}{3}\int_0^2 \left(54y^2-2y^4\right)dy\\
M_{xz} &= \frac{K}{3}\left(\frac{54}{3}y^3-\frac{2}{5}y^5\right)\Big|_0^2\\
M_{xz} &= \frac{K}{3}\left(\frac{54}{3}(2)^3-\frac{2}{5}(2)^5\right)\\
M_{xz} &= \frac{656}{15}K \quad \text{kg}-\text{m}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{yz} &= \iiint_S x\ \delta\left(x,y,z\right)\ dV\\
M_{yz} &= k\int_0^2\int_{-y}^{y}\int_0^{9-x} x\ dzdxdy
\end{aligned}$$

De igual manera que se hizo para el cálculo de M_{xz}, se toma la integral de la masa antes del cálculo para dx y se agrega x, así:

$$\begin{aligned}
M_{yz} &= K\int_0^2\int_{-y}^{y} x\left(9-x^2\right)dxdy\\
M_{yz} &= K\int_0^2\int_{-y}^{y} \left(9x-x^3\right)dxdy\\
M_{yz} &= K\int_0^2 \left(\frac{9}{2}x^2-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-y}^{y} dy\\
M_{yz} &= K\int_0^2 \left[\left(\frac{9}{2}y^2-\frac{y^4}{4}\right)-\left(\frac{9}{2}y^2-\frac{y^4}{4}\right)\right]dy\\
M_{yz} &= 0 \quad \text{kg}-\text{m}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, las coordenadas del centro de gravedad están dadas por:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{M_{yz}}{M} = \frac{0}{M} = 0 \text{ m.}\\
\bar{y} &= \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\frac{656}{15}K}{\frac{100}{3}K} = \frac{164}{125} \text{ m.}\\
\bar{z} &= \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\frac{2102}{15}K}{\frac{100}{3}K} = \frac{1051}{250} \text{ m.}\\
&\text{c.g.}\ \left(0,\frac{164}{125},\frac{1051}{250}\right)
\end{aligned}$$

Ejercicio 207.

Hallar el centroide del sólido limitado por las superficies:

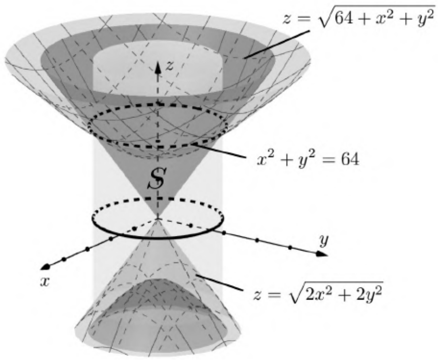
$$z^2 \geqslant 2x^2+2y^2, \quad z^2 \leq 64+x^2+y^2$$

| ***Solución***

Representando las superficies que limitan el sólido (Figura 3.68):

Figura 3.68

Región de integración S

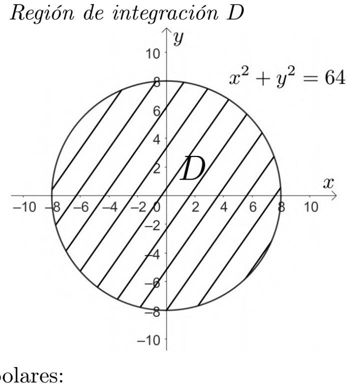


Al ser un sólido simétrico al eje z, se recomienda usar coordenadas cilíndricas, con el plano polar en el plano xy.
Hallando la curva de intersección de las dos superficies y proyectando en el plano xy:

$$\begin{aligned} z^2 &= 2x^2 + 2y^2 \\ z^2 &= 64 + x^2 + y^2 \\ 2x^2 + 2y^2 &= 64 + x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 &= 64 \quad \text{representada en la Figura 3.69} \end{aligned}$$

Figura 3.69

Región de integración D



Transformando a coordenadas polares:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 64 \\ r^2 &= 64 \\ r &= 8 \\ 0 \leq r &\leq 8 \end{aligned} \qquad \begin{gathered} P(8{,}0) : \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{0}{8} = 0 \\ \theta = K\pi \\ K = 0,\ \theta = 0\ ;\ K = 2,\ \theta = 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{gathered}$$

La altura del sólido está dado por:

$$\begin{gathered} z = \sqrt{2x^2 + 2y^2} \quad \Rightarrow\ z = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}\ r \\ z = \sqrt{64 + x^2 + y^2}\ \Rightarrow\ z = \sqrt{64 + r^2} \\ \sqrt{2}\ r \leqslant z \leq \sqrt{64 + r^2} \end{gathered}$$

Entonces los límites para S en coordenadas cilíndricas son:

$$S : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 8 \\ \sqrt{2}\ r \leq z \leq \sqrt{64 + r^2} \end{cases}$$

Calculando la masa del sólido se tiene:

$$
\begin{aligned}
M &= \iiint\limits_S \delta\left(x,y,z\right)\ dV\\
M &= K\int_0^{2\pi}\int_0^8\int_{\sqrt{2}\ r}^{\sqrt{64+r^2}} r\ dzdrd\theta\\
M &= K\int_0^{2\pi}\int_0^8 r\left(\sqrt{64+r^2}-\sqrt{2}\ r\right)drd\theta\\
M &= K\int_0^{2\pi}\int_0^8 \left(r\sqrt{64+r^2}-\sqrt{2}\ r^2\right)drd\theta\\
M &= K\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\left(64+r^2\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{3}r^3\right]\Bigg|_0^8 d\theta\\
M &= \frac{K}{3}\int_0^{2\pi}\left[(128)^{\frac{3}{2}}-512\sqrt{2}-64^{\frac{3}{2}}\right]d\theta\\
M &= \frac{K}{3}(1024\sqrt{2}-512\sqrt{2}-512)\ \theta\ \Bigg|_0^{2\pi}\\
M &= \frac{2}{3}K\pi(512\sqrt{2}-512)\\
M &= \frac{1024}{3}\,K\pi(\sqrt{2}-1)\quad\ \text{kg.}
\end{aligned}
$$

El sólido es homogéneo y es simétrico respecto a los planos coordenados yz y xz, por lo que $M_{yz}=0$, $M_{xz}=0$ (el estudiante puede verificarlo). Se procede entonces a calcular M_{xy}.

$$
\begin{aligned}
M_{xy} &= \iiint\limits_S z\ \delta\left(x,y,z\right)\ dV\\
M_{xy} &= K\int_0^{2\pi}\int_0^8\int_{\sqrt{2}\ r}^{\sqrt{64+r^2}} z\ dzdrd\theta\\
M_{xy} &= \frac{K}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^8 r\ z^2\Bigg|_{\sqrt{2}\ r}^{\sqrt{64+r^2}} drd\theta\\
M_{xy} &= \frac{K}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^8 \left(r\left(64+r^2\right)-2r^2r\right)drd\theta\\
M_{xy} &= \frac{K}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^8 \left(64r+r^3-2r^3\right)drd\theta\\
M_{xy} &= \frac{K}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^8 \left(64r-r^3\right)drd\theta\\
M_{xy} &= \frac{K}{2}\int_0^{2\pi}\left(32r^2-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^8 d\theta\\
M_{xy} &= \frac{K}{2}\left(32(64)-\frac{(8)^4}{4}\right)\cdot 2\pi\\
M_{xy} &= 1024\,K\pi\quad\ \text{kg}-\text{m.}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{M_{yz}}{M}=\frac{0}{M}=0\ \text{m.}\\
\bar{y} &= \frac{M_{xz}}{M}=\frac{0}{M}=0\ \text{m.}\\
\bar{z} &= \frac{M_{xy}}{M}=\frac{1024\ K\pi}{\frac{1024}{3}K\pi\ (\sqrt{2}-1)}=\frac{3}{\sqrt{2}-1}\ \text{m.}
\end{aligned}
$$

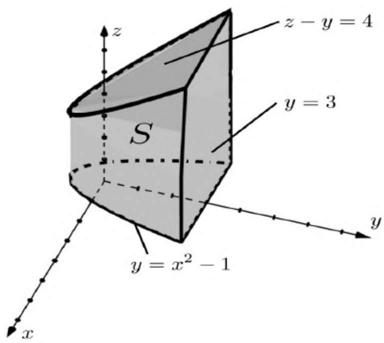
$$
\text{c.g}\left(0,0,\frac{3}{\sqrt{2}-1}\right)
$$

Ejercicio 208.
Calcular I_y del sólido limitado por las superficies: $y = x^2 - 1,\ y = 3,\ z - y = 4,\ z \geq 0,$

si $\delta(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + z^2}$ kg/ m^3.

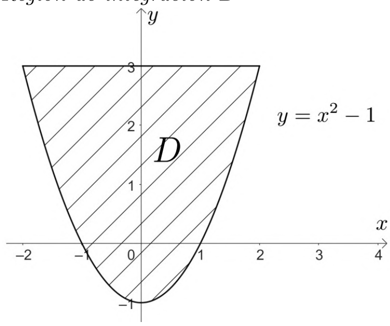
Solución
Representando las superficies y el sólido S (Figura 3.70):

Figura 3.70
Región de integración S



Tomando la región D en el plano xy (Figura 3.71):

Figura 3.71
Región de integración D



Utilizando coordenadas cartesianas y dividiendo al sólido en dos partes simétricas, los límites de integración son:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 1 \leq y \leq 3 \\ 0 \leq z \leq y + 4 \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$I_y = \iiint\limits_S \left(x^2 + z^2\right) \delta(x, y, z)\ dV$$

$$I_y = \iiint\limits_S \left(x^2 + z^2\right) \cdot \frac{1}{x^2 + z^2}\ dV$$

$$I_y = \iiint\limits_S dV$$

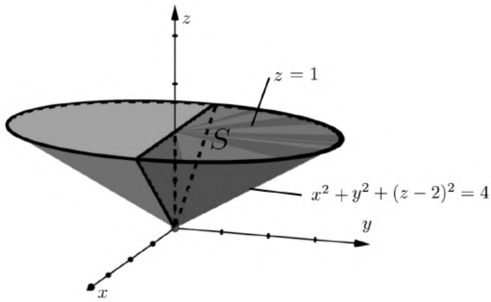
$$I_y = 2 \int_0^2 \int_{x^2-1}^3 \int_0^{y+4} dzdydx$$

$$I_y = 2 \int_0^2 \int_{x^2-1}^3 (y + 4)\ dydx$$

$$I_y = \frac{2}{2}\int_0^2 \left(y^2 + 8y\right)\Big|_{x^2-1}^{3} dx$$
$$I_y = \int_0^2 \Big[(9+24) - \Big[\left(x^2-1\right)^2 + 8\left(x^2-1\right)\Big]\Big] dx$$
$$I_y = \int_0^2 \left[33 - \left(x^4 - 2x^2 + 1 + 8x^2 - 8\right)\right] dx$$
$$I_y = \int_0^2 \left(40 - x^4 - 6x^2\right) dx$$
$$I_y = \left(40x - \frac{x^5}{5} - 2x^3\right)\Big|_0^2$$
$$I_y = 80 - \frac{32}{5} - 16$$
$$I_y = \frac{288}{5} \ \text{kg} - \text{m}^2.$$

Ejercicio 209.
Calcular I_{xy} del sólido limitado superiormente por el plano $z = 1$ e inferiormente por la esfera $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ para $y \geqslant 0$, si $\delta(x, y, z) = \frac{1}{z^2}$ kg/ m^3.
Solución
Representando las superficies y el sólido, como lo muestra la Figura 3.72:

Figura 3.72
Región de integración S

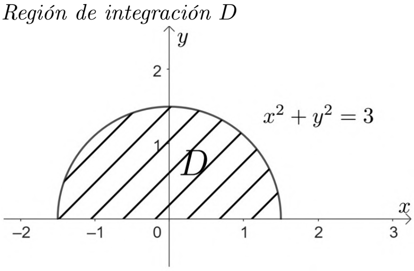


Intersecando las dos superficies:

$$z = 1 \quad ; \quad x^2 + y^2 + (1-2)^2 = 4$$
$$x^2 + y^2 = 3$$

Proyectando en el plano xy, representando la región D en la Figura 3.73:

Figura 3.73
Región de integración D



Se utilizará coordenadas cilíndricas por la forma del sólido y la región D.

Transformando a coordenadas polares:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 3 \\ r^2 &= 3 \\ r &= \sqrt{3} \\ 0 \leq r &\leq \sqrt{3} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} P(\sqrt{3}, 0):\ \operatorname{tg}\theta &= \frac{y}{x} = \frac{0}{\sqrt{3}} = 0 \ \Rightarrow\ \theta = 0 \\ P(-\sqrt{3}, 0):\ \operatorname{tg}\theta &= \frac{0}{\sqrt{3}} = 0 \qquad \Rightarrow\ \theta = \pi \\ 0 \leq \theta &\leq \pi \end{aligned}$$

La altura z del sólido queda como:

$$z = 1 \quad ; \quad z = 2 - \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$
$$z = 2 - \sqrt{4 - r^2}$$
$$2 - \sqrt{4 - r^2} \leq z \leq 1$$

Entonces los límites de integración en coordenadas cilíndricas son:

$$S: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq \sqrt{3} \\ 2 - \sqrt{4 - r^2} \leq z \leq 1 \end{cases}$$

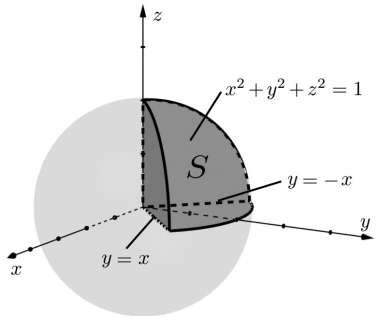
Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
I_{xy} &= \iiint\limits_S z^2\ \delta(x, y, z)\ dV \\
I_{xy} &= \iiint\limits_S z^2 \cdot \frac{1}{z^2}\ dV \\
Ixy &= \int_0^{\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_{2-\sqrt{4-r^2}}^{1} r\ dzdrd\theta \\
I_{xy} &= \int_0^{\pi} \int_0^{\sqrt{3}} r\ z \Big|_{2-\sqrt{4-r^2}}^{1} drd\theta \\
I_{xy} &= \int_0^{\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \left[1 - \left(2 - \sqrt{4 - r^2}\right)\right] r\ drd\theta \\
I_{xy} &= \int_0^{\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \left(r\ \sqrt{4 - r^2} - r\right) drd\theta \\
I_{xy} &= \int_0^{\pi} \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)\left(4 - r^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^2}{2}\right]\Bigg|_0^{\sqrt{3}} d\theta \\
I_{xy} &= \int_0^{\pi} \left[\left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right) - \left(-\frac{8}{3}\right)\right] d\theta \\
I_{xy} &= \frac{5}{6} \int_0^{\pi} d\theta \\
I_{xy} &= \frac{5}{6}\ \theta \Big|_0^{\pi} \\
I_{xy} &= \frac{5}{6}\pi \quad \mathrm{kg - m^2}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 210.
Sea el sólido homogéneo limitado por la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y los planos $y \geq x,\ y \geq -x,\ z \geq 0$, calcular el I_z y su radio de giro respecto al eje z.
Solución
Representando el sólido (Figura 3.74):

Figura 3.74

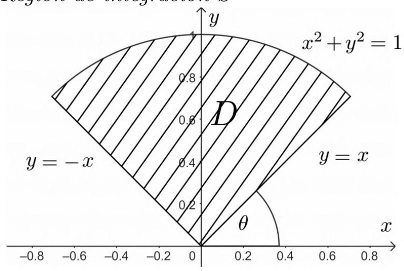
Región de integración S



Por las características del sólido, se recomienda utilizar coordenadas esféricas. Para hallar el ángulo θ, en el plano xy se tiene (Figura 3.75):

Figura 3.75

Región de integración S



$$y=x \quad \Rightarrow \; y'=\operatorname{tg}\theta=1 \quad \Rightarrow \; \theta=\frac{\pi}{4}$$

$$y=-x \;\Rightarrow\; y'=\operatorname{tg}\theta=-1 \;\Rightarrow\; \theta=\frac{3}{4}\pi$$

$$\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{3}{4}\pi$$

Transformando la ecuación de la esfera a coordenadas esféricas:

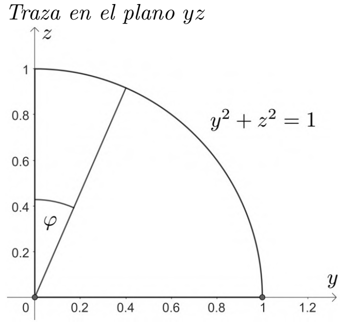
$$x^2+y^2+z^2=1$$
$$\rho^2=1$$
$$\rho=1$$

$$0\leq\rho\leq 1$$

Para hallar el ángulo φ, representando la traza en el plano yz (Figura 3.76):

Figura 3.76

Traza en el plano yz



En el punto $\;P(0,1):\;\cos\varphi=\frac{z}{\rho}=\frac{1}{1}=1\;\Rightarrow\;\varphi=0$

$\qquad\qquad\;\; P(1,0):\;\cos\varphi=\frac{0}{\rho}=0\;\Rightarrow\;\varphi=\frac{\pi}{2}$

$$0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$$

Entonces los límites en coordenadas esféricas quedan como:

$$S:\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}\leq\theta\leq\dfrac{3}{4}\pi\\ 0\leq\varphi\leq\dfrac{\pi}{2}\\ 0\leq\rho\leq1\end{cases}$$

Calculando la masa del sólido:

$$M=\iiint\limits_S\delta\left(x,y,z\right)\ dV$$

$$M=K\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$M=\frac{K}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi d\theta$$

$$M=\frac{K}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}-(\cos\varphi)\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta$$

$$M=\frac{K}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}-(0-1)\ d\theta$$

$$M=\frac{K}{3}\ \theta\ \bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}$$

$$M=\frac{K}{6}\pi\ \ \text{kg.}$$

Calculando I_z:

$$I_z=\iiint\limits_S\left(x^2+y^2\right)\delta\left(x,y,z\right)\ dV$$

$$I_z=K\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\rho^2\sin^2\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$I_z=\frac{K}{5}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2\varphi\right)\sin\varphi d\varphi d\theta$$

$$I_z=\frac{K}{5}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\left(-\cos\varphi+\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta$$

$$I_z=\frac{K}{5}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\left[(0+0)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right]d\theta$$

$$I_z=\frac{K}{5}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\cdot\frac{2}{3}\ d\theta$$

$$I_z=\frac{2}{15}K\cdot\ \theta\ \bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}$$

$$I_z=\frac{2}{15}K\cdot\frac{1}{2}\pi$$

$$I_z=\frac{K\pi}{15}\quad\text{kg}-\text{m}^2.$$

Calculando el radio de giro respecto al eje z:

$$r_z=\sqrt{\frac{I_z}{M}}$$

$$r_z=\sqrt{\frac{\frac{K\pi}{15}}{\frac{K\pi}{6}}}$$

$$r_z=\sqrt{\frac{2}{5}}\ \text{m.}$$

CAPÍTULO 4

Introducción al cálculo de campos vectoriales

Capítulo 4

Introducción al cálculo de campos vectoriales

4.1. Campos vectoriales

Una función vectorial de variable vectorial (campo vectorial) es una aplicación $\vec{F}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, donde a cada punto de $\mathbb{R}^n$ le corresponde un vector en $\mathbb{R}^n$ (Alcázar, 2022).

Sea $\quad \vec{F}: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\vec{x} \mapsto \vec{F}(\vec{x}) = \langle f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x})\rangle$$

Donde $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ funciones reales de varias variables, llamadas funciones componentes

$D_{\vec{F}} = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap \ldots \cap \quad D_{f_n}$

$R_{\vec{F}}$ conjunto de vectoes pertenecientes a $\mathbb{R}^n$.

El campo vectorial generado es un conjunto de vectores cuyo punto inicial de cada vector es el punto que pertenece al dominio de $\vec{F}$. No es posible graficar todo el campo vectorial, pero si una parte razonable de éste. Si D es un conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$, el campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ queda definido como:

$\vec{F}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \longmapsto \vec{F}(x, y) = P(x, y)\,\vec{\imath} + Q(x, y)\,\vec{\jmath} = \langle P, Q\rangle$$

A cada punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ le corresponde un vector con dos componentes en $\mathbb{R}^2$.

Si D es un conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$, el campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ queda definido como:

$\vec{F}: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \longmapsto \vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\vec{\imath} + Q(x, y, z)\,\vec{\jmath} + R(x, y, z)\,\vec{k} = \langle P, Q, R\rangle$$

A cada punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ le corresponde un vector con tres componentes en $\mathbb{R}^3$ (Stewart, 2012).

Ejercicio 211.

Determinar el dominio de la siguiente función vectorial de variable vectorial.

$$\vec{F}(x, y) = \sqrt{\frac{y}{x}}\,\vec{\imath} + \arccos x\vec{\jmath}$$

Solución

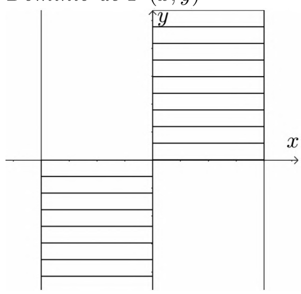
Identificando las funciones componentes y hallando su dominio:

$$\begin{aligned}
&P(x, y) = \sqrt{\frac{y}{x}} &&\Rightarrow\; D_P = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \frac{y}{x} \geq 0\right\}\\
&Q(x, y) = \arccos x &&\Rightarrow\; D_Q = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/ -1 \leq x \leq 1\right\}\\
&D_{\vec{F}} = D_P \cap D_Q = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \frac{y}{x} \geq 0 \;\wedge\; -1 \leq x \leq 1\right\}
\end{aligned}$$

Representando el $D_{\vec{F}}$ en la Figura 4.1:

Figura 4.1

Dominio de $\vec{F}(x,y)$



Ejercicio 212.
Determinar el dominio de la siguiente función vectorial de variable vectorial:

$$\vec{F}(x,y,z)=\sqrt{z-x^2-y^2}\ \vec{\imath}+ch(xz)\ \vec{\jmath}+\arcsin z\ \vec{k}$$

Solución
Identificando las funciones componentes y determinando su dominio:

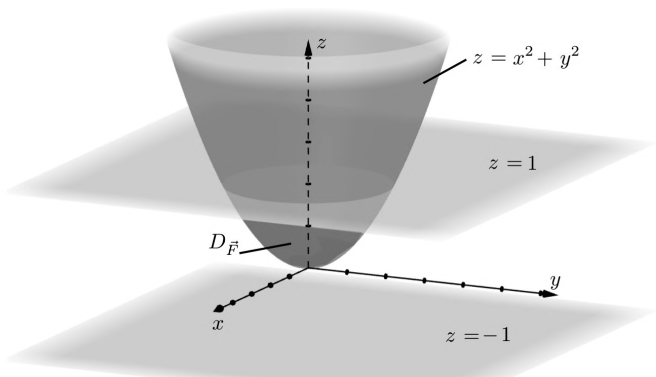
$$\begin{aligned}
P(x,y,z)&=\sqrt{z-x^2-y^2} &&\Rightarrow\ D_P=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ z-x^2-y^2\geq 0\right\}\\
Q(x,y,z)&=ch(xz) &&\Rightarrow\ D_Q=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}\\
R(x,y,z)&=\arcsin z &&\Rightarrow\ D_R=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /-1\leq z\leq 1\right\}
\end{aligned}$$

$$D_{\vec{F}}=D_P\cap D_Q\cap D_R=\left\{(x\cdot y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ z-x^2-y^2\geqslant 0\ \wedge -1\leq z\leq 1\right\}$$

Representando el $D_{\vec{F}}$ en la Figura 4.2:

Figura 4.2

Dominio de $\vec{F}(x,y,z)$



Ejercicio 213.
Sea el campo vectorial:

$$\vec{F}(x,y)=y\vec{\imath}-x\vec{\jmath}$$

Describa $\vec{F}$ trazando algunos de los vectores de $\vec{F}$.
Solución
Se halla el $D_{\vec{F}}$:

$$D_{\vec{F}}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

En la Tabla 4.1 se muestran algunos puntos del $D_{\vec{F}}$ y los valores de salida (vectores) de $\vec{F}$.

Tabla 4.1

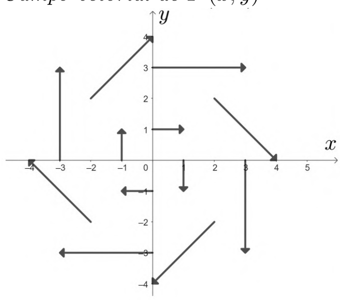
Vectores $\vec{F}(x,y)$ asociados a puntos (x,y)

(x,y)	$\vec{F}(x,y)$	(x,y)	$\vec{F}(x,y)$	(x,y)	$\vec{F}(x,y)$
$(1,0)$	$\langle 0,-1\rangle$	$(-1,0)$	$\langle 0,1\rangle$	$(2,2)$	$\langle 2,-2\rangle$
$(3,0)$	$\langle 0,-3\rangle$	$(-3,0)$	$\langle 0,3\rangle$	$(-2,2)$	$\langle 2,2\rangle$
$(0,1)$	$\langle 1,0\rangle$	$(-1,0)$	$\langle -1,0\rangle$	$(-2,-2)$	$\langle -2,2\rangle$
$(0,3)$	$\langle 3,0\rangle$	$(0,-3)$	$\langle -3,0\rangle$	$(2,-2)$	$\langle -2,-2\rangle$

Representando algunos vectores que son parte del campo vectorial $\vec{F}$ en la Figura 4.3:

Figura 4.3

Campo vetorial de $\vec{F}(x,y)$



Ejercicio 214.
Sea el campo vectorial:

$$\vec{F}(x,y,z) = y\vec{k}$$

Describa $\vec{F}$ trazando algunos de los vectores de $\vec{F}$.
Solución
Se halla el $D_{\vec{F}}$:

$$D_{\vec{F}} = \left\{(x,y,z) \in \left(R^3\right\}.\right.$$

En la Tabla 4.2 se muestran puntos que son parte del $D_{\vec{F}}$, así como los valores de salida (vectores) de $\vec{F}$.

Tabla 4.2

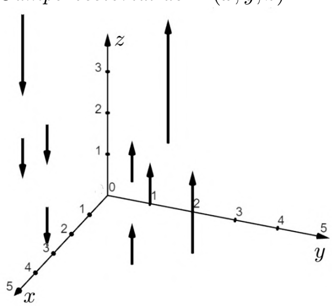
Vectores $\vec{F}(x,y,z)$ asociados a puntos (x,y,z)

(x,y,z)	$\vec{F}(x,y,z)$	(x,y,z)	$\vec{F}(x,y,z)$	(x,y,z)	$\vec{F}(x,y,z)$
$(0,1,0)$	$\vec{k}$	$(-1,1,1)$	$\vec{k}$	$(0,2,-1)$	$2\vec{k}$
$(0,-1,0)$	$-\vec{k}$	$(1,-1,1)$	$-\vec{k}$	$(0,-1,2)$	$-\vec{k}$
$(1,1,1)$	$\vec{k}$	$(1,1,-1)$	$\vec{k}$	$(0,-2,3)$	$-2\vec{k}$

Representando una pequeña parte del campo vectorial $\vec{F}$ en la Figura 4.4:

Figura 4.4

Campo vectorial de $\vec{F}(x,y,z)$



Ejercicio 215.
Haciendo uso de un software matemático, muestre en una figura los vectores que tienen su punto inicial en $(x, y, z) \in D_{\vec{F}}$ del campo vectorial siguiente:

$$\vec{F}(x, y, z) = e^{xz}\ \vec{\imath} + \operatorname{arc\,tg}\sqrt{y}\ \vec{\jmath} + x^2\vec{k}$$

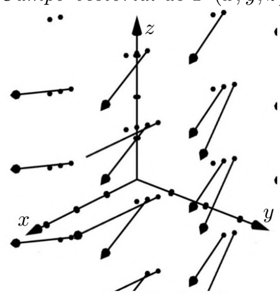
Solución
Determinando el dominio, de $\vec{F}$:

$$D_{\vec{F}} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ /\ y \geq 0\right\}$$

Utilizando el software Geogebra la representación de una parte del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z)$ está dada en la Figura 4.5:

Figura 4.5

Campo vectorial de $\vec{F}(x, y, z)$



4.2. Gradiente, divergencia, rotacional.

✓ **Gradiente**
Sea $f(x, y)$ una función escalar, el gradiente de f está dado por:

$$grad\ f(x, y) = \nabla f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\vec{\jmath} \tag{4.1}$$

De la misma manera, sí $f(x, y, z)$ es una función escalar, el gradiente de f está dado por:

$$grad\ f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}\vec{k} \tag{4.2}$$

∇f es un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente, denominado campo vectorial gradiente.
Un campo vectorial $\vec{F}$ es conservativo si éste es el gradiente de alguna función escalar f, es decir si $\vec{F} = \nabla f$, denominándose en este caso a f función potencial para $\vec{F}$ (Stewart, 2012).

✓ **Divergencia**
Sea ∇ el operador vectorial diferencial nabla dado por:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \tag{4.3}$$

Y sea $\vec{F} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$ un campo vectorial, entonces la divergencia de $\vec{F}$ está dada por:

$$div\ \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \tag{4.4}$$

Donde P, Q, R tienen derivadas parciales continuas en una región.
Si $\vec{F}$ es el campo de velocidades de un fluido, la $div\ \vec{F}$ da información sobre el flujo o desplazamiento de la masa (Palacios, 2017):
a) Si $div\ \vec{F} > 0$, en un punto P, la masa fluye del punto. P es una fuente.
b) Si $div\ \vec{F} < 0$ en un punto P, la masa fluye al punto. P es un sumidero.
c) Si $div\ \vec{F} = 0$ es un fluido incompresible.
Es importante mencionar que la divergencia de un campo vectorial es un escalar.

✓ **Rotacional**
Sea ∇ el operador vectorial diferencial nabla dado por:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Y sea $\vec{F} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$ un campo vectorial, entonces el rotacional de $\vec{F}$ esta dado por:

$$rot\ \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \tag{4.5}$$

Donde P, Q, R tienen derivadas parciales continuas en una región.
El rotacional muestra la tendencia de un campo a inducir rotación alrededor de un punto.
Si $\vec{F}$ representa el campo de velocidades de un flujo de un fluido (Stewart, 2012):
a) Si $rot\ \vec{F} = \overrightarrow{0}$ en un punto P, el fluido es libre de rotaciones en P y $\vec{F}$ se denomina irrotacional en P. ($\vec{F}$ es un campo conservativo).
b) Si $rot\ \vec{F} \neq \overrightarrow{0}$ en un punto P, las partículas cercanas a P en el fluido tienden a girar alrededor del eje que señala el rotacional $\overrightarrow{F}$.
Hay que notar que el $rot\ \vec{F}$ es un vector.

Ejercicio 216.
Sea la función:

$$f(x, y) = \ln\left(\frac{z^2}{x^2 + y^2}\right)$$

Hallar un campo vectorial $\vec{F}(x, y, z)$ que sea conservativo.
Solución
Para que $\vec{F}$ sea un campo conservativo se debe cumplir que $\vec{F} = grad\ f$.
Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\vec{F}(x, y, z) &= grad\ f(x, y, z) \\
\vec{F}(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \\
\vec{F}(x, y, z) &= \frac{x^2 + y^2}{z^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z^2}{x^2 + y^2}\right)\vec{\imath} + \frac{x^2 + y^2}{z^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z^2}{x^2 + y^2}\right)\vec{\jmath} + \frac{x^2 + y^2}{z^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z^2}{x^2 + y^2}\right)\vec{k} \\
\vec{F}(x, y, z) &= \frac{x^2 + y^2}{z^2}\frac{-2xz^2}{(x^2 + y^2)^2}\vec{\imath} + \frac{x^2 + y^2}{z^2} \cdot \frac{-2yz^2}{(x^2 + y^2)^2}\vec{\jmath} + \frac{x^2 + y^2}{z^2} \cdot \frac{2z}{x^2y^2}\vec{k} \\
\vec{F}(x, y, z) &= -\frac{2x}{x^2 + y^2}\vec{\imath} - \frac{2y}{x^2 + y^2}\vec{\jmath} + \frac{2}{z}\vec{k}
\end{aligned}$$

Ejercicio 217.
Sea $\vec{V}$ el campo de velocidades de un fluido:

$$\vec{V}(x, y, z) = \langle y - x,\ y,\ x - 2z\rangle$$

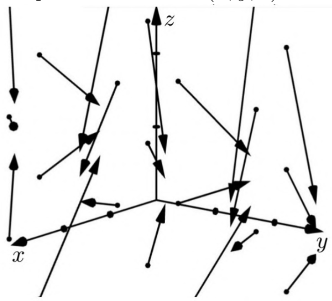
Hallar $div\ \vec{V}$.
Solución

$$\begin{aligned}
div\ \vec{V} &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \\
div\ \vec{V} &= -1 + 1 - 2 \\
div\ \vec{V} &= -2
\end{aligned}$$

Como la $div\ \vec{V}$ es negativa, entonces el fluido se está comprimiendo $\forall (x, y, z) \in D_{\vec{V}}$.
Representando el campo vectorial $\vec{V}$ en la Figura 4.6:

Figura 4.6

Campo vectorial de $\vec{V}\,(x, y, z)$



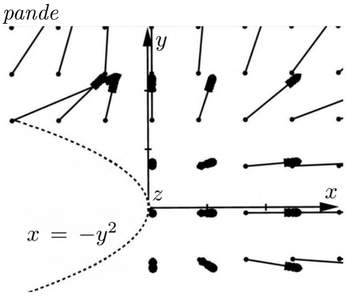
Ejercicio 218.
¿Para qué puntos (x, y) del campo vectorial $\vec{V}(x, y) = \frac{1}{2}x^2\vec{\imath} + \frac{1}{3}y^3\vec{\jmath}$ el fluido se ésta expandiendo?
Solución
El fluido se estará expandiendo para todos los $(x.y)$ tales que $div\ \vec{V} > 0$.

$$div\ \vec{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$
$$div\ \vec{V} = x + y^2 > 0$$

Representando la ecuación $x = -y^2$ y los puntos (x, y) donde el fluido se está expandiendo en la Figura 4.7:

Figura 4.7

Puntos (x, y) donde el fluido se expande



Por lo tanto el fluido se está expandiendo $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2\ /\ x + y^2 > 0$.

Ejercicio 219.
Sea $\vec{F}$ el flujo de un fluido dado por:

$$\vec{F}\,(x, y) = -2y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}$$

Hallar el $rot\ \vec{F}$.
Solución

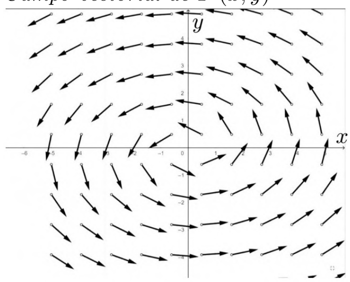
$$rot\ \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -2y & x & 0 \end{vmatrix}$$

$$rot\ \vec{F} = \left(\frac{\partial(0)}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial(-2y)}{\partial x} - \frac{\partial(0)}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial(x)}{\partial x} - \frac{\partial(-2y)}{\partial y}\right)\vec{k}$$
$$rot\ \vec{F} = 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 3\vec{k}$$

En este caso el rotacional es constante independientemente de su posición. La cantidad de rotación es el mismo en todo punto del espacio.
Representando el campo vectorial en la Figura 4.8:

Figura 4.8

Campo vectorial de $\vec{F}\,(x, y)$



Ejercicio 220.
Sea $\vec{F}$ el flujo de un fluido dado por:

$$\vec{F}\,(x, y, z) = \langle e^x, 2y, -3z\rangle$$

Es $\vec{F}$ irrotacional?
Solución
Para que $\vec{F}$ sea irrotacional, se debe cumplin que $rot\ \vec{F} = \overrightarrow{0}$.

$$rot\ \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x & 2y & -3z \end{vmatrix}$$

$$rot\ \vec{F} = \left(\frac{\partial(-3z)}{\partial y} - \frac{\partial(2y)}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial\,(e^x)}{\partial z} - \frac{\partial(-3z)}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial(2y)}{\partial x} - \frac{\partial\,(e^x)}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$rot\ \vec{F} = 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k}$$

Por lo tanto si es irrotacional.

4.3. Integrales de línea, de 1^{era} especie.

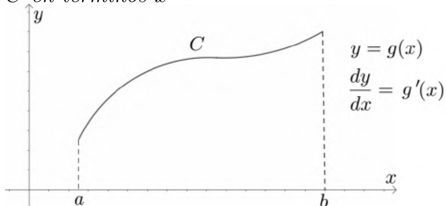
Las integrales de línea o llamadas también curvilíneas son integrales simples de campos escalares sobre curvas C en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ (Stewart, 2012).
Sea: $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$C : [a; b] \to \mathbb{R}^2$
$z = f(x; y)$
$C :\ y = g(x)$
Donde $f\,(x, y)$ es continua $\forall(x, y) \in y = g(x)$.
Esta integral de línea tiene la forma:

$$\int_C f\,(x, y)\,ds$$

Donde $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$
Se presentan tres casos:
1. Integral en términos de x (Figura 4.9):

Figura 4.9

C en términos x



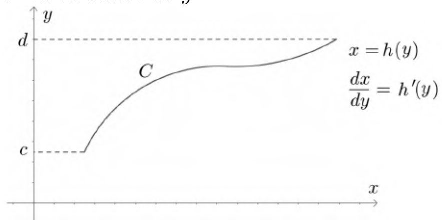
$$a \le x \le b$$

$$\int_C f\,(x, y)\ \ ds = \int_a^b f(x, g(x))\sqrt{1 + [g'(x)]^2}\ dx \tag{4.6}$$

2. Integral en términos de y (Figura 4.10):

Figura 4.10

C en términos de y



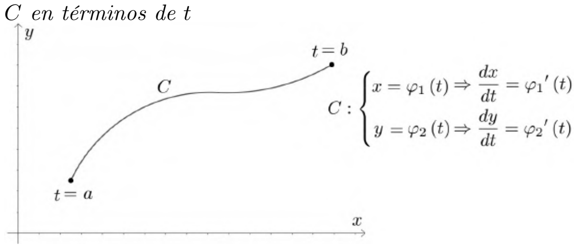
$$c \leq y \leq d$$

$$\int_C f(x,y)\ ds = \int_C^d f(h(y),y)\sqrt{1+[h'(y)]^2}\ dy \tag{4.7}$$

3. Integral en términos de t (Figura 4.11):

Figura 4.11

C en términos de t



$$a \leq t \leq b$$

$$\int_C f(x,y)\ ds = \int_a^b f(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\sqrt{[\varphi_1{}'(t)]^2+[\varphi_2{}'(t)]^2}\ dt \tag{4.8}$$

Si C es la unión de una cantidad finita de curvas suaves $C_1, C_2, \ldots, C_n$, entonces:

$$\int_C f(x,y)\ ds = \int_{C_1} f(x,y)\ ds + \int_{C_2} f(x,y)\ ds + \cdots + \int_{C_n} f(x,y)\ ds \tag{4.9}$$

Sea : $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$C :\ [a;b] \to \mathbb{R}^3$
$\mathrm{w} = f(x,y,z)$

$$C : \begin{cases} x = \varphi_1(t) \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = \varphi_1{}'(t) \\ y = \varphi_2(t) \Rightarrow \dfrac{dy}{dt} = \varphi_2{}'(t) \\ z = \varphi_3(t) \Rightarrow \dfrac{dz}{dt} = \varphi_3{}'(t) \end{cases}$$

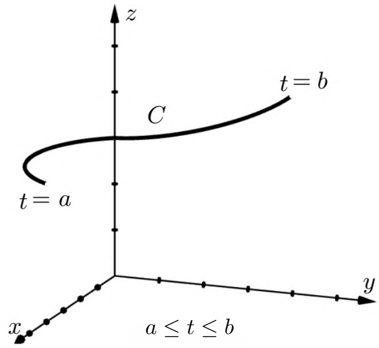
Donde $f(x,y,z)$ es continua $\forall (x,y,z) \in C$ (Figura 4.12)
Esta integral de línea tiene la forma:

$$\int_C f(x,y,z)\ ds$$

Donde $ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$

Figura 4.12

C en el espacio tridismensional



$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)) \sqrt{\varphi_1{'}(t)^2 + \varphi_2{'}(t)^2 + \varphi_3{'}(t)^2}\ dt \qquad (4.10)$$

Ejercicio 221.

Calcular la siguiente integral:

$$\int_C y\ ds$$

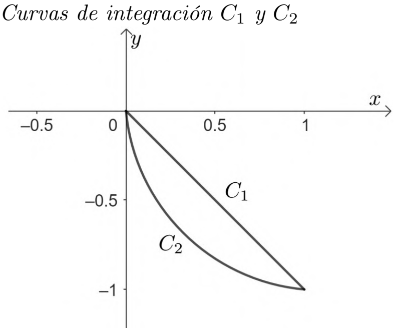
$$C : \begin{cases} y = -x \\ x = y^2 \end{cases}$$

Solución

Representando C en la Figura 4.13:

Figura 4.13

Curvas de integración C_1 y C_2



Sea $C_1 : y = -x$

$C_2 : x = y^2$

$$\int_C y\ ds = \int_{C_1} y\ ds + \int_{C_2} y\ ds$$

Calculando la integral para C_1:

$$g(x) = y = -x$$

$$g'(x) = -1$$

$$ds = \sqrt{1 + [g'(x)]^2}\ dx = \sqrt{1 + (-1)^2}\ dx = \sqrt{2}\ dx$$

$$0 \leq x \leq 1$$

$$\int_{C_1} y\ ds = \int_0^1 -x\sqrt{2}\ dx = -\frac{\sqrt{2}}{2}x^2 \Bigg|_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Calculando la integral para C_2:

$$h(y) = x = y^2$$
$$h'(y) = 2y$$
$$ds = \sqrt{1 + [h'(y)]^2}\ dy = \sqrt{1 + (2y)^2}\ dy = \sqrt{1 + 4y^2}\ dy$$
$$-1 \leq y \leq 0$$
$$\int_{C_2} y\ ds = \int_{-1}^{0} y\sqrt{1 + 4y^2}\ dy = \frac{1}{12}\left(1 + 4y^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{12}(1 - 5\sqrt{5})$$

Por lo tanto:

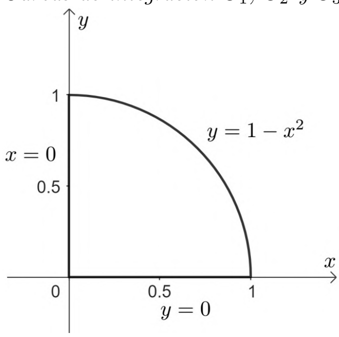
$$\int_C y\ ds = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{12}\left(1 - 5\sqrt{5}\right)$$

Ejercicio 222.
Calcular la siguiente integral:

$$\int_C (x - y)\, ds$$
$$C : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - x^2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Solución
Representando C en la Figura 4.14:

Figura 4.14
Curvas de integración C_1, C_2 y C_3



Sea $C_1 : x = 0$
$C_2 : y = 1 - x^2$
$C_3 : y = 0$
$C\ : C_1 \cup C_2 \cup C_3$

$$\int_C (x - y)\, ds = \int_{C_1} (x - y)\, ds + \int_{C_2} (x - y)\, ds + \int_{C_3} (x - y)\, ds$$

Calculando la integral para C_1, dejando en términos de y:

$$h(y) = x = 0 \qquad ; \qquad 0 \leq y \leq 1$$
$$h'(y) = 0$$
$$\int_{C_1} (x - y)\, ds = \int_{C_1} -y\sqrt{1 + [h'(y)]^2}\ dy$$
$$\int_{C_1} (x - y)\, ds = \int_0^1 -y\sqrt{1 + (0)^2}\ dy$$
$$\int_{C_1} (x - y)\, ds = -\int_0^1 y\ dy$$
$$\int_{C_1} (x - y)\, ds = -\frac{1}{2}\ y^2\Big|_0^1$$
$$\int_{C_1} (x - y)\, ds = -\frac{1}{2}$$

Calculando la integral para C_2, dejando en términos de x :

$$g(x) = y = 1 - x^2 \ ; \ 0 \leq x \leq 1$$
$$g'(x) = -2x$$
$$\int_{C_2} (x-y)\,ds = \int_{C_2} \left(x - 1 + x^2\right)\sqrt{1 + [g'(x)]^2}\ dx$$
$$\int_{C_2} (x-y)\,ds = \int_0^1 \left(x^2 + x - 1\right)\sqrt{1 + (-2x)^2}\ dx$$
$$\int_{C_2} (x-y)\,ds = \int_0^1 \left(x^2 + x - 1\right)\sqrt{1 + 4x^2}\ dx$$
$$\int_{C_2} (x-y)\,ds = \int_0^1 x^2\sqrt{1+4x^2}\ dx + \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\ dx - \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\ dx$$

Calculando la integral indefinida:

$$\int x^2\sqrt{1+4x^2}\ dx$$

$$u = x \qquad \int dv = \int x\sqrt{1+4x^2}$$
$$du = dx \qquad v = \tfrac{1}{12}\left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\int x^2\sqrt{1+4x^2}\ dx = \frac{x}{12}\left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}\int \left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}} dx$$
$$\int x^2\sqrt{1+4x^2}\ dx = \frac{x}{12}\left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}\int \left(1+4x^2\right)\sqrt{1+4x^2}\ dx$$
$$\int x^2\sqrt{1+4x^2}\ dx = \frac{x}{12}\left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}\int \sqrt{1+4x^2}\ dx - \frac{1}{12}\int 4x^2\sqrt{1+4x^2}\ dx$$
$$\frac{13}{12}\int x^2\sqrt{1+4x^2} = \frac{x}{12}\left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}\int \sqrt{1+4x^2}\ dx$$
$$\int x^2\sqrt{1+4x^2} = \frac{x}{13}\left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{13}\int \sqrt{1+4x^2}\ dx$$
$$\int_{C_2} (x-y)\,ds = \left.\frac{x}{13}\left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right|_0^1 - \frac{1}{13}\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\ dx + \left.\frac{1}{12}\left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\ dx$$
$$\int_{C_2} (x-y)\,ds = \left.\frac{x}{13}\left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right|_0^1 + \left.\frac{1}{12}\left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right|_0^1 - \frac{14}{13}\int_0^1 2\sqrt{\frac{1}{4}+x^2}\ dx$$
$$\int_{C_2} (x-y)\,ds = \left.\frac{x}{13}\left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right|_0^1 + \left.\frac{1}{12}\left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right|_0^1 - \frac{14}{3}\left.\left[x\sqrt{\frac{1}{4}+x^2} + \frac{1}{4}\ln\left(x + \sqrt{\frac{1}{4}+x^2}\right)\right]\right|_0^1$$
$$\int_{C_2} (x-y)\,ds = \left.\frac{x}{13}\left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right|_0^1 + \left.\frac{1}{12}\left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right|_0^1 - \left.\frac{7}{3}x\left(1+4x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right|_0^1 - \left.\frac{7}{6}\ln\left(x + \frac{1}{2}\sqrt{1+4x^2}\right)\right|_0^1$$
$$\int_{C_2} (x-y)\,ds = \frac{5\sqrt{5}}{13} + \frac{5\sqrt{5}}{12} - \frac{7}{3}\sqrt{5} - \frac{7}{6}\ln\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{1}{12} + \frac{7}{6}\ln\frac{1}{2}$$
$$\int_{C_2} (x-y)\,ds = -\frac{239}{156}\sqrt{5} + \frac{7}{6}\ln\left(\frac{1}{2+\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{12}$$

Calculando la integral para C_3, escribiendo la ecuación de la recta $y = 0$ en forma paramétrica:

$$\vec{R} = \langle -1, 0\rangle$$
$$C_3 : \begin{cases} x = 1 - t \ \Rightarrow \ \varphi_1(t) = 1 - t \ ; \ \varphi_1{}'(t) = -1 \\ y = 0 \qquad \Rightarrow \ \varphi_2(t) = 0 \ ; \ \varphi_2{}'(t) = 0 \end{cases}$$
$$ds = \sqrt{\left[\varphi_1{}'(t)\right]^2 + \left[\varphi_2{}'(t)\,y^2\right.}\ dt$$
$$ds = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2}\ dt$$
$$ds = dt$$
$$0 \leq t \leq 1$$
$$\int_{C_3} (x-y)\,ds = \int_0^1 (1-t)\,dt = \left.\left(t - \frac{1}{2}t^2\right)\right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto:

$$\int_C (x-y)\,ds = -\frac{1}{2} - \frac{239}{156}\sqrt{5} + \frac{7}{6}\ln\left(\frac{1}{2+\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{12} + \frac{1}{2}$$
$$\int_C (x-y)\,ds = \frac{7}{6}\ln\left(\frac{1}{2+\sqrt{5}}\right) - \frac{239}{156}\sqrt{5} - \frac{1}{12}$$

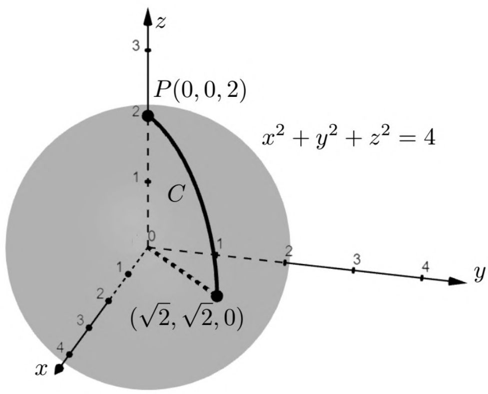
Ejercicio 223.
Calcular la siguiente integral:

$$\int_C x\,\sqrt{2y^2+z^2}\,ds$$

$$C: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ y=x \\ 1^{er} \text{ Octante.} \end{cases}$$

Solución
Representando C en la Figura 4.15:

Figura 4.15
Curva de integración C



Parametrizando la curva C:

$$C: \begin{cases} x=t & \Rightarrow \varphi_1{}'(t)=1 \\ y=t & \Rightarrow \varphi_2{}'(t)=1 \\ z=\sqrt{4-2t^2} & \Rightarrow \varphi_3{}'(t)=\frac{-2t}{\sqrt{4-2t^2}} \end{cases}$$

$$ds = \sqrt{\varphi_1{}'^2(t)+\varphi_2{}'^2(t)+\varphi_3{}'^2(t)}\;dt$$
$$ds = \sqrt{1^2+1^2+\left(\frac{-2t}{\sqrt{4-2t^2}}\right)^2}\;dt$$
$$ds = \sqrt{2+\frac{4t^2}{4-2t^2}}\;dt$$
$$ds = \sqrt{\frac{8-4t^2+4t^2}{4-2t^2}}\;dt$$
$$ds = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2-t^2}}\;dt$$
$$ds = \frac{2}{\sqrt{2-t^2}}\;dt$$

$P(0,0,2)$:
$$\begin{cases} 0=t \\ 0=t \\ 2=\sqrt{4-2t^2} \end{cases} \Rightarrow t=0$$

$P(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$:
$$\begin{cases} \sqrt{2}=t \\ \sqrt{2}=t \\ 0=\sqrt{4-2t^2} \end{cases} \Rightarrow t=\sqrt{2}$$

$$0 \le t \le \sqrt{2}$$

Por lo tanto:

$$\int_C x\,\sqrt{2y^2+z^2}\,ds = \int_0^{\sqrt{2}} t\,\sqrt{2t^2+4-2t^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2-t^2}}\,dt$$

$$\int_C x\,\sqrt{2y^2+z^2}\,ds = \int_0^{\sqrt{2}} t\cdot 2\cdot\frac{2}{\sqrt{2-t^2}}\,dt$$

$$\int_C x\,\sqrt{2y^2+z^2}\,ds = 4\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\,dt$$

$$\int_C x\,\sqrt{2y^2+z^2}\,ds = -\,2\frac{\left(2-t^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_0^{\sqrt{2}}$$

$$\int_C x\,\sqrt{2y^2+z^2}\,ds = -4\left(2-t^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}$$

$$\int_C x\,\sqrt{2y^2+z^2}\,ds = -4\left(0-2^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\int_C x\,\sqrt{2y^2+z^2}\,ds = 4\sqrt{2}$$

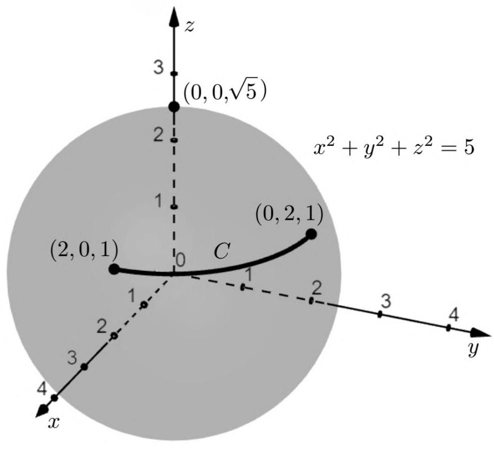
Ejercicio 224.
Calcular la siguiente integral:

$$\int_C \left(x^2+y^2+z^2\right)ds$$

$$C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=5 \\ z=1 \end{cases}$$

Que une los puntos $(2,0,1)$ y $(0,2,1)$ (la distancia más corta).
Solución
Representando la curva C en la Figura 4.16:

Figura 4.16
Curva de integración C



Para parametrizar más fácilmente, hay que hallar las ecuaciones de dos superficies más simples cuya intersección es la misma curva C.

$$\text{Si } z=1 \;\Rightarrow\; x^2+y^2+(1)^2=5$$
$$x^2+y^2=4$$

$$C:\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=1 \end{cases}$$

Parametrizando C :

$$C:\begin{cases} x=2\cos t \Rightarrow {\varphi_1}'(t)=-2\sin t\\ y=2\sin t \Rightarrow {\varphi_2}'(t)=2\cos t\\ z=1 \qquad\;\; \Rightarrow {\varphi_3}'(t)=0\end{cases}$$

$$ds=\sqrt{{\varphi_1}'^2(t)+{\varphi_2}'^2(t)+{\varphi_3}'^2(t)}\ dt$$

$$ds=\sqrt{(-2\sin t)^2+(2\cot t)^2+(0)^2}\ dt$$

$$ds=2\ dt$$

Para hallar los límites de integración:

$P(2,0,1)$:

$$\begin{cases} 2=2\cos t\\ 0=2\sin t\\ 1=1\end{cases} \Rightarrow t=0$$

$P(0,2,1)$:

$$\begin{cases} 0=2\cos t\\ 2=2\sin t\\ 1=1\end{cases} \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$$

$$0\leq t\leq \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto:

$$\int_C \left(x^2+y^2+z^2\right) ds=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4\cos^2 t+4\sin^2 t+1\right) 2\ dt$$

$$\int_C \left(x^2+y^2+z^2\right) ds=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 10\ dt$$

$$\int_C^1 \left(x^2+y^2+z^2\right) ds=10\ t\,\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_C \left(x^2+y^2+z^2\right) ds=5\pi$$

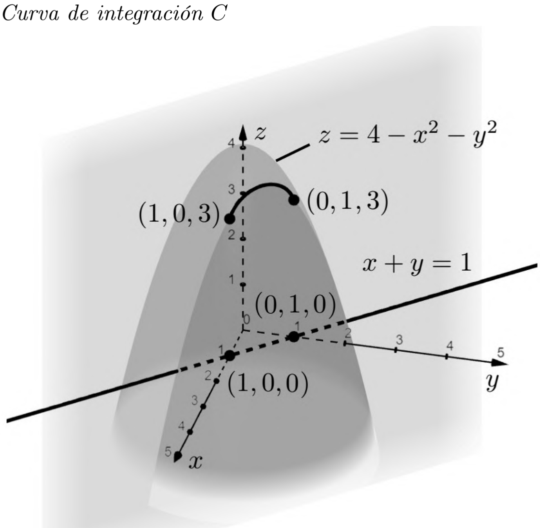
Ejercicio 225.
Calcular la siguiente integral:

$$\int_C \frac{xye^{x+y}}{\sqrt{15-4z}}\ ds$$

$$C:\begin{cases} z=4-x^2-y^2\\ x+y=1\\ 1^{er}\text{ Octante}\end{cases}$$

Solución
Representando la curva C en la Figura 4.17:

Figura 4.17
Curva de integración C



Parametrizando la curva C:

$$C: \begin{cases} x = t & \Rightarrow \varphi_1{}'(t) = 1 \\ y = 1 - t & \Rightarrow \varphi_2'(t) = -1 \\ z = 3 + 2t - 2t^2 & \Rightarrow \varphi_3'(t) = 2 - 4t \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
ds &= \sqrt{\varphi_1{}'^2(t) + \varphi_2{}'^2(t) + \varphi_3{}'^2(t)}\ dt \\
ds &= \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (2-4t)^2}\ dt \\
ds &= \sqrt{2 + 4 - 16t + 16t^2}\ dt \\
ds &= \sqrt{6 - 16t + 16t^2}\ dt \\
ds &= \sqrt{2}\ \sqrt{3 - 8t + 8t^2}\ dt
\end{aligned}$$

Determinando los límites de integración:

$$P(0,1,3): \quad \begin{cases} 0 = t \\ 1 = 1 - t \\ 3 = 3 + 2t - 2t^2 \end{cases} \Rightarrow t = 0 \qquad\qquad P(1,0,3): \quad \begin{cases} 1 = t \\ 0 = 1 - t \\ 3 = 3 + 2t - 2t^2 \end{cases} \Rightarrow t = 1$$

$$0 \leq t \leq 1$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{xye^{x+y}}{\sqrt{15-4z}}\, ds &= \int_0^1 \frac{t\,(1-t)\,e^{t+1-t}}{\sqrt{15 - 4\,(3 + 2t - 2t^2)}} \cdot \sqrt{2}\ \sqrt{3 - 8t + 8t^2}\ dt \\
\int_C \frac{xye^{x+y}}{\sqrt{15-4z}}\, ds &= \sqrt{2} \int_0^1 \frac{\left(t - t^2\right) e}{\sqrt{15 - 12 - 8t + 8t^2}} \cdot \sqrt{3 - 8t + 8t^2}\ dt \\
\int_C \frac{xye^{x+y}}{\sqrt{15-4z}}\, ds &= \sqrt{2}e \int_0^1 \frac{\left(t - t^2\right)}{\sqrt{3 - 8t + 8t^2}} \cdot \sqrt{3 - 8t + 8t^2}\ dt \\
\int_C \frac{xye^{x+y}}{\sqrt{15-4z}}\, ds &= \sqrt{2}e \int_0^1 \left(t - t^2\right) dt \\
\int_C \frac{xye^{x+y}}{\sqrt{15-4z}}\, ds &= \sqrt{2}e \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 \\
\int_C \frac{xye^{x+y}}{\sqrt{15-4z}}\, ds &= \sqrt{2}e \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\
\int_C \frac{xye^{x+y}}{\sqrt{15-4z}}\, ds &= \frac{\sqrt{2}}{6} e
\end{aligned}$$

4.4. Aplicaciones de las integrales de línea, de 1^{era} especie.

Con las integrales de línea de campos escalares se pueden realizar aplicaciones geométricas (longitud de arco) y aplicaciones fisicas (masa, centros de masa, momentos de inercia de alambres) cuya forma es de la curva C en $\mathbb{R}^2 \circ \mathbb{R}^3$, donde la densidad varía en cada punto $(x,y) \circ (x,y,z) \in C$ (Kassir,2009).
1. Longitud de curvas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

$$L = \int_C ds \quad (\mathrm{m}). \tag{4.11}$$

2. Masa de alambres delgados.
Sea $\delta : C \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde $\delta(x,y)$ es la densidad lineal distribuida en forma continua en C en kg/m:

$$M = \int_C \delta(x,y)\, ds \quad (\mathrm{kg}). \tag{4.12}$$

Sea $\delta : C \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, donde $\delta(x,y,z)$ es la densidad lineal distribuida en forma continua en C en kg/m:

$$M = \int_C \delta(x, y, z)\, ds \quad (\text{kg}). \tag{4.13}$$

3. Centros de masa de alambres delgados
Sea $\delta : C \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
El centro de gravedad está dado por:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} \quad (\text{m}). \tag{4.14}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} \quad (\text{m}). \tag{4.15}$$

Donde M_x, M_y son los momentos de masa dados por:

$$M_y = \int_C x\ \delta(x, y)\, ds \quad (\text{kg} - \text{m}). \tag{4.16}$$

$$M_x = \int_C y\ \delta(x, y)\, ds \quad (\text{kg} - \text{m}). \tag{4.17}$$

Sea $\delta : C \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
El centro de gravedad está dado por:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} \quad (\text{m}). \tag{4.18}$$

$$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} \quad (\text{m}). \tag{4.19}$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} \quad (\text{m}). \tag{4.20}$$

Donde M_{yz}, M_{xz}, M_{xy} son los momentos de masa respecto a los planos coordenados yz, xz e xy respectivamente, dados por:

$$M_{yz} = \int_C x\ \delta(x, y, z)\, ds \quad (\text{kg} - \text{m}). \tag{4.21}$$

$$M_{xz} = \int_C y\ \delta(x, y, z)\, ds \quad (\text{kg} - \text{m}). \tag{4.22}$$

$$M_{xy} = \int_C z\ \delta(x, y, z)\, ds \quad (\text{kg} - \text{m}). \tag{4.23}$$

4. Momentos de inercia de alambres delgados.
Sea $\quad \delta : C \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
Respecto a los ejes coordenados:

$$I_x = \int_C y^2\ \delta(x, y)\, ds \quad \left(\text{kg} - \text{m}^2\right). \tag{4.24}$$

$$I_y = \int_C x^2\ \delta(x, y)\, ds \quad \left(\text{kg} - \text{m}^2\right). \tag{4.25}$$

Respecto al polo:

$$I_0 = \int_C \left(x^2 + y^2\right) \delta(x, y)\, ds = I_x + I_y \quad \left(\text{kg} - \text{m}^2\right) \tag{4.26}$$

Sea $\quad \delta : C \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
Respecto a los ejes coordenados:

$$I_x = \int_C \left(y^2 + z^2\right) \delta(x, y, z)\, ds \qquad \left(\text{kg} - \text{m}^2\right). \tag{4.27}$$

$$I_y = \int_C \left(x^2 + z^2\right) .\delta(x, y, z)\, ds \qquad \left(\text{kg} - \text{m}^2\right). \tag{4.28}$$

$$I_z = \int_C \left(x^2 + y^2\right) .\delta(x, y, z)\, ds \qquad \left(\text{kg} - \text{m}^2\right). \tag{4.29}$$

Respecto a los planos coordenados:

$$I_{xy} = \int_C z^2\ \delta(x, y, z)\, ds \qquad \left(\text{ kg} - \text{m}^2\right). \tag{4.30}$$

$$I_{xz} = \int_C y^2\ \delta(x, y, z)\, ds \qquad \left(\text{ kg} - \text{m}^2\right). \tag{4.31}$$

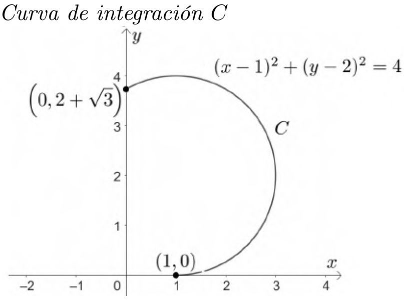
$$I_{yz} = \int_C x^2\ \delta(x, y, z)\, ds \qquad \left(\text{ kg} - \text{m}^2\right). \tag{4.32}$$

Respecto al polo:

$$I_0 = \int_C \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \delta(x, y, z)\, ds = I_{yz} + I_{xz} + I_{xy} \quad \left(\text{kg} - \text{m}^2\right). \tag{4.33}$$

Ejercicio 226.
Calcular la longitud (más larga) de un alambre delgado que tiene la forma de la curva $C : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ entre los puntos $(0, 2+\sqrt{3})$ y $(1, 0)$.
Solución
Representando la curva C en la Figura 4.18:

Figura 4.18
Curva de integración C



Ordenando la ecuación de C :

$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{2}\right)^2 = 1$$

Parametrizando C :

$$C : \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \cos t \ \Rightarrow\ x = 2\cos t + 1 \ \Rightarrow\ \varphi_1{}'(t) = -2\sin t \\ \dfrac{y-2}{2} = \sin t \ \Rightarrow\ y = 2\sin t + 2 \ \Rightarrow\ \varphi_2{}'(t) = 2\cos t \end{cases}$$

$$ds = \sqrt{\varphi_1{}'^2(t) + \varphi_2{}'^2(t)}\ dt$$
$$ds = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2}\ dt$$
$$ds = \sqrt{4\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)}\ dt$$
$$ds = 2\ dt$$

Hallando los límites de integración:

$$P\left(0, 2+\sqrt{3}\right):$$

$$\begin{cases} 0 = 2\cos t + 1 & \Rightarrow\ \cos t = -\frac{1}{2} \\ 2+\sqrt{3} = 2\sin t + 2 & \Rightarrow\ \sin t = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow\ t = \frac{2}{3}\pi$$

$$P(1, 0):$$

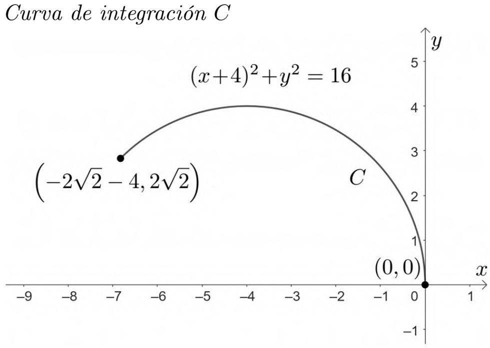
$$\begin{cases} 1 = 2\cos t + 1 & \Rightarrow\ \cos t = 0 \\ 0 = 2\sin t + 2 & \Rightarrow\ \sin t = -1 \end{cases} \Rightarrow\ t = -\frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{2}{3}\pi$$

$$L=\int_C ds$$
$$L=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} 2\ dt = 2t\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} = 2\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{7}{3}\pi \quad \text{m.}$$

Ejercicio 227.
Calcular el centro de masas de un alambre delgado que tiene la forma de la curva $C:(x+4)^2+y^2=16$, entre los puntos $(0,0)$ y $(-2\sqrt{2}-4,2\sqrt{2})$ (la distancia más corta), si $\delta(x,y)=|y|$ kg/m.
Solución
Representando la curva C en la Figura 4.19:

Figura 4.19
Curva de integración C



Ordenando la ecuación de C:

$$\left(\frac{x+4}{4}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2=1$$

Parametrizando C :

$$C:\begin{cases} x=4\cos t-4 & \Rightarrow \varphi_1{}'(t)=-4\sin t\\ y=4\sin t & \Rightarrow \varphi_2{}'(t)=4\cos t\end{cases}$$

$$\begin{aligned} ds&=\sqrt{\varphi_1{}'^2(t)+\varphi_2{}'^2(t)}\ dt\\ ds&=\sqrt{(-4\sin t)^2+(4\cot t)^2}\ dt\\ ds&=\sqrt{16\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)}\ dt\\ ds&=4\ dt\end{aligned}$$

Hallando los límites de integración:

$$P(0,0):$$
$$\begin{cases} 0=4\cos t-4 & \Rightarrow\ \cos t=1\\ 0=4\sin 2 & \Rightarrow\ \sin t=0\end{cases} \Rightarrow\ t=0$$
$$P\left(-2\sqrt{2}-4,2\sqrt{2}\right):$$
$$\begin{cases} -2\sqrt{2}-4=4\cos t-4 & \Rightarrow\ \cos t=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ 2\sqrt{2}=4\sin t & \Rightarrow\ \sin t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} \Rightarrow\ t=\frac{3}{4}\pi$$
$$0\le t\le \frac{3}{4}\pi$$

Ahora:

$$\delta(x,y)=|y|=y=4\sin t$$

Calculando la masa:

$$M = \int_C \delta(x,y)\,ds$$
$$M = \int_0^{\frac{3}{4}\pi} 4\sin t \ 4\ dt$$
$$M = -16\ \cos t\Big|_0^{\frac{3}{4}\pi}$$
$$M = -16\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$$
$$M = 16 + 8\sqrt{2} \quad \text{kg.}$$

Calculando los momentos de masa respecto a los ejes x e y respectivamente:

$$M_x = \int_C y\ \delta(x,y)\,ds$$
$$M_x = \int_0^{\frac{3}{4}\pi} 4\sin t \cdot 4\sin t\, 4\ dt$$
$$M_x = 64\int_0^{\frac{3}{4}\pi} \sin^2 t\ dt$$
$$M_x = 64\int_0^{\frac{3}{4}\pi} \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right) dt$$
$$M_x = 32\int_0^{\frac{3}{4}\pi} (1-\cos 2t)\,dt$$
$$M_x = 32\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{3}{4}\pi}$$
$$M_x = 32\left[\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\sin\frac{3}{2}\pi\right) - (0-0)\right]$$
$$M_x = 16 + 24\pi \quad \text{kg} - \text{m.}$$

$$M_y = \int_C x\ \delta(x,y)\,ds$$
$$M_y = \int_0^{\frac{3}{4}\pi} (4\cos t - 4)\,4\sin t\ 4\ dt$$
$$M_y = 64\int_0^{\frac{3}{4}\pi} (\sin t\cos t - \sin t)\,dt$$
$$M_y = 64\left(\frac{\sin^2 t}{2} + \cos t\right)\Big|_0^{\frac{3}{4}\pi}$$
$$M_y = 64\left[\left(\frac{1}{2}\left(\sin\frac{3}{4}\pi\right)^2 + \cos\frac{3}{4}\pi\right) - (0+1)\right]$$
$$My = 64\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$$
$$My = -48 - 32\sqrt{2} \quad \text{kg} - \text{m.}$$

Por lo tanto:

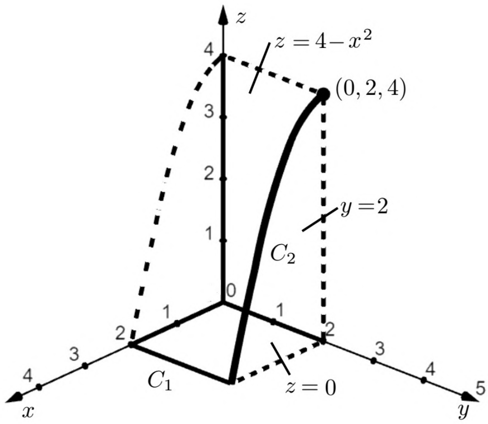
$$c.g\,(\bar{x},\bar{y})$$

$$\bar{x} = \frac{My}{M} \qquad \bar{y} = \frac{Mx}{M}$$
$$\bar{x} = \frac{-48-32\sqrt{2}}{16+8\sqrt{2}} \qquad \bar{y} = \frac{16+24\pi}{16+8\sqrt{2}}$$
$$\bar{x} = \frac{6+4\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\ \text{m.} \qquad \bar{y} = \frac{2+3\pi}{2+\sqrt{2}}\quad \text{m.}$$

$$c.g\left(\frac{6+4\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}, \frac{2+3\pi}{2+\sqrt{2}}\right)$$

Ejercicio 228.
Calcular la masa de un alambre delgado que tiene la forma de la curva C representada gráficamente en la Figura 4.20 entre los puntos $(2,0,0)$ y $(0,2,4)$, si $\delta(x,y,z) = x$ kg/m.

Figura 4.20
Ejercicio 228



Donde $C : C_1 \cup C_2$
Solución
C_1: Hallando la ecuación de la recta entre los puntos $(2,0,0)$ y $(2,2,0)$.

$$\vec{R} = \langle 0,2,0 \rangle$$

$$C_1 : \begin{cases} x = 2 & \Rightarrow \varphi_1{}'(t) = 0 \\ y = 2t & \Rightarrow \varphi_2{}'(t) = 2 \\ z = 0 & \Rightarrow \varphi_3{}'(t) = 0 \end{cases}$$

$$ds = \sqrt{\varphi_1{}'^2(t) + \varphi_2{}'^2(t) + \varphi_3{}'^2(t)}\ dt$$

$$ds = \sqrt{4}\ dt$$

$$ds = 2\ dt$$

Hallando los límites de integración:

$$P(2,0,0) : \quad \begin{cases} 2 = 2 \\ 0 = 2t & \Rightarrow t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad P(2,2,0) : \quad \begin{cases} 2 = 2 \\ 2 = 2t & \Rightarrow t = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq 1$$

$\delta(x,y,z) = x = 2$

C_2: Parametrizando $\begin{cases} y = 2 \\ z = 4 - x^2 \end{cases}$

$$C_2 : \begin{cases} x = -t & \Rightarrow \varphi_1{}'(t) = -1 \\ y = 2 & \Rightarrow \varphi_2{}'(t) = 0 \\ z = 4 - t^2 & \Rightarrow \varphi_3{}'(t) = -2t \end{cases}$$

$$ds = \sqrt{\varphi_1{}'^2(t) + \varphi_2{}'^2(t) + \varphi_3{}'^2(t)}\ dt$$

$$ds = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2 + (-2t)^2}\ dt$$

$$ds = \sqrt{1 + 4t^2}\ dt$$

Hallando los límites de integración:

$$P(2,2,0): \quad \begin{cases} 2=-t \\ 2=2 \\ 0=4-t^2 \end{cases} \Rightarrow t=-2 \qquad\qquad P(0,2,4): \quad \begin{cases} 0=-t \\ 2=2 \\ 4=4-t^2 \end{cases} \Rightarrow t=0$$

$$-2 \leq t \leq 0$$

$\delta(x,y,z) = x = -t$

Por lo tanto:

$$M = \int_C \delta(x,y,z)\, ds$$
$$M = \int_{C_1} \delta(x,y,z)\, ds + \int_{C_2} \delta(x,y,z)\, ds$$
$$M = \int_0^1 2\cdot 2\ dt + \int_{-2}^0 -t\ \sqrt{1+4t^2}\ dt$$
$$M = 4\ t\ \Big|_0^1 - \frac{1}{12}\left(1+4t^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-2}^0$$
$$M = 4 - \frac{1}{12}(1-27)$$
$$M = \frac{37}{6} \quad \text{kg.}$$

Ejercicio 229.

Calcular I_{xy} de un alambre delgado que tiene la forma de la curva C, sí $\delta(x,y,z) = \frac{\sqrt{1+4y^2}}{z}$ (kg/m).

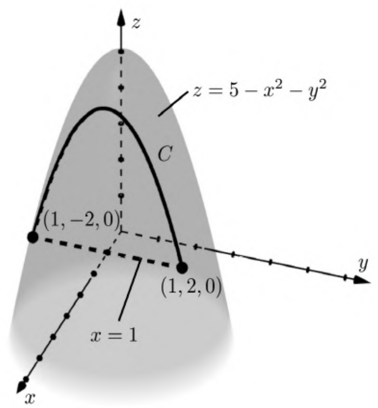
$$C: \begin{cases} z = 5 - x^2 - y^2 \\ x = 1 \\ z \geqslant 0 \end{cases}$$

Solución

Representando la curva C en la Figura 4.21:

Figura 4.21

Curva de integración C



Parametrizando C:

$$C: \begin{cases} x = 1 & \Rightarrow\ \varphi_1{}'(t) = 0 \\ y = t & \Rightarrow\ \varphi_2{}'(t) = 1 \\ z = 4 - t^2 & \Rightarrow\ \varphi_3{}'(t) = -2t \end{cases}$$

$$ds = \sqrt{\varphi_1{}'^2(t) + \varphi_2{}'^2(t) + \varphi_3{}'^2(t)}\ dt$$
$$ds = \sqrt{(0)^2 + (1)^2 + (-2t)^2}\ dt$$
$$ds = \sqrt{1+4t^2}\ dt$$

Hallando los límites de integración:

$$P(1,-2,0): \quad \begin{cases} 1 = 1 \\ -2 = t \\ 0 = 4 - t^2 \end{cases} \Rightarrow t = -2 \qquad\qquad P(1,2,0): \quad \begin{cases} 1 = 1 \\ 2 = t \\ 0 = 4 - t^2 \end{cases} \Rightarrow t = 2$$

$$-2 \leq t \leq 2$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
I_{xy} &= \int_C z^2 \delta(x,y,z)\, ds \\
I_{xy} &= \int_C z^2 \cdot \frac{\sqrt{1+4y^2}}{z}\, ds \\
I_{xy} &= \int_{-2}^{2} \left(4 - t^2\right) \sqrt{1+4t^2} \cdot \sqrt{1+4t^2}\, dt \\
I_{xy} &= \int_{-2}^{2} \left(4 - t^2\right)\left(1+4t^2\right) dt \\
I_{xy} &= \int_{-2}^{2} \left(4 + 15t^2 - 4t^4\right) dt \\
I_{xy} &= 4t + 5t^3 - \frac{4}{5}t^5 \Big|_{-2}^{2} \\
I_{xy} &= \left(4(2) + 5(2)^3 - \frac{4}{5}(2)^5\right) - \left(4(-2) + 5(-2)^3 - \frac{4}{5}(-2)^5\right) \\
I_{xy} &= \frac{224}{5} \quad \text{kg} - \text{m}^2.
\end{aligned}$$

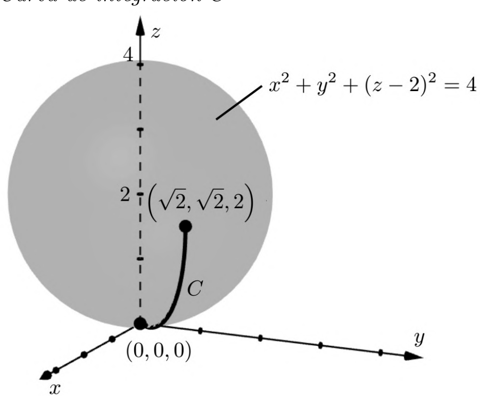
Ejercicio 230.
Calcular I_z del alambre delgado que tiene la forma de la curva C, sí $\delta(x,y,z) = \frac{y}{x^2+y^2}$ kg/m.

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0 \\ y = x \\ \text{entre los puntos } (0,0,0) \text{ y } (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2) \text{ (distancia más corta)} \end{cases}$$

Solución
Representando la curva C en la Figura 4.22:

$$x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$$

Figura 4.22
Curva de integración C



Parametrizando C :

$$C:\begin{cases} x=t & \Rightarrow\ \varphi_1{}'(t)=1 \\ y=z & \Rightarrow\ \varphi_2{}'(t)=1 \\ z=2-\sqrt{4-2t^2} & \Rightarrow\ \varphi_3{}'(t)=\frac{2t}{\sqrt{4-2t^2}} \end{cases}$$

$$ds=\sqrt{\varphi_1{}'^2(t)+\varphi_2{}'^2(t)+\varphi_3{}'^2(t)}\ dt$$

$$ds=\sqrt{(1)^2+(1)^2+\left(\frac{2t}{\sqrt{4-2t^2}}\right)^2}\ dt$$

$$ds=\sqrt{2+\frac{4t^2}{4-2t^2}}\ dt$$

$$ds=\frac{2}{\sqrt{2-t^2}}\ dt$$

Hallando los límites de integración:

$$P(0,0,0):$$

$$\begin{cases} 0=t \\ 0=t \\ 0=2-\sqrt{4-2t^2} \end{cases} \Rightarrow\ t=0$$

$$P\left(\sqrt{2},\sqrt{2},2\right):$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}=t \\ \sqrt{2}=t \\ 2=2-\sqrt{4-2t^2} \end{cases} \Rightarrow\ t=\sqrt{2}$$

$$0\leq t\leq\sqrt{2}$$

Por lo tanto:

$$I_z=\int_C\left(x^2+y^2\right)\delta(x,y,z)\,ds$$

$$I_z=\int_C\left(x^2+y^2\right)\cdot\frac{y}{(x^2+y^2)}\ ds$$

$$I_z=\int_C y\ ds$$

$$I_z=\int_0^{\sqrt{2}} t\cdot\frac{2}{\sqrt{2-t^2}}\ dt$$

$$I_z=\int_0^{\sqrt{2}} 2t\left(2-t^2\right)^{-\frac{1}{2}}\ dt$$

$$I_z=-2\left(2-t^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}$$

$$I_z=-2(0-\sqrt{2})$$

$$I_z=2\sqrt{2}\quad \mathrm{kg-m^2}.$$

4.5. Integrales de línea de 2^{da} especie.

"Sea $\vec{F}$ un campo vectorial continuo definido sobre una curva suave C dada por una función vectorial $\vec{r}(t), a\leq t\leq b$. Entonces la integral de línea de $\vec{F}$ a lo largo de C es: $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ "(Stewart, 2012, p. 1071).
Las integrales de línea de 2^{da} especie son integrales simples de campos vectoriales sobre curvas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.
Sea $\vec{F}: D\subset\mathbb{R}^2\rightarrow 1\mathbb{R}^2$
$C:[a;b]\rightarrow\mathbb{R}^2$

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\,\vec{\imath} + Q(x,y)\,\vec{\jmath}$$

$P(x,y)$, $Q(x,y)$ son funciones continuas en C.

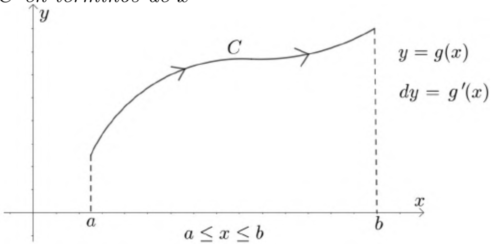
$$\int_C \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r} = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

De forma similar que para las integrales de línea de 1^{era} especie, se puede dejar a la integral en términos de x, de y y parametrizando C.

1. Integral en términos de x (Figura 4.23):

Figura 4.23

C en términos de x

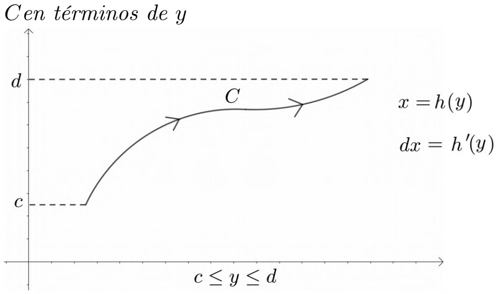


$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_a^b \left[P(x,g(x)) + Q(x,g(x))\,g'(x)\right]dx \tag{4.34}$$

2. Integral en términos de y (Figura 4.24):

Figura 4.24

C en términos de y

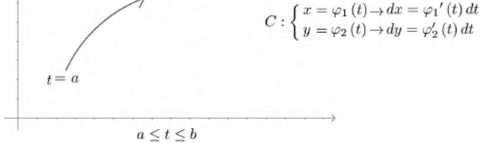


$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_c^d \left[P(h(y),y)\,h'(y) + Q(h(y),y)\right]dy \tag{4.35}$$

3. Integral en términos de t (Figura 4.25):

Figura 4.25

C en términos de t



$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_a^b \left[P(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\,\varphi_1{}'(t) + Q(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\,\varphi_2{}'(t)\right]dt \tag{4.36}$$

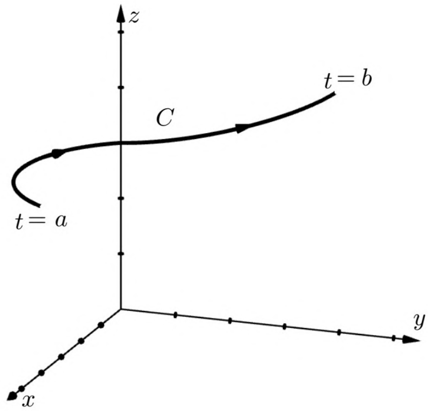
Sea $\quad \vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\qquad C : \ [a;b] \ \to \mathbb{R}^3$

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{\imath} + Q(x,y,z)\,\vec{\jmath} + R(x,y,z)\,\vec{k}$$
$$P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) \text{ son continuas en } C.$$

C está representada en la Figura 4.26.

Figura 4.26
C en el espacio tridimensional



$$C: \begin{cases} x = \varphi_1(t)\,;dx = \varphi_1{}'(t)\,dt \\ y = \varphi_2(t)\,;dy = \varphi_2'(t)\,dt \\ z = \varphi_3(t)\,;dz = \varphi_3'(t)\,dt. \end{cases}$$

$$\int_C P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$
$$\int_a^b \left[P(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t))\,\varphi_1'(t) + Q(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t))\,\varphi_2{}'(t) + R(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t))\,\varphi_3{}'(t)\right]\,dt \tag{4.37}$$

La integral de línea de 2^{da} especie cambia su signo por el contrario, al cambiar el sentido del camino de integración.

Ejercicio 231.
Calcular la siguiente integral.

$$\int_C (x-y)^2\,dx + (x+y)^2\,dy$$

$$C:\; y = 1 - |1-x| \quad ; \quad 0 \le x \le 2$$

Solución
Eliminando el valor absoluto en la curva C :

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x & ; \quad 1-x \ge 0 \\ -(1-x) & ; \quad 1-x < 0 \end{cases}$$

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x\,; & x \le 1 \\ x-1\,; & x > 1 \end{cases}$$

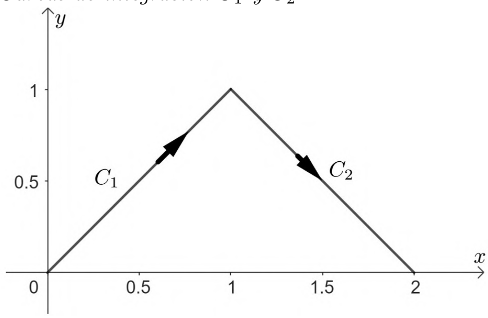
$$y = \begin{cases} 1-(1-x)\,; & 0 \le x \le 1 \\ 1-(x-1)\,; & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x \;\; ; & 0 \le x \le 1 \;\Rightarrow\; C_1 : y = x \\ 2-x\,; & 1 < x \le 2 \;\Rightarrow\; C_2 : y = 2-x \end{cases}$$

Representando C en la Figura 4.27:

Figura 4.27

Curvas de integración C_1 y C_2



$$\int_C (x-y)^2\,dx + (x+y)^2\,dy = \int_{C_1} (x-y)^2\,dx + (x+y)^2\,dy + \int_{C_2} (x-y)^2\,dx + (x+y)^2\,dy$$

Integrando sobre C_1 y dejando en términos de y:

$$\begin{aligned} C_1: \quad & y = x \\ & dy = dx \\ & 0 \leq y \leq 1 \end{aligned}$$

$$\int_{C_1} (x-y)^2\,dx + (x+y)^2\,dy = \int_0^1 (y-y)^2\,dy + (y+y)^2\,dy$$

$$\int_{C_1} (x-y)^2\,dx + (x+y)^2\,dy = \int_0^1 4y^2 dy$$

$$\int_{C_1} (x-y)^2\,dx + (x+y)^2\,dy = \frac{4}{3}\,y^3\bigg|_0^1$$

$$\int_{C_1} (x-y)^2\,dx + (x+y)^2\,dy = \frac{4}{3}$$

Integrando sobre C_2 y dejando en términos de x :

$$\begin{aligned} C_2: \quad & y = 2-x \\ & dy = -dx \\ & 1 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

$$\int_{C_2} (x-y)^2\,dx + (x+y)^2\,dy = \int_1^2 (x-2+x)^2\,dx + (x+2-x)^2\,(-dx)$$

$$\int_{C_2} (x-y)^2\,dx + (x+y)^2\,dy = \int_1^2 \left[(2x-2)^2 - 4\right] dx$$

$$\int_{C_2} (x-y)^2\,dx + (x+y)^2\,dy = \int_1^2 \left(4x^2 - 8x + 4 - 4\right) dx$$

$$\int_{C_2} (x-y)^2\,dx + (x+y)^2\,dy = \left(\frac{4}{3}x^3 - 4x^2\right)\bigg|_1^2$$

$$\int_{C_2} (x-y)^2\,dx + (x+y)^2\,dy = \left[\left(\frac{32}{3} - 16\right) - \left(\frac{4}{3} - 4\right)\right]$$

$$\int_{C_2} (x-y)^2\,dx + (x+y)^2\,dy = -\frac{8}{3}$$

Por lo tanto:

$$\int_C (x-y)^2\,dx + (x+y)^2\,dy = \frac{4}{3} - \frac{8}{3}$$

$$\int_C (x-y)^2\,dx + (x+y)^2\,dy = -\frac{4}{3}$$

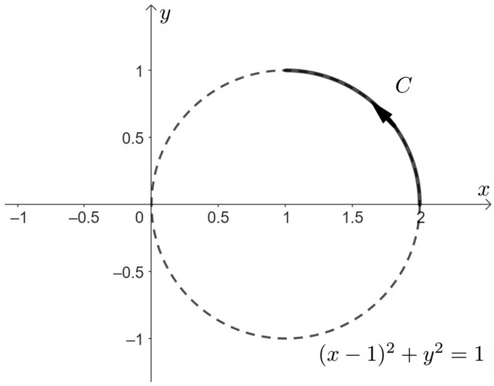
Ejercicio 232.
Calcular la siguiente integral:

$$\int_C \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r}$$

Si $\vec{F}(x,y) = \langle -y^2, x\rangle$
$C: x^2+y^2 = 2x \quad (x\geq 1\ ,\ y\geq 0),$ del punto $(2,0)$ al punto $(1,1)$.

Solución
Representando C en la Figura 4.28:

Figura 4.28
Curva de integración C



Parametrizando C :

$$C:\quad x^2-2x+1+y^2 = 1$$
$$(x-1)^2+y^2=1$$

$$C:\begin{cases} x = 1+\cos t & \Rightarrow\ dx = -\sin t\ dt \\ y=\sin t & \Rightarrow\ dy = \cos t\ dt\end{cases}$$

Hallando los límites de integración:

$$P(2,0):$$
$$\left\{\begin{array}{ll} 2 = 1+\cos t \Rightarrow \cos t = 1 \\ \theta = \sin t \quad\ \ \Rightarrow \sin t = 0\end{array}\right. \Rightarrow t = 0$$
$$P(1,1):$$
$$\left\{\begin{array}{ll} 1 = 1+\cos t \Rightarrow \cos t = 0 \\ 1 = \sin t \quad\ \ \Rightarrow \sin t = 1\end{array}\right. \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$
$$0\leq t\leq \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto:

$$\int_C \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r} = \int_C \langle -y^2, x\rangle\cdot\langle dx, dy\rangle$$
$$\int_C \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \langle -(\sin t)^2, 1+\cos t\rangle\cdot\langle -\sin t\ dt, \cos t\ dt\rangle$$
$$\int_C \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 t\ \sin t+\cos t+\cos^2 t\right) dt$$
$$\int_C \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2\left(1-\cos^2 t\right)\sin t + 2\cos t + 1 + \cos t\right] dt$$
$$\int_C \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\sin t - 2\cos^2 t\ \sin t + 2\cos t + 1+\cos 2t\right) dt$$

$$\int_C \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}\left(-2\cos t + \frac{2}{3}\cos^3 t + 2\sin t + t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$\int_C \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}\left[\left(2+\frac{\pi}{2}\right) - \left(-2+\frac{2}{3}\right)\right]$$
$$\int_C \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}\left(\frac{20}{3}+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\int_C \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r} = \frac{1}{12}(20+3\pi)$$

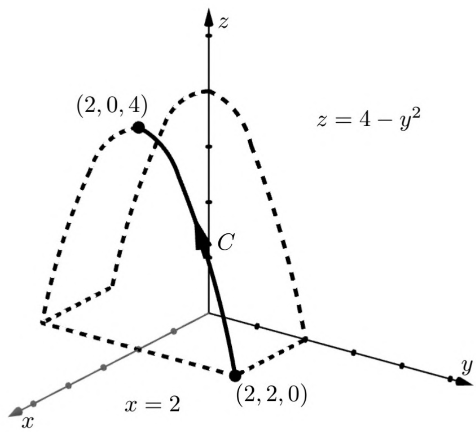
Ejercicio 233.
Calcular la siguiente integral:

$$\int_C z\ dx + x\ dy + y\ dz$$

$$C : \begin{cases} z = 4 - y^2 \\ x = 2 \end{cases} \qquad \text{del punto (2,2,0) al punto (2,0,4)}$$

Solución
Representando C en la Figura 4.29:

Figura 4.29
Curva de integración C



Parametrizando C :

$$C : \begin{cases} x = 2 & \Rightarrow\ dx = 0 \\ y = \sqrt{4-t} & \Rightarrow\ dy = -\frac{1}{2\sqrt{4-t}}\ dt \\ z = t & \Rightarrow\ dz = dt \end{cases}$$

Hallando los límites de integración:

$P(2,2,0)$:

$$\begin{cases} 2 = 2 \\ 2 = \sqrt{4-t} & \Rightarrow t = 0 \\ 0 = t \end{cases}$$

$P(2,0,4)$:

$$\begin{cases} 2 = 2 \\ 0 = \sqrt{4-t} & \Rightarrow t = 4 \\ 4 = t \end{cases}$$

$$0 \le t \le 4$$

Por lo tanto:

$$\int_C z\ dx + xy\ dy + y^2 dz = \int_0^4 \left[z(0) + 2\sqrt{4-t}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{4-t}}\right) + (4-t)\right] dt$$
$$\int_C z\ dx + xy\ dy + y^2 dz = \int_0^4 (-1+4-t)\, dt$$
$$\int_C z\ dx + xy\ dy + y^2 dz = \int_0^4 (3-t)\, dt$$

$$\int_C z\ dx + xy\ dy + y^2 dz = \left(3t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^4$$
$$\int_C z\ dx + xy\ dy + y^2 dz = 4$$

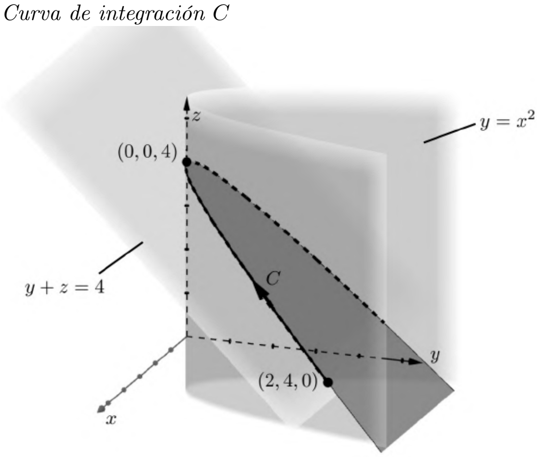
Ejercicio 234.
Calcular la siguiante integral:

$$\int_C \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F}(x,y,z) = z\vec{\imath} + \sqrt{1+x^2}\vec{\jmath} + e^y\vec{k}$$
$$C : \begin{cases} y = x^2 \\ y + z = 4 \\ x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{del punto } (2,4,0) \text{ al punto } (0,0,4).$$

Solución
Representando C en la Figura 4.30:

Figura 4.30
Curva de integración C



Parametrizando C:

$$C : \begin{cases} x = -t & \Rightarrow\ dx = -dt \\ y = t^2 & \Rightarrow\ dy = 2t\ dt \\ z = 4 - t^2 & \Rightarrow\ dz = -2t\ dt \end{cases}$$

Hallando los límites de integración:

$$P(0,0,4): \quad \begin{cases} 0 = -t \\ 0 = t^2 \\ 4 = 4 - t^2 \end{cases} \Rightarrow t = 0 \qquad\qquad P(2,4,0): \quad \begin{cases} 2 = -t \\ 4 = t^2 \\ 0 = 4 - t^2 \end{cases} \Rightarrow t = -2$$

$$-2 \leq t \leq 0$$

Por lo tanto:

$$\int_C \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{r} = \int_C \langle z, \sqrt{1+x^2}, e^y \rangle \cdot \langle dx, dy, dz \rangle$$
$$\int_C \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{r} = \int_C z\ dx + \sqrt{1+x^2}\ dy + e^y\ dz$$
$$\int_C \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{r} = \int_{-2}^{0} \left(4 - t^2\right)(-dt) + \sqrt{1+t^2}\ 2t\ dt + e^{t^2}(-2t\ dt)$$
$$\int_C \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{r} = \int_{-2}^{0} \left(t^2 - 4 + \sqrt{1+t^2}\ 2t - 2t\ e^{t^2}\right) dt$$

$$\int_C \vec{F}(x,y,z)\,, d\vec{r} = \left(\frac{t^3}{3} - 4t + \frac{2}{3}\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}} - e^{t^2}\right)\Big|_{-2}^{0}$$
$$\int_C \vec{F}(x,y,z)\,, d\vec{r} = \left(\frac{2}{3} - e^0\right) - \left(-\frac{8}{3} - 8 + \frac{10}{3}\sqrt{5} - e^4\right)$$
$$\int_C \vec{F}(x,y,z)\,, d\vec{r} = \frac{1}{3}\left(3 + 10\sqrt{5} - 3e^4\right)$$

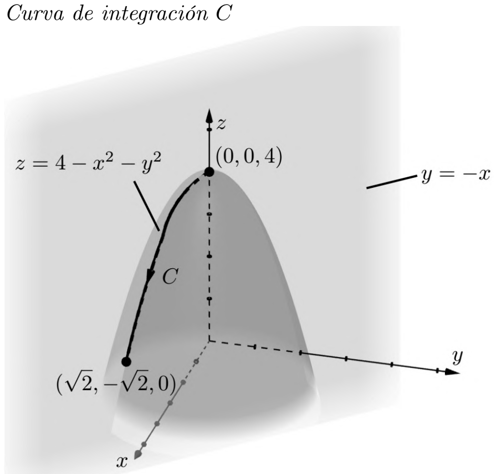
Ejercicio 235.
Calcular la siguiente integral.

$$\int_C \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F}(x,y,z) = \left\langle e^{x+y}, \frac{x+y}{z}, \frac{1}{1+x^2}\right\rangle$$
$$C: \begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ y = -x \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{del punto } (0,0,4) \text{ al punto } (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0).$$

Solución
Representando C en la Figura 4.31:

Figura 4.31
Curva de integración C



Parametrizando C :

$$C: \begin{cases} x = t & \Rightarrow\ dx = dt \\ y = -t & \Rightarrow\ dy = -dt \\ z = 4 - 2t^2 & \Rightarrow\ dz = -4t\ dt \end{cases}$$

Hallando los límites de integración:

$P(0,0,4)$:
$$\begin{cases} 0 = t \\ 0 = -t \\ 4 = 4 - 2t^2 \end{cases} \Rightarrow t = 0$$

$P\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right)$:
$$\begin{cases} \sqrt{2} = t \\ -\sqrt{2} = -t \\ 0 = 4 - 2t^2 \end{cases} \Rightarrow t = \sqrt{2}$$

$$0 \leq t \leq \sqrt{2}$$

Por lo tanto:

$$\int_C \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{r} = \int_C \left\langle e^{x+y}, \frac{x+y}{z}, \frac{1}{1+x^2}\right\rangle \cdot \langle dx, dy, dz\rangle$$
$$\int_C \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{r} = \int_C e^{x+y}dx + \left(\frac{x+y}{z}\right) dy + \frac{1}{1+x^2}\ dz$$

$$\int_C \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{r} = \int_0^{\sqrt{2}} e^{t-t}dt + \left(\frac{t-t}{4-2t^2}\right)(-dt) + \frac{1}{1+t^2}(-4t\ dt)$$
$$\int_C \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{r} = \int_0^{\sqrt{2}} \left(e^0 - \frac{4t}{1+t^2}\right)dt$$
$$\int_C \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{r} = t - 2\ln\left(1+t^2\right)\Big|_0^{\sqrt{2}}$$
$$\int_C \vec{F}(x,y,z)\cdot d\vec{r} = \sqrt{2} - 2\ln 3$$

4.6. Aplicaciones de las integrales de línea, de 2^{da} especie.

Sea $\vec{F}$ un campo de fuerzas que actúa sobre una partícula que se mueve siguiendo una trayectoria C_1, el trabajo total al recorrer C está dado por:

$$\mathrm{W} = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad (Joules) \tag{4.38}$$

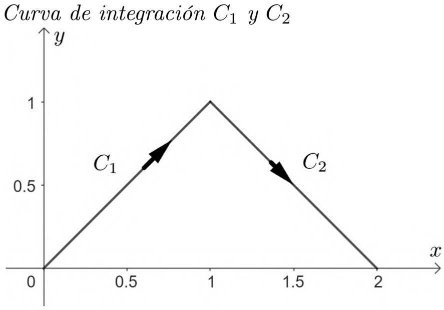
Si $\mathrm{W} > 0$, el campo ayuda a la partícula en su desplazamiento.
Si $\mathrm{W} < 0$, el campo se opone a su desplazamiento.
Si $\mathrm{W} = 0$, el campo es perpendicular a su desplazamiento
(Alcázar, 2022).
Si C es cerrada entonces:

$$\mathrm{W} = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{4.39}$$

Ejercicio 236.
Calcular el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de C: $y = 1 - |1-x|$, del punto (0,0) al punto (2,0), si el movimiento es causado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x,4) = y\vec{\imath} - x^2\vec{\jmath}$. Suponer que el arco se mide en metros y la fuerza en newtons.
Solución
Representando C en la Figura 4.32:

$$y = 1 - |1-x| = \begin{cases} 1-(1-x); & 1-x \geqslant 0 \quad (x \leq 1) \\ 1+(1-x); & 1-x < 0 \quad (x > 1) \end{cases}$$
$$y = \begin{cases} x \ ; & x \leq 1 \quad (C_1) \\ 2-x; & x > 1 \quad (C_2) \end{cases}$$

Figura 4.32
Curva de integración C_1 y C_2



$$\mathrm{W} = \int_C \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r}$$

Calculando el trabajo sobre C_1:

$$\int_{C_1} \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \left\langle y, -x^2\right\rangle \cdot \langle dx, dy\rangle$$
$$\int_{C_1} \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} y\ dx - x^2 dy$$

Dejando en términos de x:

$$C_1: \quad \begin{aligned} y &= x \\ dy &= dx \\ 0 \leq x &\leq 1 \end{aligned}$$

$$\int_{C_1} \vec{F}(x,y) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 x \; dx - x^2 dx$$

$$\int_{C_1} \vec{F}(x,y) \cdot d\vec{r} = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1$$

$$\int_{C_1} \vec{F}(x,y) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{6} \quad Joules$$

Calculando el trabajo sobre C_2:

$$C_2: \quad \begin{aligned} y &= 2 - x \\ dy &= -dx \\ 1 \leq x &\leq 2 \end{aligned}$$

$$\int_{C_2} \vec{F}(x,y) \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} y \; dx - x^2 dy$$

$$\int_{C_2} \vec{F}(x,y) \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \left(2 - x + x^2\right) dx$$

$$\int_{C_2} \vec{F}(x,y) \cdot d\vec{r} = \left(2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2$$

$$\int_{C_2} \vec{F}(x,y) \cdot d\vec{r} = \left(4 - 2 + \frac{8}{3} \right) - \left(2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)$$

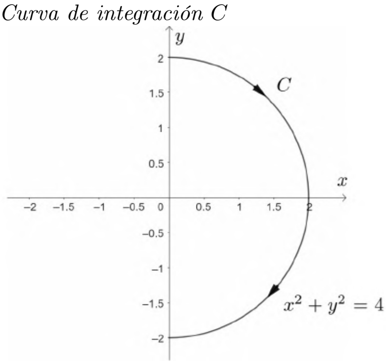
$$\int_{C_2} \vec{F}(x,y) \cdot d\vec{r} = -\frac{5}{2} \quad Joules$$

Por lo tanto:

$$\mathrm{W} = \frac{1}{6} - \frac{5}{2} = -\frac{14}{6} \quad Joules$$

Ejercicio 237.
Calcular el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de C: $x^2 + y^2 = 4$, del punto $(0,2)$ al punto $(0,-2)$ en sentido del movimiento de las manecillas del reloj, si el movimiento es causado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x,y) = xy\vec{\imath} - y^2\vec{\jmath}$. Suponer que el arco se mide en metros y la fuerza en newtons.
Solución
Representando C en la Figura 4.33:

Figura 4.33
Curva de integración C



Parametrizando C:

$$C: \begin{cases} x = 2\sin t & \Rightarrow \; dx = 2\cos t \; dt \\ y = 2\cos t & \Rightarrow \; dy = -2\sin t \; dt \end{cases}$$

Hallando los límites de integración:

$$P(0,2):$$

$$\left\{\begin{array}{lll} 0 = 2\sin t & \Rightarrow & \sin t = 0 \\ 2 = 2\cos t & \Rightarrow & \cos t = 1 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \ t = 0$$

$$P(0,-2):$$

$$\left\{\begin{array}{rll} 0 = 2\sin t & \Rightarrow & \cos t = 0 \\ -2 = 2\cos t & \Rightarrow & \cos t = -1 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \ t = \pi$$

$$0 \leq t \leq \pi$$

Calculando el trabajo:

$$\begin{aligned}
\mathrm{W} &= \int_C \vec{F}(x,y) \cdot d\vec{r} \\
\mathrm{W} &= \int_C \left\langle xy, -y^2 \right\rangle \cdot \langle dx, dy \rangle \\
\mathrm{W} &= \int_C xy\ dx - y^2 dy \\
\mathrm{W} &= \int_0^{\pi} \left(8\sin t\cos^2 t + 8\sin t\cos^2 t\right) dt \\
\mathrm{W} &= \int_0^{\pi} 16\cos^2 t\sin t\ dt \\
\mathrm{W} &= -\frac{16}{3}\cos^3\ t\ \Big|_0^{\pi} \\
\mathrm{W} &= \frac{-16}{3}\left(\cos^3\pi - \cos 0\right) \\
\mathrm{W} &= \frac{32}{3} \quad Joules
\end{aligned}$$

Ejercicio 238.
Calcular el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de C, del punto $(0,0,4)$ al punto $(4,0,0)$, si el movimiento es causado por el campo de fuerzas:

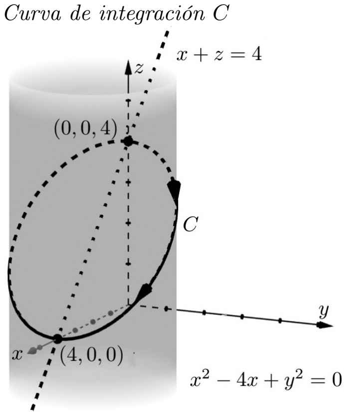
$$\vec{F}(x,y,z) = x^2\vec{\imath} + \frac{y}{2-z}\vec{\jmath} + xz\vec{k}$$

Suponer que el arco se mide en metros y la fuerza en newtons.

$$C: \left\{\begin{array}{c} x^2 - 4x + y^2 = 0 \\ x + z = 4 \\ y \geq 0 \end{array}\right.$$

Solución
Representando C en la Figura 4.34:

Figura 4.34
Curva de integración C



Parametrizando C:
$$C:\begin{cases} x=t & \Rightarrow\ dx=dt \\ y=\sqrt{4t-t^2} & \Rightarrow\ dy=\frac{2-t}{\sqrt{4t-t^2}}\ dt \\ z=4-t & \Rightarrow\ dz=-dt \end{cases}$$
Hallando los límites de integración:

$P\,(0,0,4)$:
$$\begin{cases} 0=t \\ 0=\sqrt{4t-t^2} & \Rightarrow t=0 \\ 4=4-t \end{cases}$$
$P\,(4,0,0)$:
$$\begin{cases} 4=t \\ 0=\sqrt{4t-t^2} & \Rightarrow t=4 \\ 0=4-t \end{cases}$$
$$0\leq t\leq 4$$
Por lo tanto:
$$\mathrm{W}=\int_C \vec{F}\,(x,y,z)\cdot d\vec{r}$$
$$\mathrm{W}=\int_C \left\langle x^2,\frac{y}{2-z},xz\right\rangle.\langle dx,dy,dz\rangle$$
$$\mathrm{W}=\int_C x^2dx+\frac{y}{2-z}\ dy+xz\ dz$$
$$\mathrm{W}=\int_0^4\left[\ t^2+\frac{\sqrt{4t-t^2}}{2-(4-t)}\frac{(2-t)}{\sqrt{4t-t^2}}+t(4-t)(-1)\right]dt$$
$$\mathrm{W}=\int_0^4\left(t^2+\frac{2-t}{t-2}-4t+t^2\right)dt$$
$$\mathrm{W}=\int_0^4\left(2t^2-4t-1\right)dt$$
$$\mathrm{W}=\left(\frac{2}{3}t^3-2t^2-t\right)\Big|_0^4$$
$$\mathrm{W}=\frac{128}{3}-32-4$$
$$\mathrm{W}=\frac{20}{3}\quad Joules$$

Ejercicio 239.

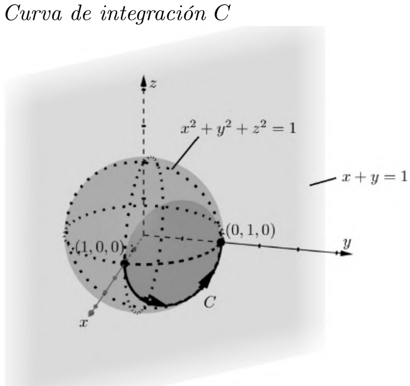
Calcular el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de C, si este se desplaza de tal manera que mirando desde el origen lo hace en sentido del movimiento de las manecillas del reloj. El movimiento es causado por el campo de fuerzas:
$$\vec{F}\,(x,y,z)=e^y\ \vec{\imath}+\frac{z^2}{y}\vec{\jmath}+xz\ \vec{k}$$
Suponer que el arco se mide en metros y la fuerza en newtons.
$$C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y=1 \\ z\leq 0 \end{cases}$$

Solución

Representando C en la Figura 4.35:

Figura 4.35

Curva de integración C



Parametrizando C:

$$C:\begin{cases} x=-t & \Rightarrow\ dx=-dt \\ y=1+t & \Rightarrow\ dy=dt \\ z=-\sqrt{-2t^2-2t} & \Rightarrow\ dz=\frac{2t+1}{\sqrt{-2t^2-2t}}\ dt \end{cases}$$

Hallando los límites de integración:

$$P\left(1,0,0\right):\qquad\qquad P\left(0,1,0\right):$$

$$\begin{cases} 1=-t \\ 0=1+t \\ 0=-\sqrt{-2t^2-2t} \end{cases} \Rightarrow t=-1 \qquad\qquad \begin{cases} 0=-t \\ 1=1+t \\ 0=-\sqrt{-2t^2-2t} \end{cases} \Rightarrow t=0$$

$$-1\leq t\leq 0$$

Por lo tanto:

$$\mathrm{W}=\int_C \vec{F}\left(x,y,z\right)\cdot d\vec{r}=\int_C\left\langle e^y,\frac{z^2}{y},xz\right\rangle\cdot\left\langle dx,dy,dz\right\rangle$$

$$\mathrm{W}=\int_C e^y dx+\frac{z^2}{y}\ dy+xz\ dz$$

$$\mathrm{W}=\int_{-1}^{0} e^{t+1}(-dt)+\frac{\left(-\sqrt{-2t^2-2t}\right)^2}{t+1}\ dt+\frac{t\ \sqrt{-2t^2-2t}}{}\ \frac{(2t+1)}{\sqrt{-2t^2-2t}}\ dt$$

$$\mathrm{W}=\int_{-1}^{0}\left(-e^{t+1}-\frac{2t\left(t+1\right)}{t+1}+\left(2t^2+t\right)\right)dt$$

$$\mathrm{W}=\int_{-1}^{0}\left(-e^{t+1}+2t^2-t\right)dt$$

$$\mathrm{W}=\left(-e^{t+1}+\frac{2}{3}\ t^3-\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0}$$

$$\mathrm{W}=-e-\left(-e^0-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)$$

$$\mathrm{W}=\frac{13}{6}-e\quad Joules$$

Ejercicio 240.

Calcular el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de C, si este se desplaza de tal manera que mirando desde el origen lo hace en sentido antihorario. El movimiento es causado por el campo de fuerzas $\vec{F}\left(x,y,z\right)=\left\langle x,xy,z\right\rangle$.

Suponer que el arco se mide en metros y la fuerza en newtons.

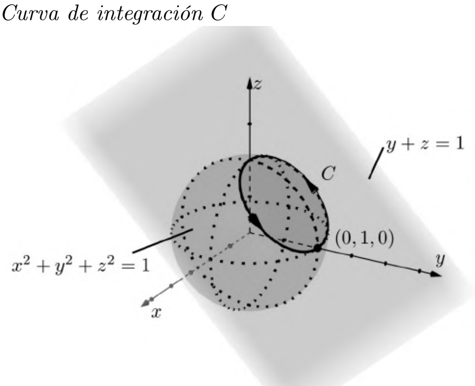
$$C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ y+z=1 \end{cases}$$

Solución

Representando C en la Figura 4.36:

Figura 4.36

Curva de integración C



Parametrizando C:
Es conveniente parametrizar usando funciones trigonométricas para evitar dualidad de signos con raices pares, porque en este caso x es positiva y negativa.

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\
y + z &= 1 \quad \Rightarrow z = 1 - y \\
x^2 + y^2 + (1-y)^2 &= 1 \\
x^2 + 2y^2 - 2y &= 0 \\
x^2 + 2\left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) &= \frac{1}{2} \\
x^2 + 2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{2} \\
\frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} &= 1 \\
\left(\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^2 + \left(\frac{y-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^2 &= 1
\end{aligned}$$

$$C: \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t & \Rightarrow dx = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\ dt \\ y = \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2} & \Rightarrow dy = \frac{1}{2}\cos t\ dt \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin t & \Rightarrow dz = \frac{1}{2}\cos t\ dt \end{cases}$$

Hallando los límites de integración:

$$P(0,1,0):$$

$$\left\{\begin{array}{ll} 0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t & \Rightarrow \ \cos t = 0 \\ 1 = \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2} & \Rightarrow \ \sin t = 1 \\ 0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin t & \Rightarrow \ \sin t = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \ t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\text{Si} \quad k = 0, \quad t = \frac{\pi}{2}$$

$$k = 1, \quad t = \frac{5}{2}\pi$$

$$\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{5}{2}\pi$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\mathrm{W} &= \oint_C \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{r} \\
\mathrm{W} &= \oint_C \langle x, xy, z \rangle \cdot \langle dx, dy, dz \rangle \\
\mathrm{W} &= \oint_c x\ dx + xy\ dz + z\ dz \\
\mathrm{W} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} \left[-\frac{1}{2}\sin t\cos t + \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos^2 t\left(\frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\cos t + \frac{1}{4}\sin t\cos t\right] dt \\
\mathrm{W} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} \left[-\frac{1}{4}\sin t\cos t + \frac{1}{4\sqrt{2}}\cos^2 t\sin t + \frac{1}{4\sqrt{2}}\cos^2 t - \frac{1}{4}\cos t\right] dt \\
\mathrm{W} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} \left[-\frac{1}{4}\sin t\cos t + \frac{1}{4\sqrt{2}}\cos^2 t\sin t + \frac{1}{8\sqrt{2}} + \frac{1}{8\sqrt{2}}\cos 2t - \frac{1}{4}\cos t\right] dt \\
\mathrm{W} &= \left(-\frac{1}{8}\sin^2 t - \frac{\cos^3 t}{12\sqrt{2}} + \frac{1}{8\sqrt{2}}\ t + \frac{1}{16\sqrt{2}}\sin^2 t - \frac{1}{4}\sin t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} \\
\mathrm{W} &= \left[\left(-\frac{1}{8} + \frac{5}{16\sqrt{2}}\pi - \frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{16\sqrt{2}}\pi - \frac{1}{4}\right)\right] \\
\mathrm{W} &= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \quad \textit{Joules}
\end{aligned}$$

4.7. Teorema de Green.

Sea D una región encerrada por la frontera C (curva) suave a trozos, orientada en sentido contrario al de las agujas de un reloj. Si P y Q tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a D, entonces:

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \tag{4.40}$$

Este teorema se puede generalizar para el caso que D sea una unión finita de regiones simples, es decir $D = D_1 \cup D_2$, donde D_1 y D_2 sean regiones simples también (Stewart, 2012).

Ejercicio 241.

Aplicando el teorema de Green, calcular la siguiente integral, donde C es la curva cerrada dada por: $y = x^2,\ y = 1,\ x = 0$ orientada en sentido antihorario.

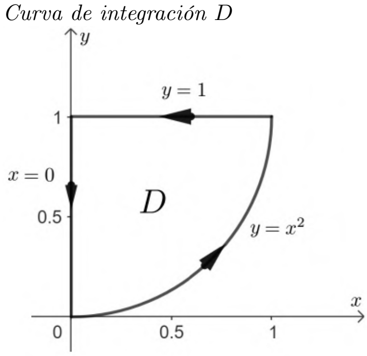
$$\oint_C \left(\operatorname{arc\,tg} e^x + y^2\right) dx + (\arcsin y - x)\, dy$$

Solución

Representando C en la Figura 4.37:

Figura 4.37

Curva de integración D



La integral de línea planteada usando el teorema de Green se la transforma en una integral doble mediante:

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Sea:

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \operatorname{arc\,tg} e^x + y^2 &\Rightarrow \tfrac{\partial P}{\partial y} &= 2y \\ Q(x,y) &= \arcsin y - x &\Rightarrow \tfrac{\partial Q}{\theta x} &= -1 \end{aligned}$$

Los límites de integración son:

$$0 \le x \le 1$$
$$x^2 \le y \le 1$$

Aplicando el teorema de Green:

$$\oint_C \left(\operatorname{arc\,tg} e^x + y^2\right) dx + (\arcsin y - x)\, dy = \int_0^1 \int_{x^2}^1 (2y+1)\, dydx$$

$$\oint_C \left(\operatorname{arc\,tg} e^x + y^2\right) dx + (\arcsin y - x)\, dy = \int_0^1 \left(y^2 + y\right)\Big|_{x^2}^1 dx$$

$$\oint_C \left(\operatorname{arc\,tg} e^x + y^2\right) dx + (\arcsin y - x)\, dy = \int_0^1 \left(2 - x^4 - x^2\right) dx$$

$$\oint_C \left(\operatorname{arc\,tg} e^x + y^2\right) dx + (\arcsin y - x)\, dy = \left(2x - \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1$$

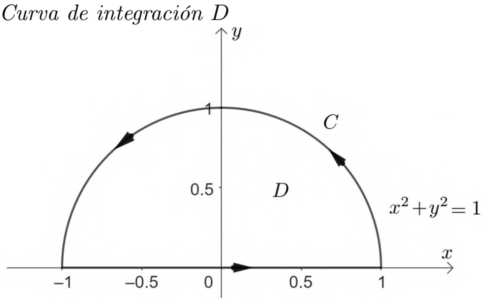
$$\oint_C \left(\operatorname{arc\,tg} e^x + y^2\right) dx + (\arcsin y - x)\, dy = \frac{22}{15}$$

Ejercicio 242.
Aplicando el teorema de Green, calcular la siguiente integral donde C es la curva $x^2+y^2=1 \quad (y \geq 0)$, orientada en sentido antihorario.

$$\oint_c \left(e^x shy - y\right) dx + e^x chy \; dy$$

Solución
Representando C en la Figura 4.38:

Figura 4.38
Curva de integración D



Sea:

$$\begin{array}{lll} P\left(x,y\right) = e^x shy - y & \Rightarrow & \frac{\partial P}{\partial y} = e^x chy - 1 \\ Q\left(x,y\right) = e^x chy & \Rightarrow & \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x chy \end{array}$$

Aplicando el teorema de Green:

$$\oint_C \left(e^x shy - y\right) dx + e^x chy \; dy = \iint\limits_D \left(e^x chy - e^x chy + 1\right) dA$$

$$\oint_C \left(e^x shy - y\right) dx + e^x chy \; dy = \iint\limits_D dA$$

Pasando a coordenades polares:

$$\begin{array}{ccc} x^2+y^2=1 & P\left(1,0\right): & P\left(-1,0\right): \\ r^2=1 & \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0 & \operatorname{tg}\theta = \frac{0}{-1} = 0 \\ r=1 & \theta = 0 & \theta = \pi \\ 0 \leq r \leq 1 & & \end{array}$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\oint_c \left(e^x shy - y\right) dx + e^x chy \; dy = \int_0^{\pi} \int_0^1 r \; dr d\theta$$

$$\oint_C \left(e^x shy - y\right) dx + e^x chy \; dy = \int_0^{\pi} \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^1 d\theta$$

$$\oint_C \left(e^x shy - y\right) dx + e^x chy \; dy = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} d\theta$$

$$\oint_C \left(e^x shy - y\right) dx + e^x chy \; dy = \frac{1}{2} \left.\theta \right|_0^{\pi}$$

$$\oint_C \left(e^x shy - y\right) dx + e^x chy \; dy = \frac{\pi}{2}$$

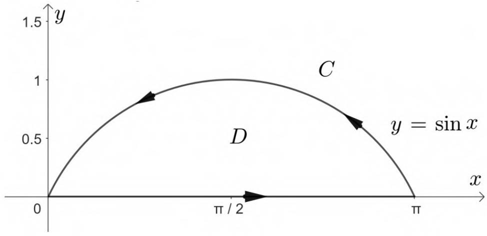
Ejercicio 243.
Aplicando el teorema de Green, calcular la siguiente integral donde C está dada por $y = \sin x, y = 0 \, (0 \leq x \leq \pi)$, orientada en sentido antihorario.

$$\oint_c \left(\sin x^2 + y^2\right) dx + \left(\arccos\sqrt{y} + x^2\right) dy$$

Solución
Representando C en la Figura 4.39:

Figura 4.39

Curva de integración D



Sea:

$$P(x,y) = \sin x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2y$$
$$Q(x,y) = \arccos\sqrt{y} + x^2 \quad \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

Aplicando el teorema de Green:

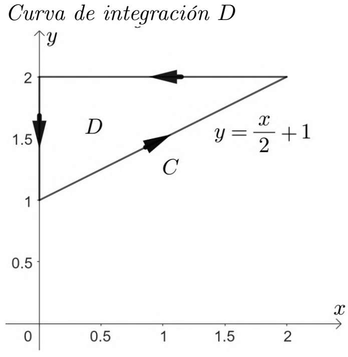
$$\oint_C \left(\sin x^2 + y^2\right) dx + \left(\arccos\sqrt{y} + x^2\right) dy = \iint_D (2y - 2x)\, dA$$
$$\oint_C \left(\sin x^2 + y^2\right) dx + \left(\arccos\sqrt{y} + x^2\right) dy = 2\int_0^{\pi}\int_0^{\sin x} (y - x)\, dydx$$
$$\oint_C \left(\sin x^2 + y^2\right) dx + \left(\arccos\sqrt{y} + x^2\right) dy = 2\int_0^{\pi} \left(\frac{y^2}{2} - xy\right)\Bigg|_0^{\sin x} dx$$
$$\oint_C \left(\sin x^2 + y^2\right) dx + \left(\arccos\sqrt{y} + x^2\right) dy = \int_0^{\pi} (\sin^2 x - 2x\sin x) dx$$
$$\oint_C \left(\sin x^2 + y^2\right) dx + \left(\arccos\sqrt{y} + x^2\right) dy = \int_0^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} - 2x\sin x\right) dx$$
$$\oint_C \left(\sin x^2 + y^2\right) dx + \left(\arccos\sqrt{y} + x^2\right) dy = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + 2x\cos x - 2\sin x\,\Bigg|_0^{\pi}$$
$$\oint_C \left(\sin x^2 + y^2\right) dx + \left(\arccos\sqrt{y} + x^2\right) dy = \frac{\pi}{2} - 2\pi$$
$$\oint_C \left(\sin x^2 + y^2\right) dx + \left(\arccos\sqrt{y} + x^2\right) dy = -\frac{3}{2}\pi$$

Ejercicio 244.
Calcular el trabajo que se necesita realizar para desplazar una partícula sujeta al campo de fuerzas. $\vec{F}(x,y) = \left\langle \ln\cos x^2 + y^2, \sqrt{x+2} - e^y \right\rangle$ sobre la curva triangular que une los puntos $(0,1), (2,2), (0,2)$ y $(0,1)$ en sentido antihorario.

Solución
Representando C en la Figura 4.40:

Figura 4.40

Curva de integración D



Sea:

$$P(x,y) = \ln\cos x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2y$$
$$Q(x,y) = \sqrt{x+2} - e^y \quad \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

Calculando el trabajo:

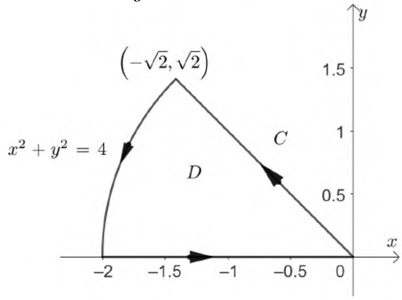
$$\mathrm{W} = \oint_c \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r}$$
$$\mathrm{W} = \oint_c \left\langle \ln\cos x^2 + y^2, \sqrt{x+2} - e^y \right\rangle \cdot \langle dx, dy\rangle$$
$$\mathrm{W} = \oint_c \left(\ln\cos x^2 + y^2\right) dx + \left(\sqrt{x+2} - e^y\right) dy$$

Aplicando el teorema de Green:

$$\mathrm{W} = \iint_D \left(\frac{1}{2\sqrt{x+2}} - 2y\right) dA$$
$$\mathrm{W} = \int_0^2 \int_{\frac{x+2}{2}}^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x+2}} - 2y\right) dydx$$
$$\mathrm{W} = \int_0^2 \left(\frac{y}{2\sqrt{x+2}} - y^2\right)\Bigg|_{\frac{x+2}{2}}^2 dx$$
$$\mathrm{W} = \int_0^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}} - 4 - \frac{\sqrt{x+2}}{4} + \frac{(x+2)^2}{4}\right) dx$$
$$\mathrm{W} = 2\sqrt{x+2} - 4x - \frac{1}{6}(x+2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{12}(x+2)^3\Bigg|_0^2$$
$$\mathrm{W} = 4 - 8 - \frac{4}{3} + \frac{16}{3} - 2\sqrt{2} + \frac{1}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}$$
$$\mathrm{W} = -\frac{1}{3}(2 + 5\sqrt{2}) \quad Joules$$

Ejercicio 245.
Utilizar el teorema de Green para calcular el trabajo total realizado al mover una vez un objeto en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj alrededor de la curva C, si el movimiento es causado por el campo de fuerza $\vec{F}(x,y) = \left\langle \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x} + y^2, xy^2 \right\rangle$. Suponer la fuerza se mide en newtons y el arco en metros.
C: Consta de la cincunferencia $x^2 + y^2 = 4$ de $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a $(-2,0)$. y los segmentos rectilíneos de $(-2,0)$ a $(0,0)$ y de $(0,0)$ a $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.
Solución
Representando C en la Figura 4.41:

Figura 4.41
Curva de integración D



Sea:

$$P(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x} + y^2 \quad \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2y$$
$$Q(x,y) = xy^2 \quad \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2$$

Calculando el trabajo:

$$\mathrm{W} = \oint_c \vec{F}(x,y) \cdot d\vec{r}$$
$$\mathrm{W} = \oint_c \left\langle \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x} + y^2, xy^2 \right\rangle \cdot \langle dx, dy \rangle$$
$$\mathrm{W} = \oint_c \left(\operatorname{arc\,tg} \sqrt{x} + y^2\right) dx + xy^2 dy$$

Aplicando el teorema de Green:

$$\mathrm{W} = \iint_D \left(y^2 - 2y\right) dA$$

Pasando a coordenadas polares:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ r^2 &= 4 \\ r &= 2 \\ 0 \leq r &\leq 2 \end{aligned}$$

$\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = 0$$
$$\theta = \frac{3}{4}\pi$$

$\left(-\sqrt{2}, 0\right)$:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0$$
$$\theta = \pi$$

$$\frac{3}{4}\pi \leq \theta \leq \pi$$

$$\mathrm{W} = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \int_0^2 \left(r^2 \sin^2\theta - 2r\sin\theta\right) r \; dr d\theta$$
$$\mathrm{W} = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \int_0^2 \left(r^3 \sin^2\theta - 2r^2\sin\theta\right) dr d\theta$$
$$\mathrm{W} = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{4} r^4 \sin^2\theta - \frac{2}{3} r^3 \sin\theta\right)\Bigg|_0^2 d\theta$$
$$\mathrm{W} = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \left(4\sin^2\theta - \frac{16}{3}\sin\theta\right) d\theta$$
$$\mathrm{W} = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \left[4\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) - \frac{16}{3}\sin\theta\right] d\theta$$
$$\mathrm{W} = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \left(2 - 2\cos 2\theta - \frac{16}{3}\sin\theta\right) d\theta$$
$$\mathrm{W} = \left(2\theta - \sin 2\theta + \frac{16}{3}\cos\theta\right)\Bigg|_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}$$
$$\mathrm{W} = \left(2\pi - \frac{16}{3}\right) - \left(\frac{3}{2}\pi + 1 - \frac{8}{3}\sqrt{2}\right)$$
$$\mathrm{W} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}(8\sqrt{2} - 19) \quad \mathit{Joules}$$

Conclusiones y Recomendaciones

Conclusiones

En el presente libro se han explorado los fundamentos y aplicaciones del cálculo vectorial a través de cuatro capítulos, que abarcan desde funciones vectoriales de una variable hasta funciones vectoriales de variable vectorial. Cada capítulo presentó el marco teórico necesario para abordar los ejercicios, además de incluir aplicaciones prácticas que demuestran la relevancia del cálculo vectorial en diversas áreas de la ingeniería y las ciencias.

En el Capítulo 1 se analizaron las funciones vectoriales de una variable, proporcionando al lector las herramientas necesarias para examinar el comportamiento de trayectorias y curvas en el espacio. La comprensión de derivadas e integrales en este contexto facilita la modelación de fenómenos dinámicos esenciales en la física y la ingeniería.

El Capítulo 2 se centró en el cálculo diferencial de funciones reales de varias variables, proporcionando un marco teórico para el análisis de superficies y la optimización de funciones. Las aplicaciones expuestas resaltan la importancia del cálculo diferencial en la resolución de problemas reales, como la maximización de recursos y el modelado de superficies complejas.

En el Capítulo 3 se profundizó en el cálculo integral de funciones reales de dos y tres variables, aplicando los conceptos para el cálculo de áreas, volúmenes, masa y momentos de inercia. Estas herramientas son fundamentales en el análisis estructural y el diseño de componentes mecánicos.

Finalmente, el Capítulo 4 abordó las funciones vectoriales de variable vectorial y las integrales de línea, herramientas esenciales para la descripción de campos vectoriales, el estudio de elementos mecánicos como los alambres delgados y el análisis del trabajo realizado por fuerzas.

Este recorrido fortalece la comprensión teórica y prepara al lector para enfrentar desafíos reales en la práctica profesional.

Recomendaciones

Para los estudiantes, se recomienda resolver los ejercicios en orden secuencial con el fin de fortalecer la comprensión progresiva de los temas. Además, es conveniente complementar el estudio con software de visualización matemática, como GeoGebra o MATLAB, para obtener una representación más intuitiva de los conceptos abordados.

Para los docentes, este libro puede emplearse como material de apoyo en cursos universitarios de ingeniería y ciencias, fomentando la discusión y el análisis crítico. Se sugiere utilizar las aplicaciones prácticas presentadas como base para proyectos integradores que evidencien la relevancia del cálculo vectorial en contextos reales

Para los profesionales, este libro puede servir como referencia para resolver problemas específicos en ingeniería mecánica y otros campos afines. Asimismo, los conceptos abordados pueden aplicarse en la simulación y modelado de sistemas físicos complejos, integrando las herramientas presentadas en proyectos de ingeniería avanzada

Finalmente, se recomienda la exploración de textos avanzados en cálculo vectorial y la participación en cursos en línea, seminarios o grupos de estudio como estrategias para continuar con el aprendizaje y la profundización en la materia.

Bibliografía

Alcázar Arribas, J. G. (2022). *Cálculo en varias variables reales: (1 ed.).* Editorial Universidad de Alcalá. eLibro.

Aranda, E. (2004). *Problemas de cálculo vectorial.* Septem Ediciones. eLibro

Bruzual, R. and Domínguez, M. (2016). *Cálculo diferencial en varias variables* . Universidad Central de Venezuela. eLibro.

Edwards, B. and Larson, R. (2017). *Matemáticas III: cálculo de varias variables* . Cengage Learning. eLibro.

García Hernández, A. E. (2015). *Cálculo de varias variables.* Grupo Editorial Patria, México D.F. eLibro.

López García, J. L. and Pagola Martínez, P. J. (2017). *Cálculo en varias variables y ecuaciones ecuaciones diferenciales: una aproximación intuitiva*. (2da ed.). Universidad Pública de Navarra. eLibro.

Martín Ordoñez ,P., García Garrosa, A. ,and Getino Fernández, J. (2014). *Cálculo para ingenieros. Vol. 2: Funciones de varias variables* . Delta Publicaciones. eLibro.

Palacios Pineda, L. M. (2017). *Cálculo de varias variables.* Grupo Editorial Patria. eLibro.

Quiroga Ramiro, A. (2008). *Introducción al cálculo II.* Delta Publicaciones. eLibro.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas* (7ma ed.). Cengage Learning. elibro.

ISBN: 978-9942-679-33-8
9789942679338