Elementos Básicos de Geometría Analítica para ECONOMÍA

ISBN: 978-9942-759-13-9

SALAZAR, JOEL
WASHBURN, CHRISTIAN

Universidad de Guayaquil

Facultad de Ciencias Económicas

Centro de Investigación y Desarrollo Ecuador

Centro de Estudios Transdiciplinarios Bolivia

Elementos básicos de Geometría Analítica para Economía

Salazar Joel

Washburn Christian

La presente obra fue evaluada por pares académicos

Msc. Yelitza Acevedo de Roa
Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Instituto Pedagógico Rural "Gervasio Rubio"

Msc. Célida Barrios
Universidad Católica Andrés Bello

ISBN: 978-9942-759-13-9
Edición con fines académicos no lucrativos.
Impreso y hecho en Ecuador
Diseño y Tipografía: Lic. Pedro Naranjo Bajaña

CIDE EDITORIAL Cod. 9942-8632

Centro de Investigación y Desarrollo Ecuador
Cdla. Martina Mz. 1 V. 4 - Guayaquil, Ecuador
Tel.: 00593 4 2037524
http. :/www.cidecuador.com

Índice

Introducción

La geometría es una de las ciencias más antiguas que existen, es parte de la matemática y se encarga de estudiar las propiedades y las medidas de una figura en un plano o en un espacio.

Se encarga de estudiar las figuras a partir de un sistema de coordenadas y de las metodologías propias del análisis matemático y del álgebra. Nuestro objetivo es refrescar conceptos que son fundamentales en la Geometría Analítica Plana, porque constituyen la base del estudio de la Geometría Analítica.

Los dos problemas que la geometría analítica intenta dar respuesta son: dado el lugar geométrico en un sistema de coordenadas, obtener su ecuación y dada la ecuación en un sistema de coordenadas, determinar la gráfica o lugar geométrico de los puntos que la cumplen.

El presente libro entrega a los estudiantes una serie de ejercicios resueltos paso a paso, una especie de manual de resolución, que servirán de guía para resolver otros ejercicios planteados como taller y a diversos ejercicios de otros autores.

El principal objetivo del libro es brindar una pauta de los procesos básicos de la geometría para el lector, como alternativa y guía de otros textos de geometría analítica, sin desmerecer dichas publicaciones tradicionales extranjeras.

Aspectos históricos de la geometría

La palabra geometría proviene del latín geometrĭa, y este del griego γεωμετρία que se divide en γεω = gueo, "tierra", y μετρία = metría, "medida", por lo que significa literalmente "medir la tierra"

Sus inicios se encuentran en Mesopotamia, se cree que, con la invención de la rueda, se inicia los estudios de la circunferencia y con ella el descubrimiento del número π (pi). En el antiguo Egipto, ya se encontraba desarrollada, adicionalmente el estudio de los astros, hicieron que la misma se destacará, al tener que "medir" la posición de las estrellas y los planetas.

La geometría es una rama de la matemática que se ocupa del estudio de las propiedades de las figuras en el plano (geometría plana) o el espacio (geometría del espacio), incluyendo: puntos, rectas y planos.

Según Lehmann (1980), el concepto de sistema coordenado, que caracteriza a la geometría analítica, fue introducido por primera vez en 1637 por el matemático francés René Descartes (1596-1650), es por este motivo que a la geometría analítica se le conoce también como geometría cartesiana.

A diferencia de la geometría pura, la geometría analítica no se encasilla en el uso de la regla y el compás, más bien, utiliza métodos algebraicos en la resolución de los problemas geométricos.

Es importante destacar que esta "nueva" forma de estudiar la geometría provocó que la "anterior" manera de estudiarla se terminara denominando, geometría sintética, debido a la dualidad análisis-síntesis.

Para Lehmann (1980), el estudiante debe tener claro, que, en un curso de geometría analítica, la solución a un problema geométrico, no se ha desarrollado correctamente, si no se ha empleado un sistema coordenado.

"Si el estudio de geometría analítica se resumiera por medio de un enunciado, quizá lo siguiente sería apropiado: dada una ecuación, encuentre su gráfica y, a la inversa, dada una gráfica encuentre su ecuación" (Swokowski & Cole, 2011).

Capítulo I
Conceptos Básicos

Capítulo I

Conceptos básicos

La geometría analítica como tal se atribuye a Rene Descartes (1956-1650), matemático y filósofo francés. En su libro titulado "Geometría" publicado en 1637, Rene Descartes estableció la unificación del algebra y de la geometría mediante un sistema de: Coordenadas Cartesianas Rectangulares (llamado así en su honor por su aportación en las ciencias matemáticas). Es decir, está compuesto por dos números reales los cuales dan como resultado un punto en el plano o el espacio.

Euclides (330-275 a.C.), denominado el padre de la geometría, cuando empezó a crear conocimientos matemáticos, estableció, que el punto era algo en lo que no se puede dividir, a su vez, que en un punto solo puede caber un punto, y es el cimiento de toda la geometría como tal, ya que con los puntos se forman rectas, y con las rectas se forman planos, es decir, todo está formado por una sucesión de puntos.

El punto

El punto no tiene dimensión alguna en el espacio, o se dice que tiene dimensión cero.

Euclides escribió 2 postulados relacionados al punto:

1. Por dos puntos diferentes pasa una sola línea recta.
2. Un segmento rectilíneo puede ser siempre alargado por la sucesión infinita de puntos.

La recta

El concepto clásico de la recta dice que está compuesta por la sucesión infinita de puntos en un plano o el espacio, descrito así por los griegos en el siglo 300 a.C.

Segmento de recta

El segmento de recta es la sucesión de puntos comprendidos en una porción determinada por dos puntos los cuales son sus extremos.

1.1.- Segmento rectilíneo dirigido

Definiremos al segmento rectilíneo como la porción de una línea recta que está comprendida entre dos puntos y dichos puntos se llaman extremos del segmento (Lehmann, 1980).

Cabe señalar que el punto A representa el Origen o Punto Inicial y el punto B representa el Extremo o Punto Final. La longitud del segmento $\overline{AB}$, la representamos por la distancia de A hasta B.

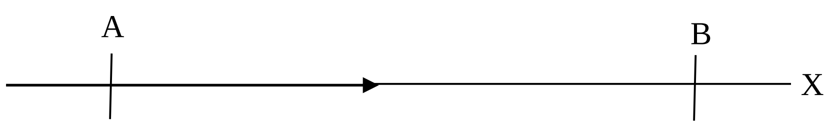


Figura 1

Para fines de la Geometría Analítica agregaremos un concepto a la definición de segmento rectilíneo que ya vimos, este es el de Sentido o Dirección. Como podemos observar el segmento $\overline{AB}$ de la figura 1, es generado por un punto el cual se mueve a lo largo de la recta X de A hacia B indicado por la flecha.

Podemos concluir que el sentido de un segmento rectilíneo dirigido se inicia escribiendo primero su origen o punto inicial (A) y termina escribiendo su extremo o punto final (B).

1.1.1.- Sentido y dirección de un segmento de recta

En la Geometría Elemental, las longitudes de dos segmentos rectilíneos sean estos $\overline{AB}$ y $\overline{BA}$ de la figura 2, son iguales, pero en la Geometría Analítica tenemos que hacer una diferenciación entre los signos de estas longitudes.

Diremos ahora que el segmento $\overline{AB}$ tiene sentido positivo y el segmento $\overline{BA}$ tendrá sentido negativo (Lehmann, 1980), por lo tanto:

$$\overline{\boldsymbol{AB}} = -\overline{\boldsymbol{BA}}$$

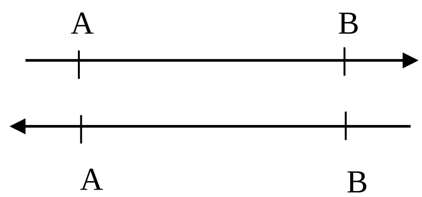


Figura 2

Ejemplo 1.- **Si A y B son dos puntos diferentes de una recta dirigida, demostrar que:**

$$\overline{AB} + \overline{BA} = \mathbf{0}$$

Si dirigimos el segmento de A hacia B tendremos:

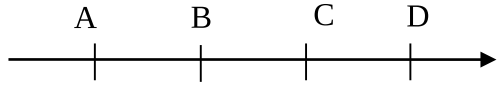
- $\overline{AB}$ = Sentido Positivo,
- $\overline{BA}$ = Sentido Negativo

En valores ambos segmentos son iguales ya que se trata del mismo segmento, aunque en signos sean diferentes.

$$\overline{AB} = \overline{BA} \rightarrow \overline{AB} + (-\overline{AB}) = 0 \rightarrow \overline{AB} - \overline{BA} = 0$$

Ejemplo 2.- **Si A, B, C y D son cuatro puntos cualesquiera de una recta dirigida, demostrar que, para todas las ordenaciones posibles de estos puntos sobre la recta, se verifica la igualdad:**

$$\overline{\boldsymbol{AB}} + \overline{\boldsymbol{BC}} + \overline{\boldsymbol{CD}} = \overline{\boldsymbol{AD}}$$



El ejercicio nos indica que los puntos pueden tener cualquier orden, pero deben cumplir la condición dada. Si tomamos tres ordenaciones posibles de las que se pueden dar comprobaremos que se verifica la igualdad:

$$\overline{\boldsymbol{AC}} + \overline{\boldsymbol{CB}} + \overline{\boldsymbol{BD}} = \overline{\boldsymbol{AD}}$$
$$\overline{\boldsymbol{BA}} + \overline{\boldsymbol{AC}} + \overline{\boldsymbol{CD}} = \overline{\boldsymbol{BD}}$$
$$\overline{\boldsymbol{DA}} + \overline{\boldsymbol{AB}} + \overline{\boldsymbol{BC}} = \overline{\boldsymbol{DC}}$$

1.- $\overline{\boldsymbol{AC}} + \overline{\boldsymbol{CB}} + \overline{\boldsymbol{BD}} = \overline{\boldsymbol{AD}}$

Es importante acomodar cada segmento de tal forma que podamos ir demostrando lo requerido por el ejercicio, por lo tanto, no siempre acomodar un segmento de recta, tendrá que ser igual.

$\overline{CB} = (-\overline{BC})$
$\overline{AC} = \overline{AB} - \overline{CB} \rightarrow \overline{AC} = \overline{AB} - (-\overline{BC}) \rightarrow \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$
BD = BC+CD → CD + BC →CD – CB
$\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} \rightarrow \overline{BD} = \overline{CD} + \overline{BC} \rightarrow \overline{BD} = \overline{CD} - \overline{CB}$

Reemplazando:

$$\overline{\mathrm{AC}} + \overline{\mathrm{CB}} + \overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{AD}}$$
$$(\overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{BC}}) + \overline{\mathrm{CB}} + (\overline{\mathrm{CD}} - \overline{\mathrm{CB}}) = \overline{\mathrm{AD}}$$
$$\overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{BC}} + \overline{CB} + \overline{\mathrm{CD}} - \overline{CB} = \overline{\mathrm{AD}}$$
$$\overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{BC}} + \overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{AD}}$$

2.- $\overline{\boldsymbol{BA}} + \overline{\boldsymbol{AC}} + \overline{\boldsymbol{CD}} = \overline{\boldsymbol{BD}}$

$\overline{BA} = (-\overline{AB})$
$\overline{AC} = \overline{AD} - \overline{CD}$
$\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD}$

Reemplazando:

$$\overline{\mathrm{BA}} + \overline{\mathrm{AC}} + \overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{BD}}$$
$$(-\overline{\mathrm{AB}}) + \overline{\mathrm{CD}} + (\overline{\mathrm{AD}} - \overline{\mathrm{CD}}) = \overline{BC} + \overline{\mathrm{CD}}$$
$$-\overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{AD}} - \overline{CD} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{\mathrm{CD}}$$
$$\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{BC}} + \overline{\mathrm{CD}}$$
$$\overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{BC}} + \overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{AD}}$$

3.- $\overline{\boldsymbol{DA}} + \overline{\boldsymbol{AB}} + \overline{\boldsymbol{BC}} = \overline{\boldsymbol{DC}}$

$\overline{DA} = (-\overline{AD})$
$\overline{DC} = (-\overline{CD})$

Reemplazando:

$$\overline{DA} + \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{DC}$$
$$-\overline{AD} + \overline{AB} + \overline{BC} = -\overline{CD}$$
$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AD}$$

1.2.- Sistemas coordenados

Un sistema de coordenadas es un sistema de referencia que permite localizar incuestionablemente una posición cualquiera en un espacio dimensional (Leithold, 2008).

Existen varios tipos de sistemas, pero para nuestro estudio utilizaremos el unidimensional y el bidimensional.

1.2.1.- Sistema coordenado unidimensional

Cuando se ubican puntos sobre una recta y le asignas un número real a cada punto, estás estableciendo una correspondencia biunívoca.

El concepto de biunívoca parte que:

"A cada punto de la recta le corresponde un número real y a todo número real le corresponde un punto de la recta".

En la figura 3 se ilustra el concepto enunciado:

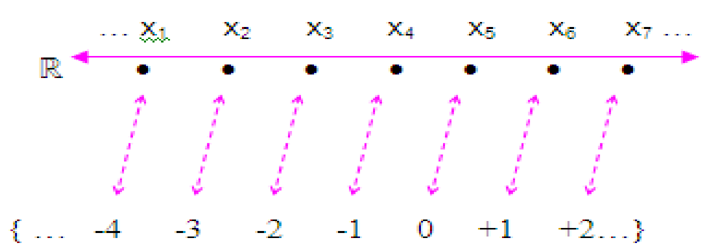


Figura 3

A partir del gráfico anterior determina a que número real corresponden los siguientes puntos de la recta: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7.

El conjunto de puntos, en correspondencia uno a uno con el conjunto de los números reales, se llama ***sistema de coordenadas unidimensional, recta real o recta numérica.***

La recta en la se ubican los puntos de acuerdo a la correspondencia biunívoca se llama ***recta numérica.***

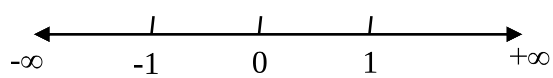


Figura 4

La gráfica de la figura 4, representa la recta numérica, como se aprecia en la figura, la misma es sólo de una dimensión. Hay que tener presente, que se puede dibujar no sólo en forma horizontal, sino que puede estar en cualquier posición.

El número cero se toma, generalmente como origen del sistema de coordenadas unidimensional, recordando que el cero es un número que no es ni positivo ni negativo. Para los objetivos que se persiguen en las escuelas secundarias, se acostumbra tomar el cero como origen de coordenadas.

1.2.1.1.- Distancia entre dos puntos:

De acuerdo a Charles Lehmann, (1980) si quisiéramos determinar la longitud del segmento que une dos puntos P_1 y P_2 cualesquiera sobre la recta X'X sabiendo que en la Geometría Analítica cuando se conocen sus coordenadas los puntos están dados x_1 y x_2.

$$\overline{OP_1} + \overline{P_1P_2} = \overline{OP_2}$$

Donde:

$\overline{OP_1} = x_1$

$\overline{OP_2} = x_2$

$x_1 + \overline{P_1P_2} = x_2$

$\overline{P_1P_2} = x_2 - x_1$

$$\overline{OP_2} + \overline{P_2P_1} = \overline{OP_1}$$

Donde:

$\overline{OP_1} = x_1$

$\overline{OP_2} = x_2$

$x_2 + \overline{P_2P_1} = x_1$

$\overline{P_2P_1} = x_1 - x_2$

La longitud de un segmento dirigido se obtiene restando la coordenada del punto inicial de la coordenada del punto final. Para determinar su distancia recordemos primero que es Valor Absoluto.

Valor Absoluto: "*Definimos geométricamente al valor absoluto si **a** es la coordenada de un punto del eje numérico real, la distancia de **a** al origen, que es una cantidad no negativa, y se representa por* $|\boldsymbol{a}|$".

Ejemplo 3.- **Determine el valor absoluto de las siguientes cantidades.**

$|\pi - 2| = \pi - 2$

$|2 - \pi| = -\pi + 2 = |\pi - 2|$

$|-15| = 15$

La distancia entre dos puntos se define como el valor absoluto o numérico de la longitud del segmento rectilíneo que une a dichos puntos:

$d = |P_2P_1| = |x_1 - x_2|$

$d = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|$

Ejemplo 4.- **Hallar la distancia entre los puntos P_1 (7) y P_2 (- 5).**

$P_1P_2 = x_2 - x_1 = -5 - 7 = -12$

$P_2P_1 = x_1 - x_2 = 7 - (-5) = 7 + 5 = 12$

Una vez calculada su longitud determinamos su distancia.

$d = |P_1P_2| = |x_2 - x_1| = |-5 - 7| = |-12| = 12$

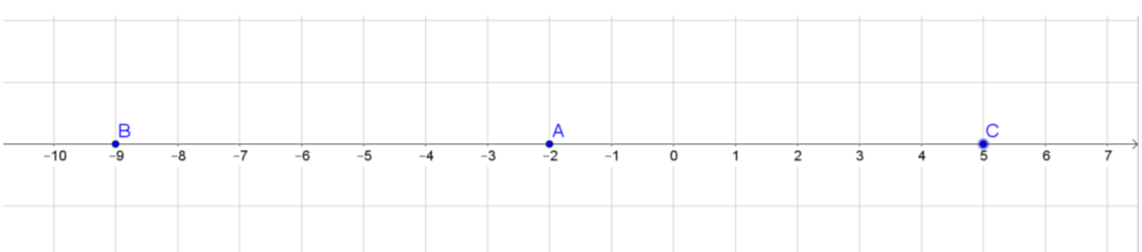
$d = |P_2P_1| = |x_1 - x_2| = |7 - (-5)| = |7 + 5| = |12| = 12$

La distancia para cualquiera de los dos segmentos rectilíneos es 12.

Ejemplo 5.- **La distancia entre dos puntos es 7. Si uno de los puntos es (-2), hallar el otro punto.**

$d = x_1 - x_2$
$7 = (-2) - x_1$
$7 + 2 = -x_1$
$9 = -x_1$
$-9 = x_1$

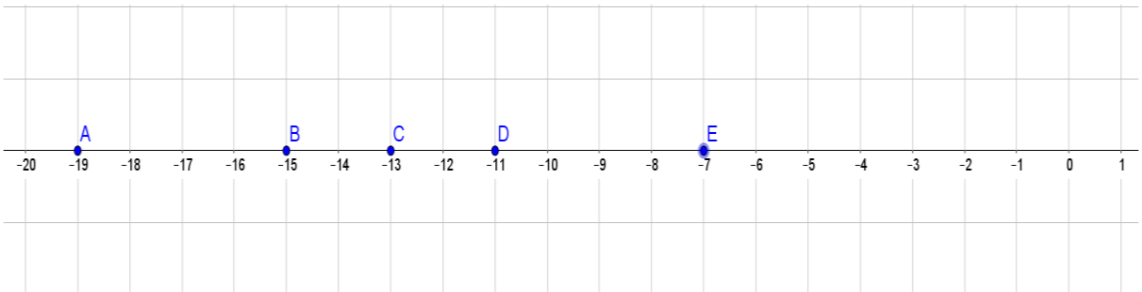
$d = x_2 - x_1$
$7 = x_1 - (-2)$
$7 - 2 = x_1$
$5 = x_1$



Ejemplo 6.- **Hallar los puntos de trisección y el punto medio del segmento dirigido cuyos extremos son los puntos (-7) y (-19).**

$$d = x_1 - x_2 = (-7) - (-19) = (-7) + 19 = 12$$

$$x = \frac{(x_1 + x_2)}{2} = \frac{(-7) + (-19)}{2} = \frac{-26}{2} = -13$$



El punto medio es (-13).

La distancia entre los puntos extremos es 12 la dividimos en tres partes iguales obteniendo 3 segmento con una distancia de 4 (Universidad de la República de Uruguay, 2016).

$$d = x_1 - x_2$$
$$4 = (-7) - x_2$$
$$4 + 7 = -x_2$$
$$11 = -x_2$$
$$-11 = x_2$$

$$d = x_2 - x_1$$
$$4 = (-11) - x_1$$
$$4 + 11 = -x_1$$
$$15 = -x_1$$
$$-15 = x_1$$

1.2.2.- Sistema coordenado bidimensional:

Una vez estudiado el Sistema Unidimensional en el que un punto se podía mover a la derecha o a la izquierda, pasaremos a estudiar un sistema en el que un punto se puede mover en todas direcciones, es decir: derecha, izquierda y/o arriba, abajo, manteniéndose en el plano.

Al esquema se le llama ***Sistema Coordenado Bidimensional, Rectangular o Plano Cartesiano*** (ver figura 5) y es el sistema usado en la Geometría Analítica Plana.

Este sistema está formado por dos ejes numéricos reales. Uno vertical la recta Y'Y llamado Eje Y o Eje de las Ordenadas y otro horizontal la recta X'X llamado Eje X o Eje de las Abscisa, perpendiculares entre sí, ambos llamados Ejes Coordenados. El punto de intersección es el origen (0,0).

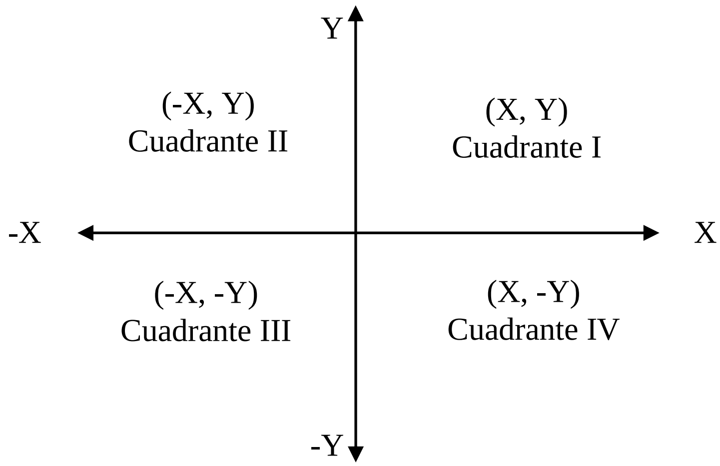


Figura 5

Las dos rectas dividen al plano en cuatro cuadrantes que se enumeran en sentido contrario a las manecillas del reloj (ver figura 5). La coordenada en este sistema es (x, y) donde x ≠ y. El eje "x" y el eje "y" se llaman **ejes coordenados**. En el par ordenado **(x, y)**, los números "x" e "y" se llaman **coordenadas del punto (x, y).** La coordenada "x" se llama **abscisa del punto** y la coordenada "y" se llama **ordenada del punto.**

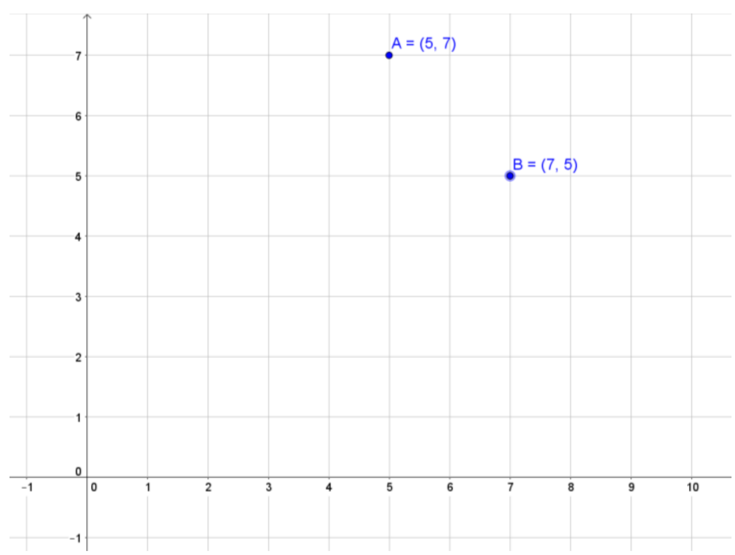


Figura 6

Como se puede observar en la figura 6, los puntos (5, 7) y (7, 5) ocupan distintas coordenadas en el plano, por lo cual (5,7)≠ (7,5). Lo importante en este sistema es escribir bien las coordenadas, la primera coordenada de un punto corresponde al eje de las abscisas (X) y la segunda coordenada corresponde al eje de las ordenadas (Y).

Un par de coordenadas representan un Par Ordenado estos son los elementos de un conjunto infinito de puntos llamado **Plano Coordenado Rectangular** y la localización de un punto por medio de sus coordenadas se llama Trazado del Punto.

"El Sistema coordenado Rectangular en el Plano establece una correspondencia biunívoca entre cada punto del plano y un par ordenado de números reales".

En el lenguaje utilizado en la geometría analítica, también se usa el nombre de **plano cartesiano.**

Para representar puntos de coordenadas conocidas hay que adoptar una escala adecuada sobre cada uno de los ejes coordenados. Ambas escalas pueden ser iguales o distintas. (Kindle, 2005)

***Ejemplo 3*.- Ubicar el punto (-5,-3) en un sistema de coordenadas rectangulares.**

Para ubicar el punto (-5,-3) como se muestra en la figura 7, se traza un segmento perpendicular a partir del punto x = -5 en el eje "x" y un segmento perpendicular a partir del punto y = -3 en el eje "y". El punto estará ubicado en la intersección de los dos segmentos. La elección de la escala en los ejes en arbitraria.

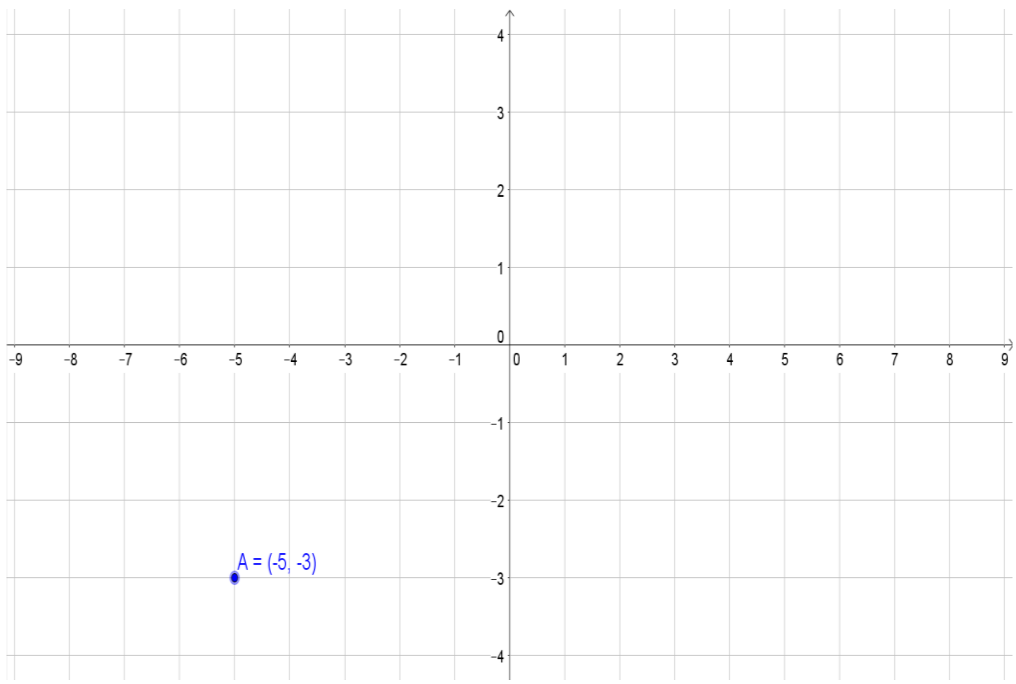


Figura 7

1.2.3.- Distancia entre dos puntos:

La distancia entre dos puntos es la longitud o el "espacio" del segmento de la recta que los une.

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Ejemplo 4.- **Determine la distancia entre los puntos (7, 5) y (4, 1).**

$$d=\sqrt{(7-4)^2+(5-1)^2}$$
$$d=\sqrt{(3)^2+(4)^2}$$
$$d=\sqrt{9+16}$$
$$d=\sqrt{25}$$
$$d=5$$

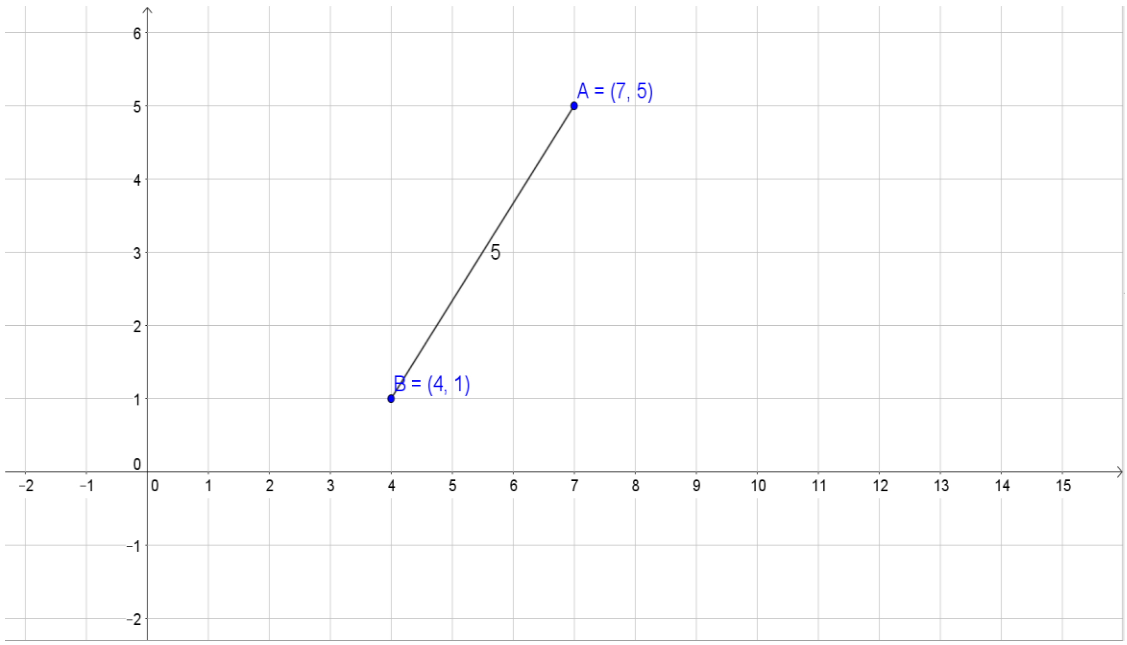


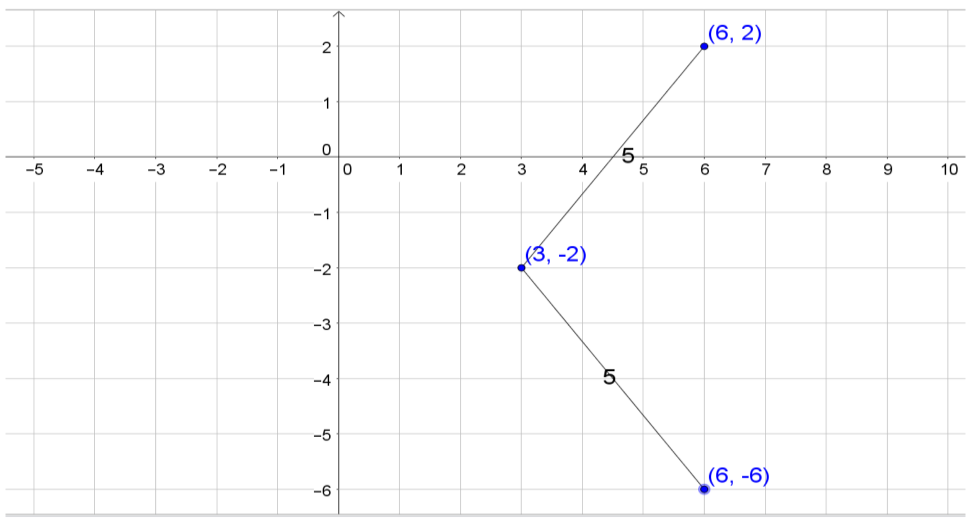
Figura 8

Como se puede observar en la figura 8, el segmento de recta “a” es igual a 5, que es la distancia entre los puntos A y B.

Ejemplo 5.- **Uno de los extremos de un segmento rectilíneo dirigido de longitud 5 es el punto (3, -2). Si la abscisa del otro punto es 6 cuál es su ordenada.**

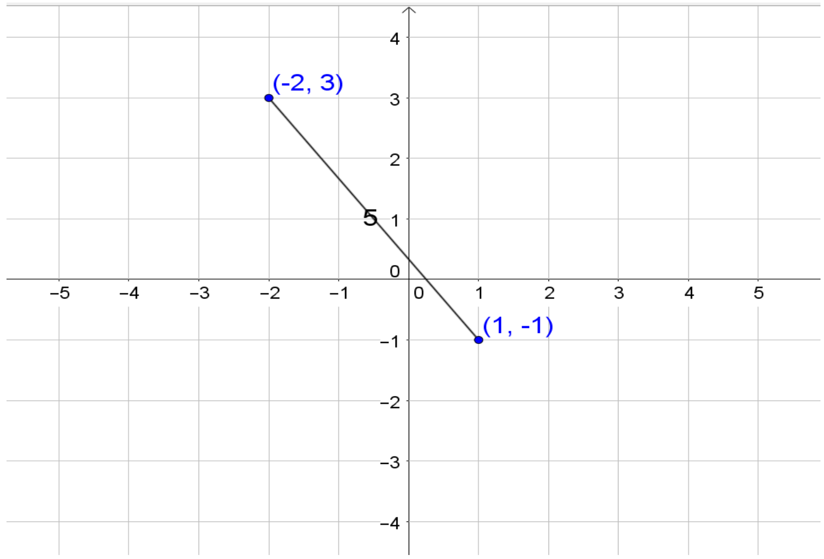
Si la longitud es 5, entonces la distancia la consideramos como 5, el primer par ordenado se coloca en la formula y el siguiente par ordenado se encuentra incompleto debido a que solo me dan la abscisa o sea la coordenada en el eje x, la coordenada en el eje de las ordenadas o eje y, es la incógnita.

$$5=\sqrt{(3-6)^2+(-2-y_2)^2}$$
$$(5)^2=\left[\sqrt{(3-6)^2+(-2-y_2)^2}\right]^2$$
$$25=(-3)^2+(-2-y_2)^2$$
$$25=9+(-2-y_2)^2$$
$$25-9=(-2-y_2)^2$$
$$16=(-2-y_2)^2$$
$$\sqrt{16}=\sqrt{(-2-y_2)^2}$$
$$\pm 4=-2-y\rightarrow\begin{cases}4=-2-y\rightarrow y=-2-4\rightarrow y=-6\\-4=-2-y\rightarrow y=4-2\rightarrow y=2\end{cases}$$



Ejemplo 6.- **Hallar la distancia entre los puntos (-2,3) y (1,-1).**

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$d=\sqrt{(1-(-2))^2+(-1-3)^2}$$
$$d=\sqrt{(1+2)^2+(-1+(-3))^2}$$
$$d=\sqrt{(3)^2+(-4)^2}$$
$$d=\sqrt{9+16}$$
$$d=\sqrt{25}$$
$$d=5$$



1.2.4.- Punto medio de un segmento dirigido:

Si tenemos los extremos de un segmento dirigido (x_1, y_1) y (x_2, y_2), su punto medio se encuentra a la misma distancia de cualquiera de los extremos de dicho segmento y se lo calcula por:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad\qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Ejemplo 7.- **Determine el punto medio del segmento comprendido entre los puntos (5, 7) y (7, 5).**

	X	Y
$Pto.1$	5	7
$Pto.2$	7	5

$$x = \frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$y = \frac{7+5}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$Pto.Medio = (6,6)$$

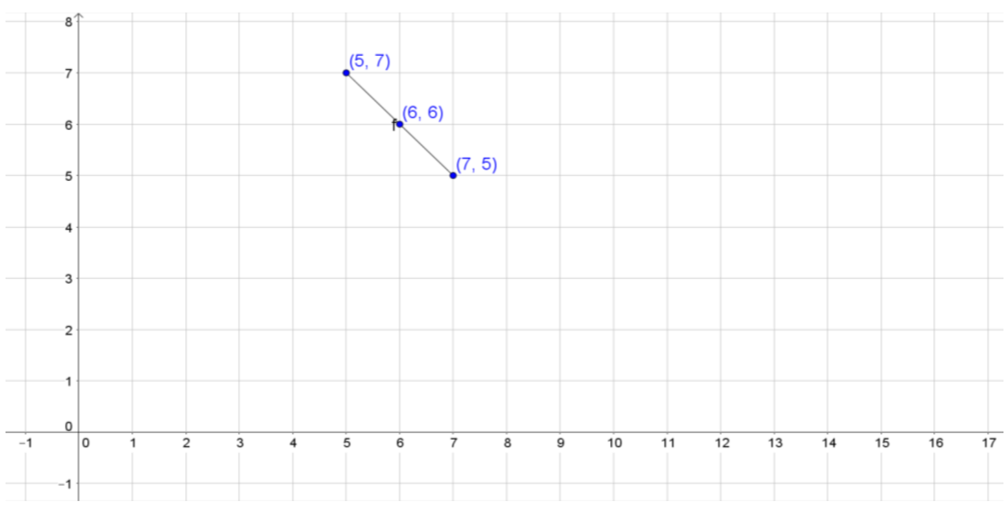


Figura 9

Como se aprecia en la figura 9, el punto medio (pm) se encuentra a la misma distancia de los puntos A y B.

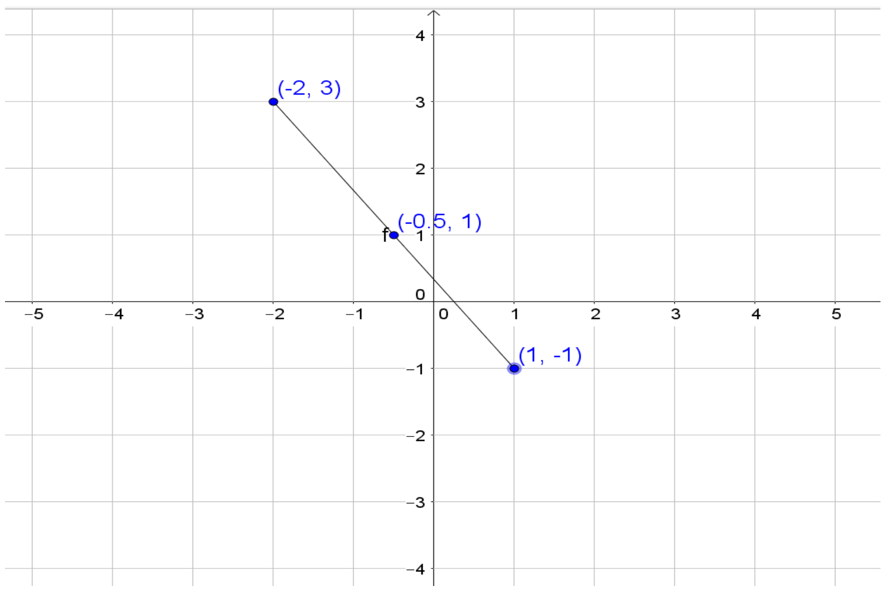
***Ejemplo 8.*- Hallar el punto medio entre los puntos (-2,3) y (1,-1).**

	X	Y
$Pto.1$	-2	3
$Pto.2$	1	-1

$$x=\frac{-2+1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$y=\frac{3+(-1)}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$Pm=\left(-\frac{1}{2},1\right)$$



1.3.- Pendiente de una recta:

La pendiente de una línea es la tangente de su ángulo de inclinación y usualmente de denota por ***m*** (Draper & Klingman, 1992).

Ahora pasaremos a estudiar el método para calcular la medida de la inclinación de una recta llamada **"*Pendiente*"** que no está definida para retas verticales, pero antes recordaremos lo que es un ángulo de inclinación.

Ángulo de Inclinación: Se llama ángulo de inclinación de una recta al formado por la parte positiva del eje X y la recta, cuando la recta se considera dirigida hacia arriba.

Definimos a la Pendiente o Coeficiente Angular de una recta no vertical a la tangente de su ángulo de inclinación. La denotamos con la letra ***m***:

$$\boldsymbol{m=tan\propto}$$

$$\boldsymbol{\propto=tan^{-1}m}$$

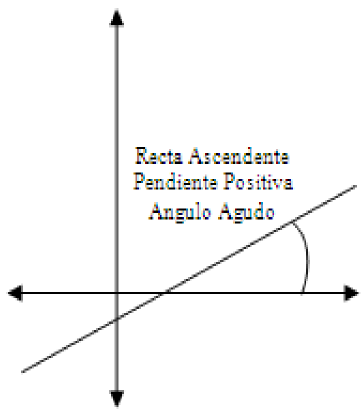


Figura 10

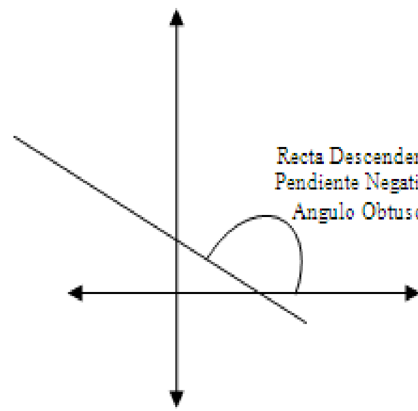


Figura 11

Las rectas que tienen ángulo agudo (figura 10) tendrán pendiente positiva y las que tengan ángulos obtusos (figura 11) sus pendientes serán negativas.

La pendiente de una recta también se la define como la Razón de Cambio en Y (ΔY) que resulta del cambio en X (ΔX).

En las Ciencias Económicas la relación entre las variables precio (p) y cantidad (q), son de importancia para concluir el signo de la pendiente: si la relación entre precio y cantidad es directa, es decir, al aumentar el precio, la cantidad disminuye y viceversa, la pendiente será negativa (curva de demanda); por el contrario, si al aumentar el precio, la cantidad aumenta y viceversa, la pendiente será negativa (curva de oferta).

Si tenemos 2 puntos diferentes cualesquiera de una recta P_1 (x_1, y_1) y P_2 (x_2, y_2) la pendiente de la recta la calculamos por:

$$m = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; x_1 \neq x_2$$

Ejemplo 9.- **Determine la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos (5, 7) y (7, 5).**

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{5-7}{7-5} = \frac{-2}{2}$$

$$m = -1$$

$$m = \tan \alpha$$

$$\alpha = \tan^{-1} \alpha$$

$$\alpha = \tan^{-1}(-1)$$

$$\alpha = -45$$

$$\alpha = 180 - 45$$

$$\alpha = 135$$

Ejemplo 10.- **Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos (-3, 2) y (7, -3).**

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{-3-2}{7+3} = \frac{-5}{10}$$

$$m = -\frac{1}{2}$$

$$m = \tan\alpha$$

$$\alpha = \tan^{-1}\alpha$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\alpha = -26.5650511$$

$$\alpha = 180 - 26.5650511$$

$$\alpha = 153.434948$$

1.3.1.- Condición de paralelismo:

Según Draper & Klingman (1992), la única condición que es necesaria y suficiente para que dos rectas sean paralelas es que sus pendientes sean iguales tal como lo muestra la figura 12:

$$m_1 = m_2$$

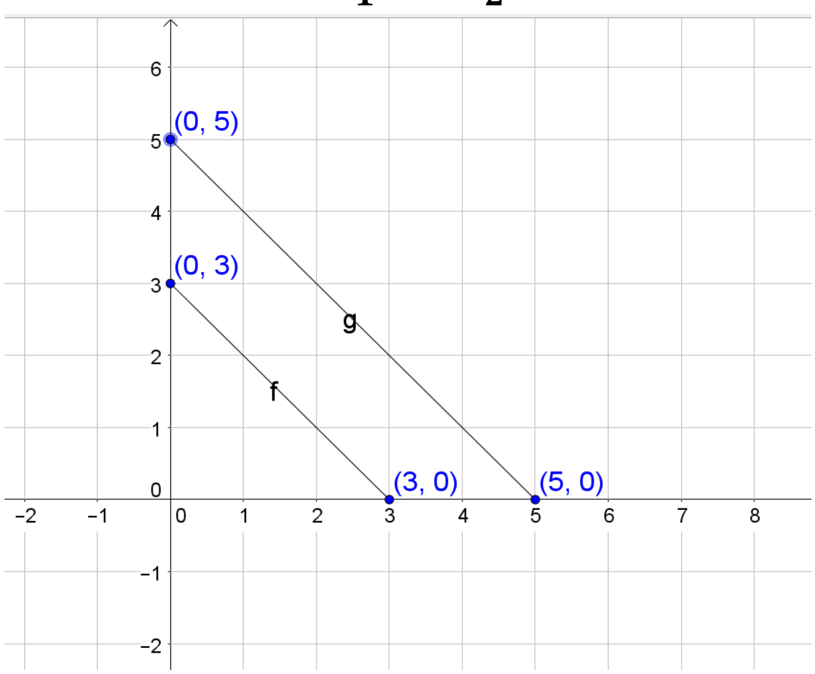


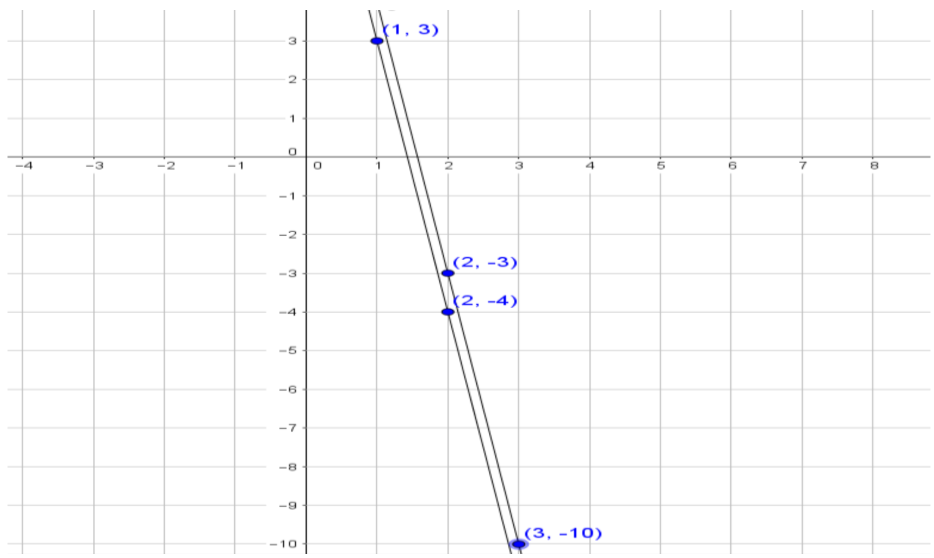
Figura 12

Ejemplo 11.- **Demostrar que la recta que pasa por los puntos (1, 3) y (2, -4) es paralela a la que pasa por los puntos (2, -3) y (3, -10).**

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-4-3}{2-1}=-\frac{7}{1}=-7$$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-10+3}{3-2}=-\frac{7}{1}=-7$$

$$m_1=m_2\rightarrow -7=-7$$



Ambas rectas tienen la misma pendiente por lo tanto son paralelas.

1.3.2.- Condición de perpendicularidad:

Para Draper & Klingman, la única condición que es necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares (ver figura 13) es que el producto de sus pendientes sea igual a -1:

$$\boldsymbol{m_1 * m_2 = -1}$$

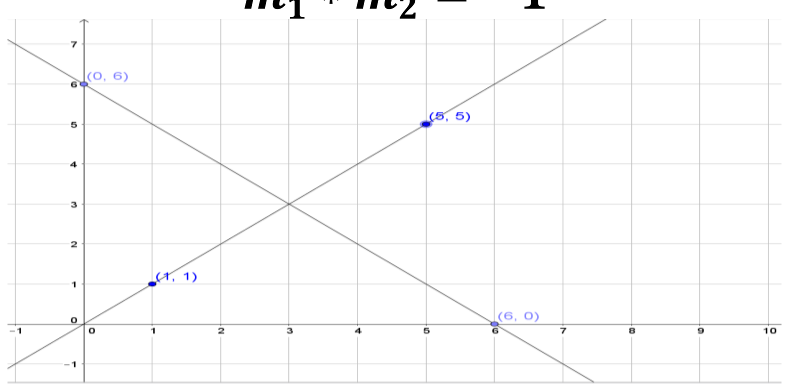
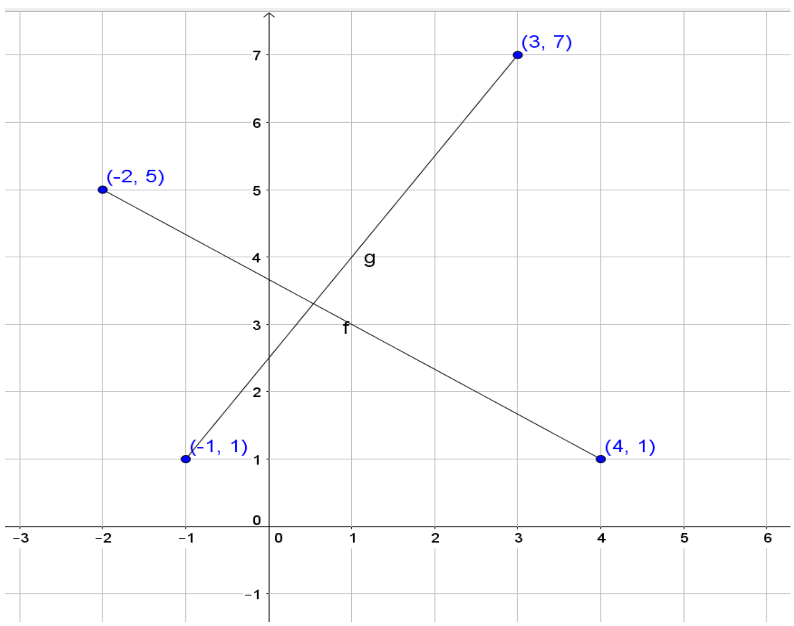


Figura 13

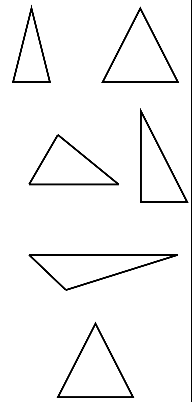
Ambas rectas tienen sus pendientes inversas y de signo contrario por lo que son perpendiculares.

Ejemplo 12.- **Demostrar que la recta que pasa por los puntos (-2, 5) y (4, 1) es perpendicular a la que pasa por los puntos (-1, 1) y (3, 7).**

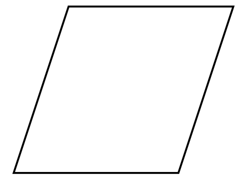
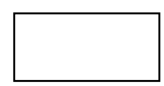
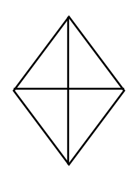
$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$
$$m=\frac{1-5}{4+2}=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$$
$$m=\frac{7-1}{3+1}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$
$$m_1*m_2=-1$$
$$\left(-\frac{2}{3}\right)*\left(\frac{3}{2}\right)=-1$$
$$-1=-1$$

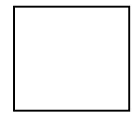


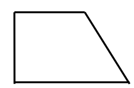
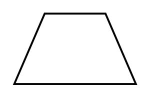
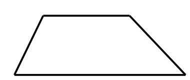
1.4.- Área en función de las coordenadas de sus vértices:
Recordaremos características de ciertas figuras geométricas que nos servirán para poder aplicar conceptos vistos hasta ahora:

TRIÁNGULO:	***CLASIFICACION:***	***ELEMENTOS:***	***AREA:***	***FIGURA:***
Dado 3 puntos del plano, no alineados y tales que las rectas determinadas por 2 de los puntos consecutivos deje al restante en un mismo semiplano, se llama triángulo a la intersección de todos esos semiplanos.	a) Por sus Lados: **Equilátero:** 3 lados iguales. **Isósceles:** 2 lados iguales. **Escaleno:** 3 lados desiguales. b) Por sus ángulos: **Acutángulo:** $\alpha < 90^o$ **Rectángulo:** $\alpha = 90^o$ **Obtusángulo:** $\alpha > 90^o$	Tiene 3 vértices. Tiene 3 lados. Tiene 3 α interiores. Tiene 3 ángulos exteriores.	$A = (b * h)/2$ **Donde:** b = Base h = Altura	

CUADRILATEROS:	***ELEMENTOS:***	***CLASIFICACION:***
Son los polígonos que tienen sus 4 lados iguales.	Tienen 4 lados. Tienen 4 α interiores que sumados dan 360^o. Tienen 4 vértices. Tienen 2 diagonales.	a) Paralelogramos: Cuadrado Paralelogramo Rombo Rectángulo b) No Paralelogramos: Trapecio: • Rectángulo • Escaleno • Isósceles Trapezoide Romboide

PARALELOGRAMO:	***PROPIEDADES:***	***AREA:***	***FIGURA:***
Tiene paralelo los pares de lados opuestos, su base es uno de cualquiera de sus lados y su altura es la perpendicular trazada desde de un lado opuesto.	Lados opuestos iguales. α opuestos iguales. A consecutivos son suplementarios. Diagonales se cortan mutuamente en partes iguales. Si tienen un par de lados ‖ e = es un paralelogramo. El punto donde se cortan sus diagonales es el eje de simetría del mimo. Su base media es el segmento comprendido entre los puntos medios de los lados opuestos.	A = b * h **Donde:** b = Base h = Altura	
RECTÁNGULO:	***PROPIEDADES:***	***AREA:***	***FIGURA:***
Tiene los lados opuestos iguales y sus ángulos rectos. Si un paralelogramo tiene un α recto los demás lo serán.	Goza de todas las propiedades de un paralelogramo además de: Sus diagonales son iguales. Bases medias son ejes de simetría del mismo.	A = b * h **Donde:** b = Base h = Altura	
ROMBO:	***PROPIEDADES:***	***AREA:***	***FIGURA:***
Tiene 4 lados iguales y los α opuestos iguales 2 a 2. Si un paralelogramo tiene 2 lados consecutivos iguales, los 4 son iguales.	Goza de todas las propiedades de un paralelogramo además de: Sus diagonales son ⊥ en su punto medio y bisectrices de los α que unen. Sus diagonales son ejes de simetría del mismo.	A = (D * d) / 2 **Donde:** D = Diagonal mayor d = Diagonal menor	

CUADRADO:	***PROPIEDADES:***	***AREA:***	***FIGURA:***
Tiene 4 lados iguales.	Goza de todas las propiedades de un paralelogramo además de: Por tener 4 lados iguales es un rombo y goza de sus propiedades. Por tener 4 α rectos es un rectángulo y goza de sus propiedades. Sus diagonales y sus bases medias son ejes de simetría. La diagonal del cuadrado es bisectriz del ángulo recto.	$A = L^2$ **Donde:** L = Lado	

TRAPECIO:	***PROPIEDADES:***	***AREA:***	***FIGURA:***
Tiene un par de lados ‖	La base media está comprendida entre los puntos medios de los lados no paralelos y es paralela a las bases e igual a la semisuma de ellas. Se clasifica en: a) Rectángulo b) Isósceles: lados no ‖ son iguales. c) Escaleno: sus lados son de distinta longitud.	$A = [(b + b')/2] * h$ **Donde:** b = Base h = Altura b' = Base	  

Ejemplo 13.- **Tres vértices de un rectángulo son los puntos (2, -1), (7, -1) y (7, 3). Hallar el cuarto vértice y el área del rectángulo.**

Calculamos la distancia de AB, BC y elaboramos su gráfica (ver figura 14):

$$AB = \sqrt{(2-7)^2 + (-1+1)^2} \qquad BC = \sqrt{(7-7)^2 + (-1-3)^2}$$
$$AB = \sqrt{(-5)^2 + (0)^2} \qquad BC = \sqrt{(0)^2 + (-4)^2}$$
$$AB = \sqrt{25} \qquad BC = \sqrt{16}$$
$$AB = 5 \qquad BC = 4$$

Comprobamos que la figura 14 es un rectángulo por lo tanto si:

$x_b = x_c$ entonces $x_a = x_d \rightarrow 7 = 7$ entonces $2 = 2$

$y_a = y_b$ entonces $y_c = y_d \rightarrow -1 = -1$ entonces $3 = 3$

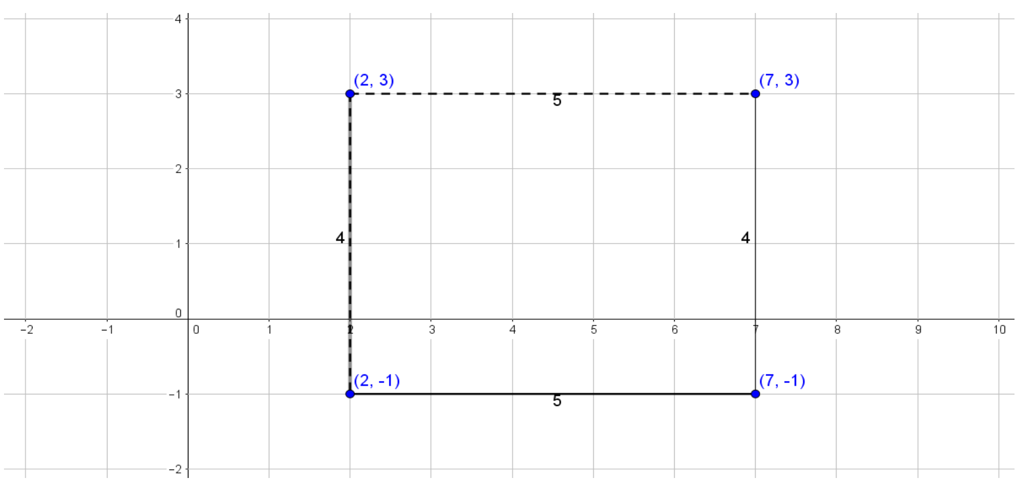


Figura 14

Ejemplo 14.- **Los vértices de un triángulo rectángulo son los puntos (1, -2), (4, -2) y (4, 2). Determine las longitudes de los catetos, de la hipotenusa, sus puntos medios y el área del triángulo.**

Calculamos la distancia de AB, BC, AC y elaboramos su gráfica (ver figura 15):

$$AB = \sqrt{(1-4)^2 + (-2+2)^2} \qquad BC = \sqrt{(4-4)^2 + (-2-2)^2} \qquad AC = \sqrt{(1-4)^2 + (-2-2)^2}$$
$$AB = \sqrt{(-3)^2 + (0)^2} \qquad BC = \sqrt{(0)^2 + (-4)^2} \qquad AC = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$
$$AB = \sqrt{9} \qquad BC = \sqrt{16} \qquad AC = \sqrt{9+16}$$
$$AB = 3 \qquad BC = 4 \qquad AC = 5$$

Calculamos los puntos medios de AB, BC, AC:

$$\text{P. M. } \mathbf{AB} = \left(\frac{5}{2}, -2\right)$$

$$x = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$$
$$y = \frac{-2-2}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\text{P. M. } \mathbf{BC} = (4, 0)$$

$$x = \frac{4+4}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$y = \frac{-2+2}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\text{P. M. } \mathbf{AC} = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$$

$$x = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$$

$$y = \frac{-2+2}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$A = \frac{b * h}{2} = \frac{3 * 4}{2} = 6$$

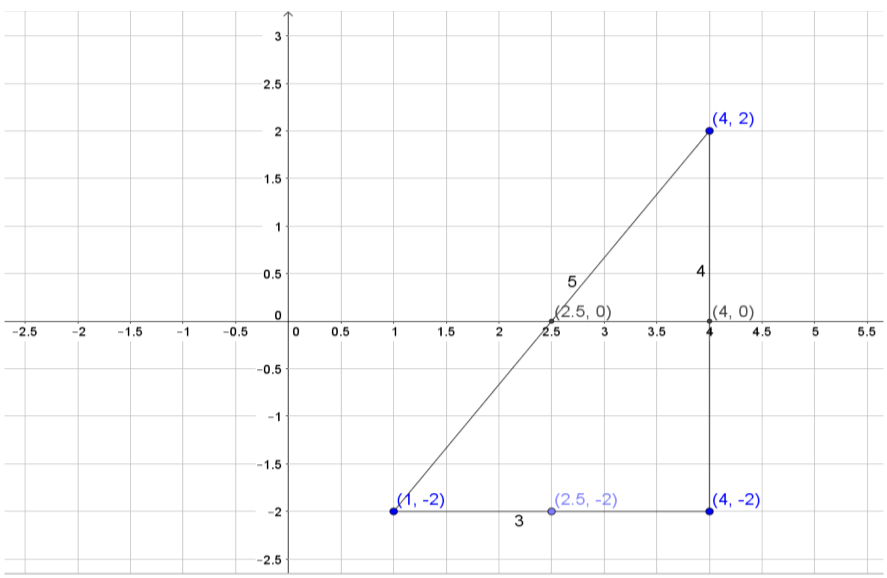


Figura 15

Ejemplo 15.- **Los vértices de un cuadrilátero son los puntos (1, 3), (7, 3), (9, 8) y (3, 8). Demostrar que el cuadrilátero es un paralelogramo y calcular su área.**

Calculamos la distancia de AB, BC, AC y elaboramos su gráfica (ver figura 16):

$$AB = \sqrt{(1-7)^2 + (3-3)^2}$$
$$AB = \sqrt{(-6)^2 + 0^2}$$
$$AB = \sqrt{36}$$
$$AB = 6$$

$$DC = \sqrt{(3-9)^2 + (8-8)^2}$$
$$DC = \sqrt{(-6)^2 + 0^2}$$
$$DC = \sqrt{36}$$
$$DC = 6$$

$$BC = \sqrt{(7-9)^2 + (3-8)^2}$$
$$BC = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2}$$
$$BC = \sqrt{4+25}$$
$$BC = \sqrt{29}$$

$$AD = \sqrt{(1-3)^2 + (3-8)^2}$$
$$AD = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2}$$
$$AD = \sqrt{4+25}$$
$$AD = \sqrt{29}$$

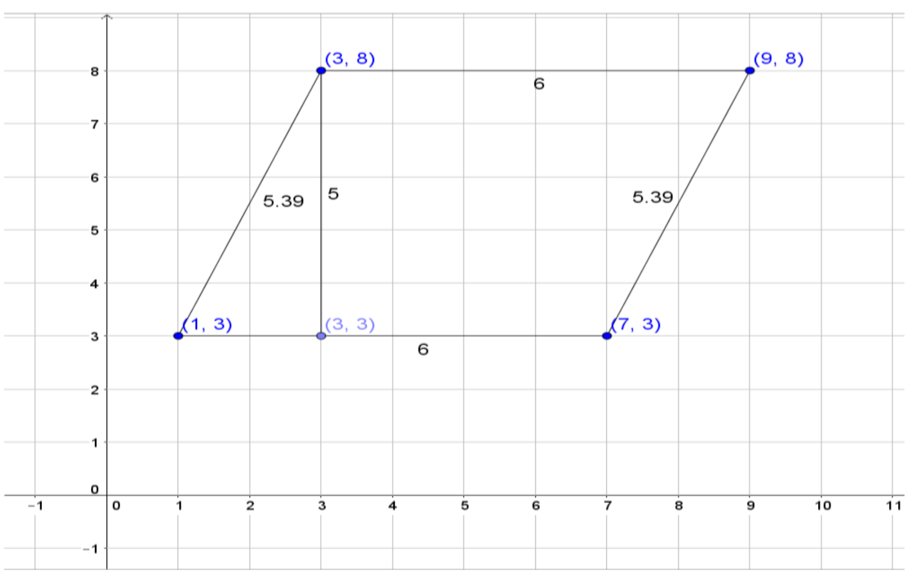


Figura 16

Vemos que sus lados opuestos son iguales, por lo tanto es un paralelogramo.

A = b * h → 6 * 5 = 30

Recuerde que la altura la obtenemos trazando una perpendicular de unos de sus vértices al lado opuesto, nos queda un triángulo y por Pitágoras encontramos el valor del otro cateto que nos hace falta y que es igual a la altura. Además ese triángulo lo agregamos en la parte final del paralelogramo y nos queda un rectángulo con lo que se nos facilita la obtención del área.

Ejemplo 16.- **Hallar el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son (-3, -1), (0, 3), (3, 4) y (4, -1).**

Calculamos la distancia de AB, BC, AC y elaboramos su gráfica (ver figura 17):

$$AB = \sqrt{(-3-0)^2 + (-1-3)^2}$$
$$AB = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$
$$AB = \sqrt{25}$$
$$AB = 5$$

$$BC = \sqrt{(0-3)^2 + (3-4)^2}$$
$$BC = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2}$$
$$BC = \sqrt{10}$$

$$CD = \sqrt{(3-4)^2 + (4+1)^2}$$
$$CD = \sqrt{(-1)^2 + (5)^2}$$
$$CD = \sqrt{26}$$

$$AD = \sqrt{(-3-4)^2 + (-1+1)^2}$$
$$AD = \sqrt{(-7)^2 + (0)^2}$$
$$AD = \sqrt{49}$$
$$AD = 7$$

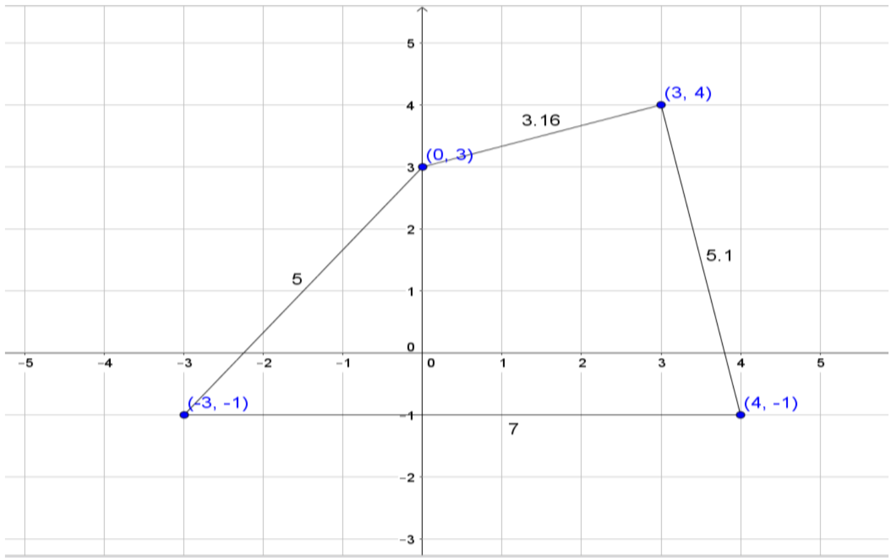


Figura 17

El perímetro de un cuadrilátero es la suma de sus lados sumamos las distancias y nos da 20,26.

Ejemplo 17.- **Demostrar que los puntos (-2, -1), (2, 2) y (5, -2) son los vértices de un triángulo isósceles.**

Calculamos la distancia de AB, BC, AC y elaboramos su gráfica (ver figura 18):

$$AB = \sqrt{(-2-2)^2 + (-1-2)^2}$$
$$AB = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}$$
$$AB = \sqrt{25}$$
$$AB = 5$$

$$BC = \sqrt{(2-5)^2 + (2+2)^2}$$
$$BC = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2}$$
$$BC = \sqrt{25}$$
$$BC = 5$$

$$AC = \sqrt{(-2-5)^2 + (-1-2)^2}$$
$$AC = \sqrt{(-7)^2 + (-3)^2}$$
$$AC = \sqrt{58}$$

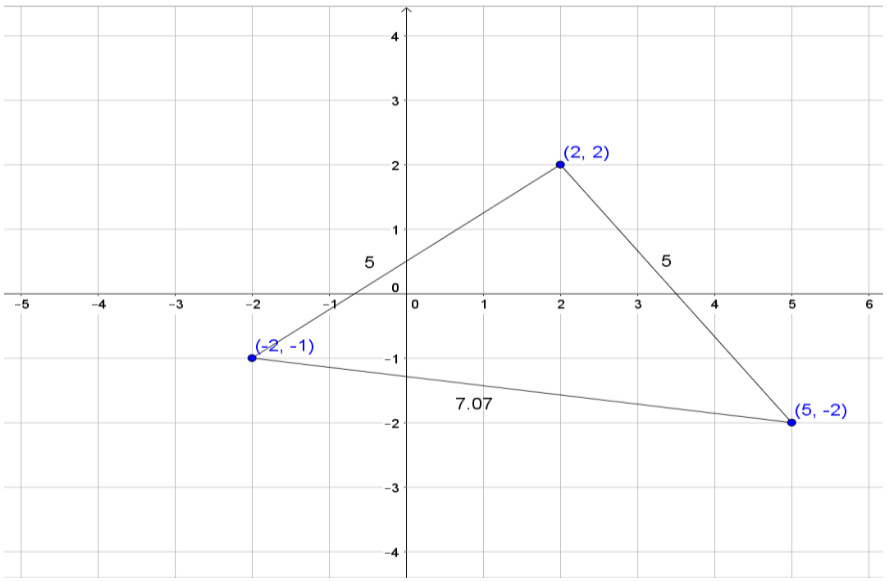


Figura 18

Vemos que tiene dos lados iguales por lo tanto es un triángulo isósceles (AB = BC).

Ejemplo 18.- **Demostrar que los tres puntos (12, 1), (-3, -2) y (2, -1) son colineales, es decir, que están sobre una misma línea.**

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\mathrm{m} = \frac{-2-1}{-3-12} = \frac{-3}{-15} = \frac{1}{5}$$

$$\mathrm{m} = \frac{-1+2}{2+3} = \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\mathrm{m} = \frac{-1-1}{2-12} = \frac{-2}{-10} = \frac{1}{5}$$

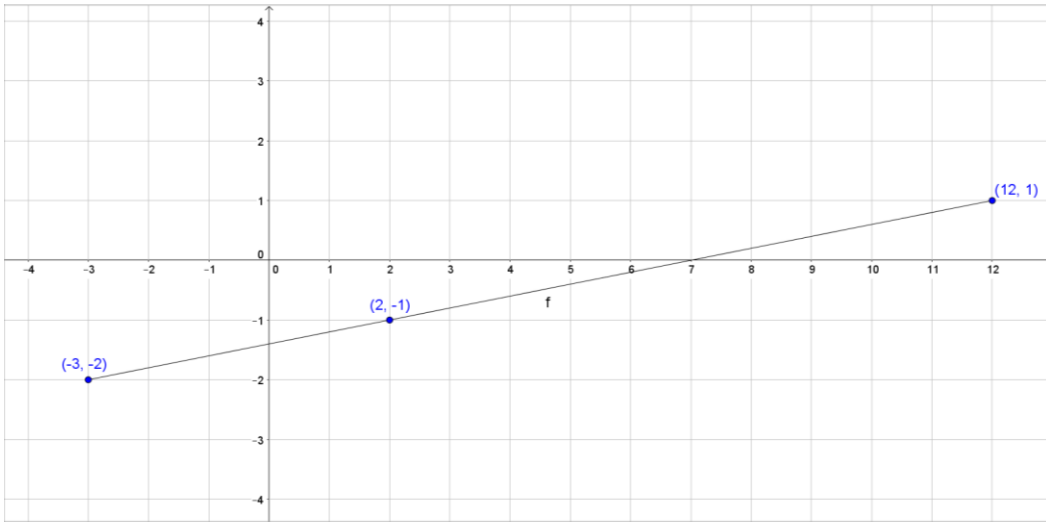


Figura 19

Como se observa en la figura 19, todos los puntos tienen la misma pendiente por lo tanto están sobre la misma línea es decir son colineales.

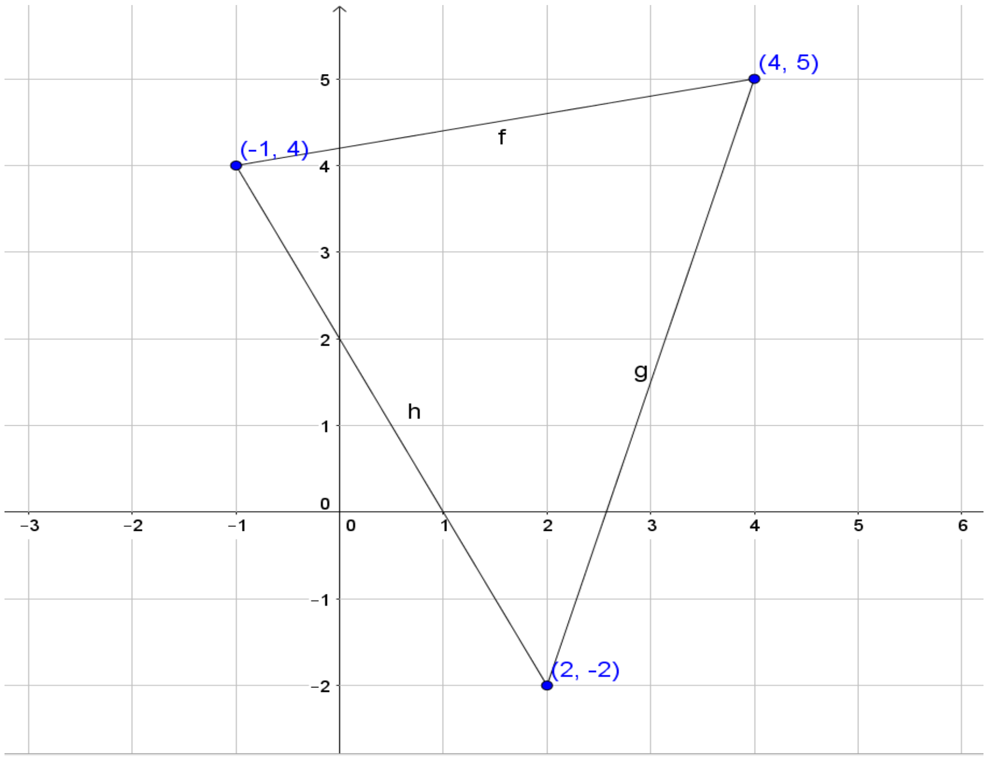
Ejemplo 19.- **Los vértices de un triángulo son los puntos (2, -2), (-1, 4) y (4, 5). Calcular la pendiente de cada uno de sus lados.**

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\mathrm{m} = \frac{4+2}{-1-2} = \frac{6}{-3} = -2$$

$$\mathrm{m} = \frac{5-4}{4+1} = \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\mathrm{m} = \frac{5+2}{4-2} = \frac{7}{2} = \frac{7}{2}$$



Ejemplo 20.- **Demostrar, por medio de pendientes, que los puntos (9, 2), (11, 6), (3, 5) y (1, 1) son vértices de un paralelogramo.**

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\mathrm{m} = \frac{6-2}{11-9} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\mathrm{m} = \frac{5-1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\mathrm{m} = \frac{1-2}{1-9} = \frac{-1}{-8}$$

$$\mathrm{m} = \frac{5-6}{3-11} = \frac{-1}{-8}$$

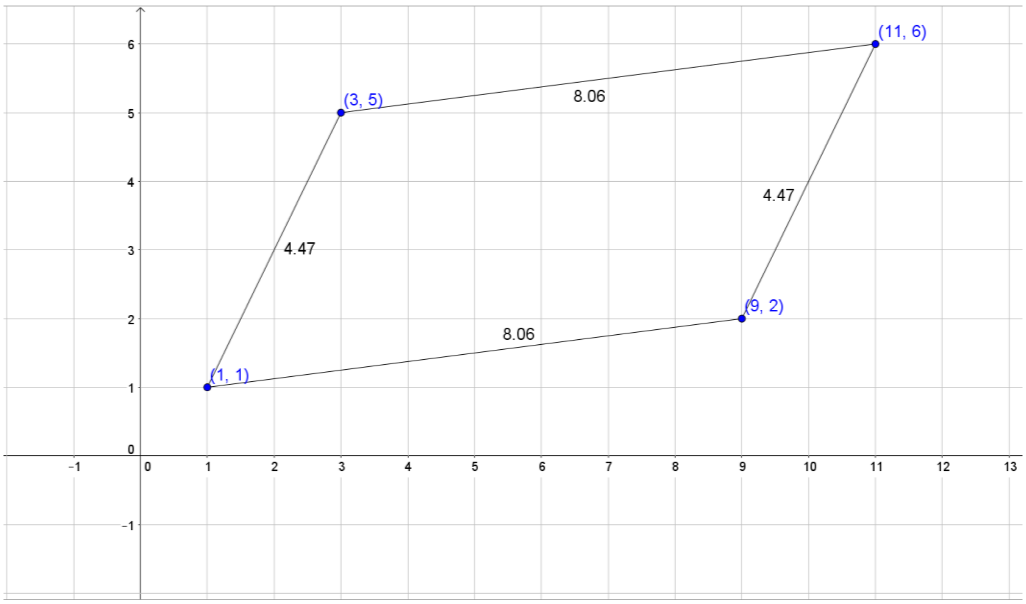


Figura 20

Un paralelogramo tiene sus lados opuestos iguales y paralelos, vemos en la figura 20 que, los lados opuestos tienen igual pendiente por lo tanto son paralelos.

Laboratorio 1

1.- Considere tres puntos distintos A, B; y C sobre una línea recta cuya dirección positiva es de izquierda a derecha. Hay:

a) AC + CB = AB
b) CA + AB = CB
c) AB + BC = AC
d) BC + CA = BA
e) CB + BA = CA
f) BA + AC = BC

Demostrar que todas las relaciones están incluidas en:

$$AB + BC = AC$$

2.- Hallar la distancia entre los puntos cuyas coordenadas son:

a) (-5) y (6)
b) (3) y (-7)
c) (-8) y (-12)
d) (-7) y (5)
e) (-16) y (-25)
f) (3) y (12)
g) (-9) y (-17)

3.- Un extremo de un segmento dirigido es el punto (-8) y su punto medio es (3). Hallar la coordenada del otro extremo.

4.- Un cuadrado, de lado iguala 2A, tiene su centro en el origen y sus lados son paralelos a los ejes coordenados. Hallar las coordenadas de sus cuatro vértices.

5.- Hallar la distancia entre los puntos (6, 0) y (0, 8).

6.- Dos de los vértices de un triángulo equilátero son los puntos (-1, 1) y (3, 1). Hallar las coordenadas del tercer vértice (Dos casos).

7.- Demostrar que los puntos (-5, 0), (0, 2) y (0, -2) son los vértices de un triángulo isósceles, y calcular su área.

8.- Demostrar que los puntos (0, 0), (3, 4), (8, 4) y (5, 0) son los puntos de un rombo, y calcular su área.

9.- Demostrar que los puntos (2, -2), (-8, 4), (5, 3), son los vértices de un triángulo rectángulo, y hallar su área.

10.- Demostrar que los puntos (0, 1), (3, 5), (7, 2), (4, -2) son los vértices de un cuadrado.

11.- Uno de los puntos extremos de un segmento es el punto (7, 8), y su punto medio es (4, 3). Hallar el otro extremo.

12.- Una recta de pendiente 3 pasa por el punto (3, 2). La abscisa de otro punto de la recta es 4. Hallar su ordenada.

13.- Una recta de pendiente -2 pasa por el punto (2, 7) y por los puntos A y B. si la ordenada de A es 3 y la abscisa de B es 6. Hallar la abscisa de A y la ordenada de B.

14.- Tres de los vértices de un paralelogramo son (-1, 4), (1, -1) y (6, 1). Si la ordenada del cuarto vértice es 6. Hallar su abscisa.

15.- Demostrar que los puntos (2, 4), (7, 3), (6, -2) y (1, -1) son vértices de un cuadrado y que sus diagonales son perpendiculares y se dividen mutuamente en partes iguales.

16.- Demostrar que los puntos (2, 2), (5, 6), (9, 9) y (6, 5) son vértices de un rombo y que sus diagonales son perpendiculares y se cortan en su punto medio.

Capítulo II
Relaciones y Funciones

Capítulo II

Relaciones y funciones

En nuestra vida diaria vemos que existen muchas relaciones entre diversos conjuntos de objetos y un aspecto importante de la ciencia es establecer relaciones entre diversos tipos de fenómenos, una vez conocidas se pueden hacer proyecciones, por ejemplo a un economista le gustaría poder predecir las tasas de interés, dadas las tasas de cambio de la oferta de capitales, tasa de desempleo, crecimiento económico, etc.

En la ciencia pura como aplicada el manejo y establecimiento de relaciones es fundamental y en especial las ***funciones*** que representan uno de los conceptos más importantes de las matemáticas. El término función fue usado por primera vez en 1637 por el matemático francés René Descartes (Leithold, 2008).

Recordemos que los conjuntos pueden referirse a objetos además de números. Particularmente de ***Pares Ordenados*** quienes nos llevaran a los importantes conceptos de ***Relación y Función***.

2.1.- Pares ordenados:

Si escribiéramos el conjunto (a, b) y no tomamos en cuenta su orden ya que por definición (a, b) = (b, a) ambos serían un ***Par No Ordenado***. Si el orden fuera significativo los pares (a, b) y (b, a) serían ***Pares Ordenados*** con la propiedad de que (a, b) ≠ (b, a) al menos que a = b (Chiang & Wainwright, 2006).

Dado dos elementos en un cierto orden [(a; b) = (x; y)] constituyen un par ordenado, donde el elemento ***a*** se llama ***Primer Componente*** y el elemento ***b*** se llama ***Segundo Componente*** del par ordenado encerrado en un paréntesis, separados por un punto y coma.

Ejemplo 21.- **Si obtenemos la edad y peso de cada estudiante de la clase para formar un par ordenado (e, p) el primer elemento será la edad (años) y el segundo elemento el peso (kilos):**

"(19, 70) y (70, 19) tenemos dos pares ordenados y cada uno tiene un significado diferente pero el ultimo es poco probable que se ajuste a algún estudiante de la clase".

Como mencionamos en párrafos anteriores los pares ordenados son elementos de un conjunto infinito de puntos (x, y) llamado Plano Coordenado Rectangular, donde el Eje X y el Eje Y se cortan perpendicularmente formando 4 cuadrantes y en cada punto el primer elemento pertenece al Eje X o el de las Abscisas y el segundo elemento pertenece al Eje Y o el de las Ordenadas.

2.2.- Producto cartesiano:

El Producto Cartesiano resulta ser un conjunto de pares ordenados que satisface la propiedad tal que el primer elemento es del primer conjunto (X) y el segundo elemento es del segundo conjunto (Y).

Ejemplo 22.- **Determine el producto cartesiano de los siguientes conjunto:**

X = {1, 2}
Y = {3, 4}
X * Y = {(1, 3); (1, 4); (2, 3); (2, 4)}

2.3.- Relaciones y Funciones:

Una relación de X en Y es un subconjunto del producto cartesiano X * Y, puesto que todo par ordenado asocia un valor Y con un valor X, toda colección de pares ordenados constituirá una relación entre Y e X. Ahora si el valor de X viene dado, no siempre es posible determinar un único valor de Y a partir de una relación (Chiang & Wainwright, 2006).

Un caso especial de relación es aquel en el que para cada valor de X existe uno y solo un valor de Y donde el reciproco no es necesario en este caso se dice que Y es una función de X, y se denota de la siguiente manera:

$y = f(x)$ y se lee "Y igual a *f* de X".

Una relación puede ser:

- **Polivalente:** Cuando un elemento del dominio corresponde a más de un elemento de la imagen.
- **Monovalente:** Cuando cada elemento del dominio corresponde a un elemento de la imagen y a solo uno.
- **Biunívocas:** Cuando cada elemento de X corresponde a un elemento de Y y solamente a uno, y cada elemento de Y corresponde a un elemento de X y solamente a uno.

Una función es una correspondencia entre los elementos de dos conjuntos que asocia con cada elemento del primer conjunto un único elemento del segundo conjunto, es decir, no puede haber dos pares distintos (x, y) con el mismo primer miembro, las cantidades Y y X se denominan variables donde Y es la ***Variable Dependiente*** y X la ***Variable Independiente***.

El conjunto de todos los primeros miembros de los pares se llama ***Dominio de la función*** y el conjunto de todos los segundos elementos se llama ***Rango, Imagen, Recorrido de la función, Contradominio o Codominio*** (Hoffmann, Bradley, & Rosen, 2006).

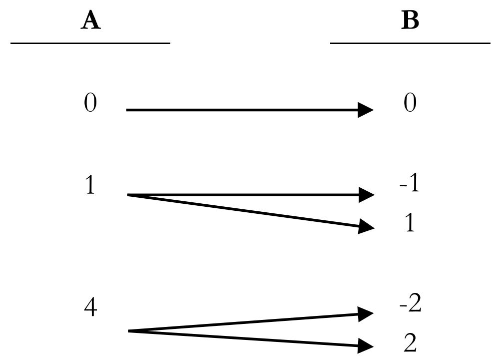
En la matemática para la elección de la Variable Independiente y la Variable Dependiente el proceso es sencillo, pero si analizamos un tema en particular predominará la lógica en el momento de la elección.

"Toda función es una relación, pero una relación pueda que no sea una función y una relación monovalente es una función".

Una relación funcional se representa mediante una ecuación, al sustituir un valor de X se dice que el resultado es el Valor de la función o Valor Funcional para dicho valor de X. ***Si tenemos una ecuación de dos variables, a cada valor de la variable independiente le corresponde precisamente un y solo un valor a la variable dependiente, entonces, la ecuación determina una función. Si hay más de un resultado para un valor sustituido, entonces la ecuación no determina una función.***

<u>Ejemplo 23.-</u> **Tenemos el conjunto A y sus elementos los números 0, 1 y 4, sus raíces, a saber, 0, 1, -1, 2, -2 como elementos de un segundo conjunto B. Así:**

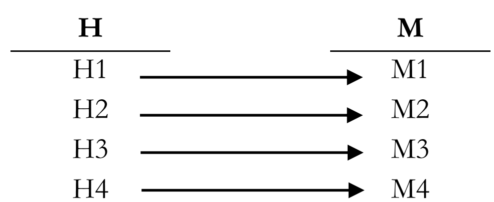
A = (0, 1, 4)
B = (0, 1, -1, 2, -2)



Es una relación.

Ejemplo 24.- **Tenemos un hotel que alquila sus suites a 4 parejas de recién casados para que pasen su luna de miel. Si A es el conjunto de los esposos y B el conjunto de las esposas, entonces:**

A = (H1, H2, H3, H4)
B = (M1, M2, M3, M4)



La relación es una función.

Ejemplo 25.- **Para cada una de las relaciones siguientes establezca el dominio, contradominio e indique si es o no una relación:**

S = {(1, 3); (2, 3); (2, 4); (3, 2); (4, 1); (5, 5)}
Como hay dos pares ordenados con un mismo primer elemento es una relación. Su dominio es el conjunto D = {1, 2, 3, 4, 5} y el contradominio es el conjunto C = {3, 4, 2, 1, 5}.

T = {(1, 3); (2, 3); (3, 3); (4, 3)}

Como no hay dos pares ordenados con un mismo primer elemento es una función. Su dominio es D = {1, 2, 3, 4} y su contradominio es C = {3}.

U = {(x, y): y = 4x + 1, si $0 \leq x \leq 2$}

Como no hay dos pares ordenados con un mismo primer elemento es una función. Su dominio es D = {$0 \leq x \leq 2$} y su contradominio es C = {$1 \leq x \leq 9$}.

V = {(x, y): $y^2 = x$, y es un entero}

Como los pares ordenados tienen un mismo primer elemento es una relación.

Ejemplo 26.- **Dada las siguientes funciones obtenga los valores funcionales dado el valor de (x):**

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{3x^2-8}{x-1}}, \text{ obtenga } f(3);\ f(-1)$$

$f(3) = \frac{3(3)^2-8}{3-1} = \frac{27-8}{2} = \frac{19}{2}$

$f(-1) = \frac{3(-1)^2-8}{-1-1} = \frac{3-8}{-2} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x}{x-3}}, \text{ obtenga } f(3);\ f(0)$$

$$f(3) = \frac{3}{3-3} = \frac{3}{0} = \infty$$

$$f(0) = \frac{0}{0-3} = \frac{0}{-3} = 0$$

2.3.1.- Dominio y Rango de una función:

En general el dominio consiste en todos los valores x que están incluidos en la gráfica, y el rango son todos los valores y en esa gráfica (Haeussler, Paul, & Wood, 2008).

Ejemplo 27.- **Halle el dominio y el rango de cada una de las siguientes funciones:**

a) $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x-3}}$

Puesto que es posible dividir entre cualquier entre cualquier número real distinto de 0, el dominio de f es el conjunto de todos los números $x \neq 3$. El rango de f es el conjunto de todos los números reales y excepto el 0, ya que para cualquier $y \neq 0$ existe un x tal que $y = \frac{1}{x-3}$ (Hoffmann, Bradley, & Rosen, 2006).

b) $\boldsymbol{g(t) = \sqrt{t-2}}$

Cómo los números negativos no tienen raíces cuadradas reales, $g(t)$ puede calcularse sólo cuando $t-2 \geq 0$, de manera que el dominio de g es el conjunto de todos los números t tales que $t \geq 2$. El rango de g es el conjunto de todos los números no negativos, debido a que la respuesta en número reales no puede arrojar resultados negativos (Hoffmann, Bradley, & Rosen, 2006).

Ejemplo 28.- **Encuentre la función el dominio y el rango:**

$f(x) = \sqrt{2x-3}$
$D = \{x / x \geq 2\}$
$R = \{y \geq 1\}$

$f(x) = \sqrt{x^2-1}$
$D = \{R, x \neq 0\}$
$R = \{y \geq 0\}$

2.4.- Clasificación de las funciones:

2.4.1.- Funciones algebraicas

Son funciones expresadas en términos de polinomios y/o raíces de polinomios. Se clasifican en:

1. ***Funciones constantes:*** Función cuyo rango está constituido por un solo elemento (ver figura 21). Se denotan por $y = k$.

Ejemplo: $y = 4$
Ejemplo: $x = 7$

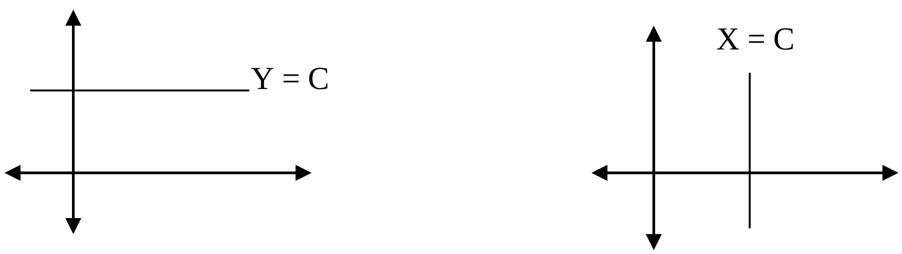


Figura 21

Donde k es un número real.

2. ***Funciones polinomiales:*** La palabra polinomial significa "varios términos" (Chiang & Wainwright, 2006). Por lo expuesto son funciones multitérminos, y una función polinomial de una variable X se denota por:

$$y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \dots\dots\dots + a_nX^n$$

Donde cada término contiene un coeficiente (a_i), así como una potencia entera no negativa de la variable X. Estas funciones se clasifican de acuerdo al grado de un término y el grado del polinomio será el del término o términos de mayor grado. Se clasifican en:

- **Función lineal o primer grado:** Se denota por: $y = a_0 + a_1X$. Su gráfica es una línea recta (ver figura 22). Ejemplo: $y = 2x - 3$

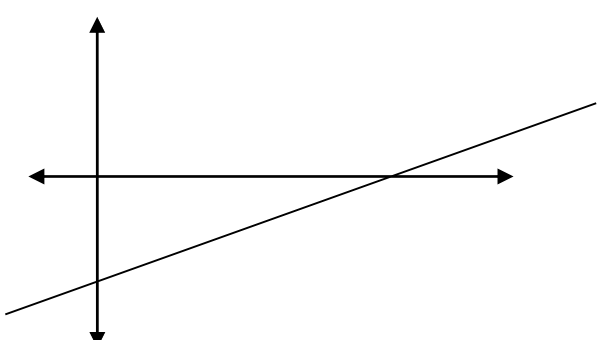


Figura 22

- **Función cuadrática o segundo grado:** Se denota por: $y = a_0 + a_1X + a_2X^2$. Su gráfica es una parábola (ver figura 23). Ejemplo: $y = 2x^2 – 3x + 2$

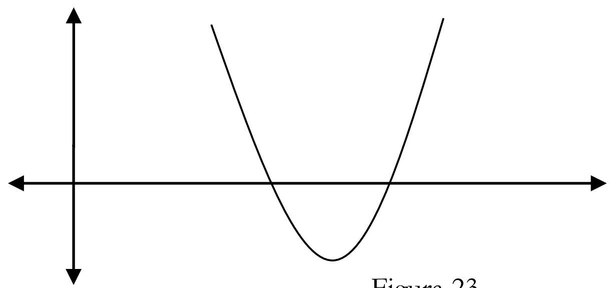


Figura 23

- **Función cúbica o tercer grado:** Se denota por: $y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$. Su gráfica se muestra en la figura 24. Ejemplo: $y = x^3 – 2x^2 + x – 1$

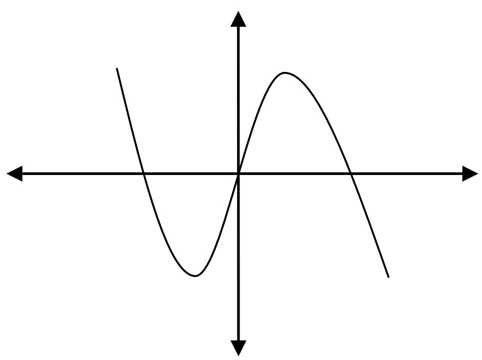


Figura 24

Y así sucesivamente.

3. ***Funciones racionales:*** Son funciones en la que Y se expresa como la razón entre dos polinomios en la variable X (ver figura 25). Según Chiang & Wainwright (2006), cualquier función polinomial debe ser por sí misma una función racional, porque siempre puede expresarse como una razón respecto a 1, y 1 es una función constante, se denota por:

$y = P(x)/Q(x)$. Ejemplo: $Y = 2x/(x – 3)$
$y = a/x$. Ejemplo: $Y = 1/x$

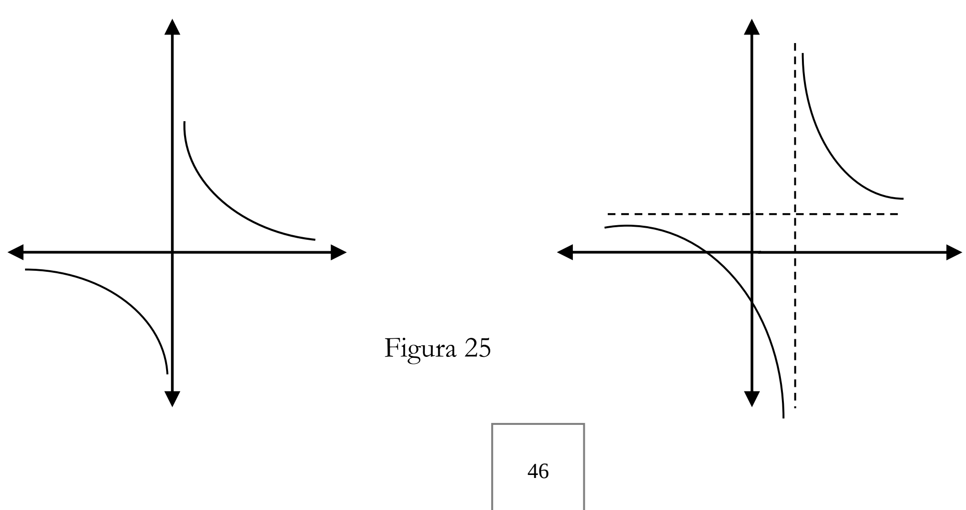


Figura 25

2.4.2.- Funciones no algebraicas

Entre este tipo de funciones tenemos las funciones exponenciales, logarítmicas y las trigonométricas, pero solo nos enfocaremos en las dos primeras más adelante. A las funciones no algebraicas también se las conoce por el nombre más esotérico de funciones trascendentes (Chiang & Wainwright, 2006).

1. Función exponencial: Se llama función exponencial de base ***a*** a la función *f* , su gráfica la denota la figura 26 y está definida por:

$$\boldsymbol{y = a^x}$$

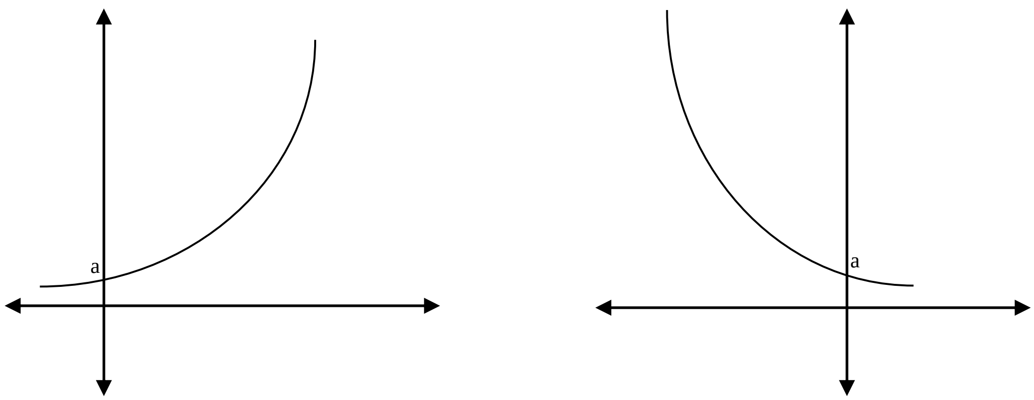


Figura 26

Dónde: (a > 0) o (0 < a < 1)

2. Función logarítmica: Es la función inversa de la función definida por Y = a^x (ver figura 27), donde (a > 0) o (0 < a < 1), pero a ≠ 1, se denota por:

$$\boldsymbol{y = \log_a x}$$

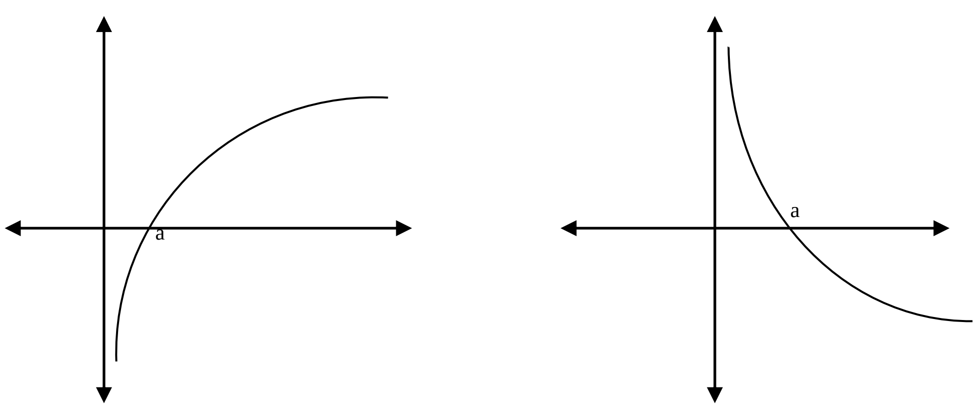


Figura 27

Y se lee: logaritmo de X en base a

Este tipo de funciones no algebraicas, por aspectos metodológicos y pedagógicos, serán estudiadas en el capítulo 6.

2.5.- Funciones especiales:
2.5.1.- Función compuesta
La función compuesta denotada por *f* o *g*, de dos funciones *f* y *g*, se define como:

$$(fog)(x) = f[g(x)]$$

Y el dominio de *f* o *g* es el conjunto de todos los números x del dominio de *g*, tales que *g*(x) este en el dominio de *f*.

La definición nos indica que, al calcular (*f* o *g*)(x), primero debemos aplicar la función *g* a "x" después de la función *f* a *g*(x).

Ejemplo 29.- **Encuentre la función compuesta $\boldsymbol{f(g_{(x)})}$:**

$\boldsymbol{f(u) = u^2 + 4,\ g(x) = x - 1}$

Reemplazamos el valor de lo que vale $g(x)$ en cada variable u.

$f(g_{(x)}) = (x+1)^2 + 4$
$f(g_{(x)}) = x^2 + 2x + 1 + 4$
$f(g_{(x)}) = x^2 + 2x + 5$

$\boldsymbol{f(u) = (2u + 10)^2,\ g(x) = x + 5}$

Reemplazamos el valor de lo que vale $g(x)$ en cada variable u.

$f(g_{(x)}) = [2(x+5) + 10]^2$
$f(g_{(x)}) = [2x + 10 + 10]^2$
$f(g_{(x)}) = [2x + 20]^2$
$f(g_{(x)}) = 4x^2 + 80x + 400$

$\boldsymbol{f(u) = \frac{1}{u},\ g(x) = x^2 + x - 2}$

Reemplazamos el valor de lo que vale $g(x)$ en cada variable u.

$$f(g_{(x)}) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$$

2.5.2.- Función inversa

Si es posible intercambiar el dominio y el rango de cualquier relación, para formar una nueva; donde cada pareja de elementos se obtiene intercambiando los elementos de un par ordenado en la relación original; tales conjuntos de pares ordenados son "Relaciones Inversas" y si ambas relaciones son funciones se denomina "Función Inversa" (Barnett, Ziegler, & Byleen, 2000).

La relación inversa es una función si y solo si la función original es tal que a cada elemento de su rango le corresponde uno y solo un elemento del dominio, es decir, si cada valor de Y le corresponde un único valor de X; la función es entonces una función uno a uno.

$$\boldsymbol{y = f(x) \rightarrow x = f^{-1}(y) \rightarrow y = f^{-1}(x)}$$

Propiedades de las funciones inversas

Si f^{-1} existe, entonces:

1) f^{-1} es una función uno a uno
2) Dominio de $f^{-1} =$ Rango de f
3) Rango de $f^{-1} =$ Dominio de f

Ejemplo 30.- **Obtenga la función inversa de las siguientes funciones:**

$\boldsymbol{y = 2x - 1}$

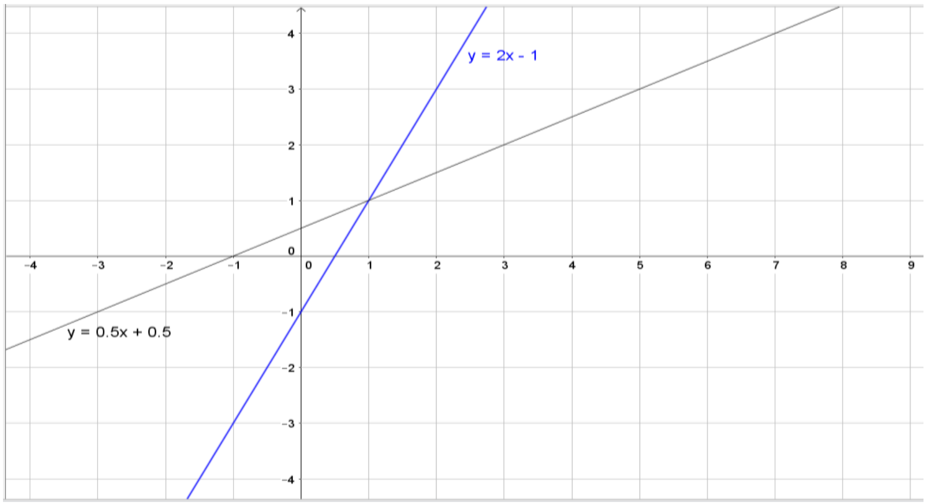
Despejaremos en función de x

$y + 1 = 2x$

$\frac{1}{2}y + \frac{1}{2} = x$

$x = f^{-1} = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$

$y' = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}$



$\boldsymbol{y = 4 - x^2}$

Despejaremos en función de x

$x^2 = 4 - y$

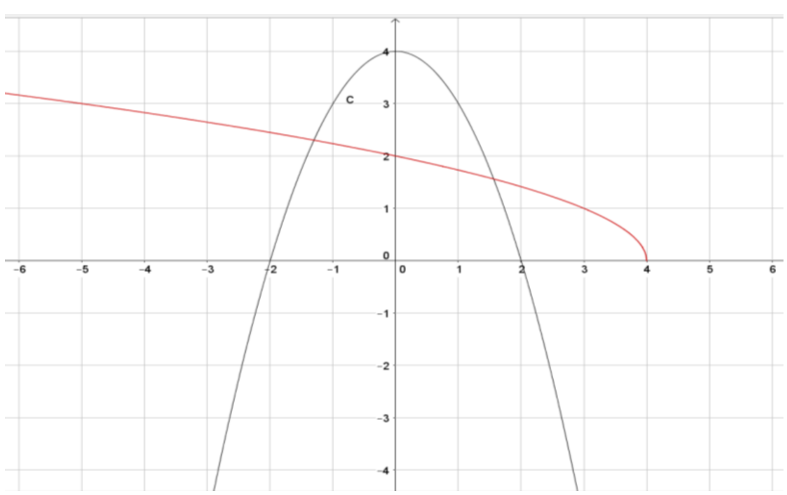
Sacamos raíz cuadrada de ambos lados para despejar en función de x

$\sqrt{x^2} = \sqrt{4 - y}$

$x = \pm\sqrt{4 - y}$

$x = f^{-1} = \pm\sqrt{4 - y}$

$y' = \pm\sqrt{4 - x'}$



$\boldsymbol{y = 4 - 2x}$

Despejaremos en función de x

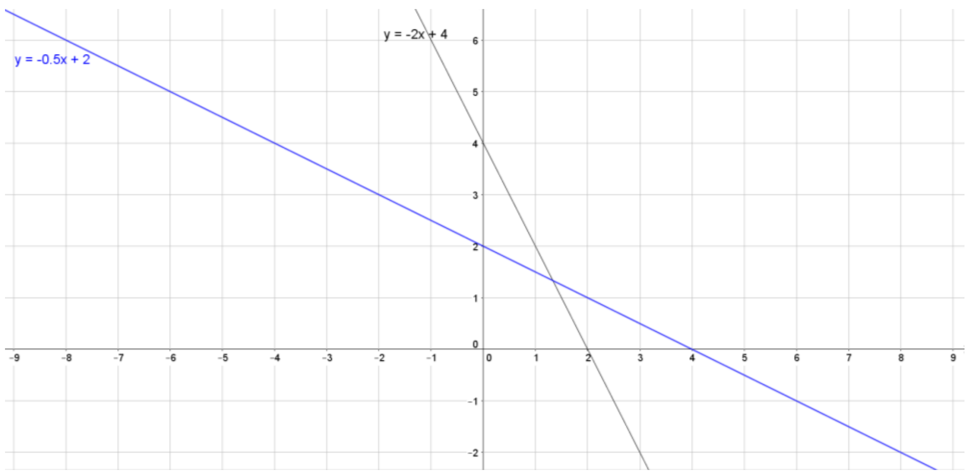
$y - 4 = -2x$

Podemos multiplicar ambos términos por -1, para facilitar que la variable x no sea negativa, o, simplemente pasamos el -2 a dividir a la expresión del lado izquierdo.

$-\frac{1}{2}y + \frac{4}{2} = x$

$x = f^{-1} = -\frac{1}{2}y + \frac{4}{2}$

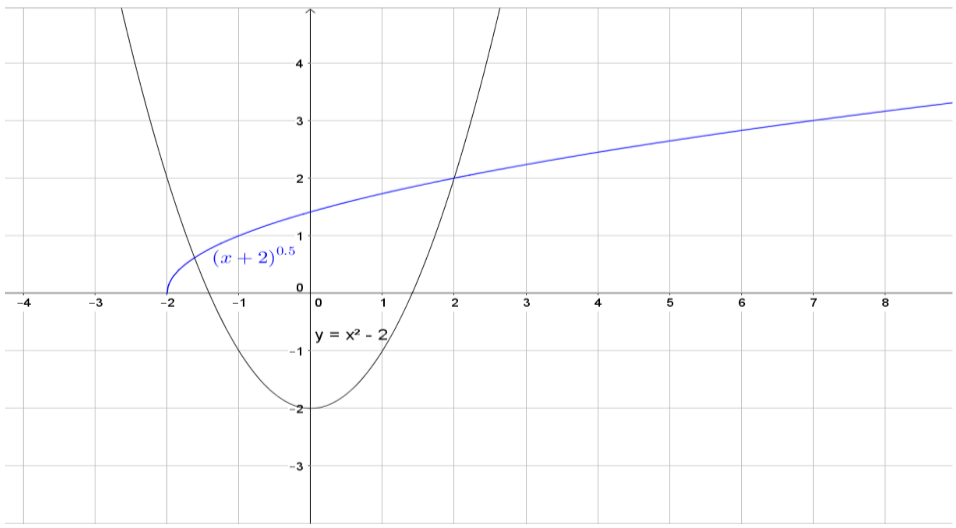
$y' = -\frac{1}{2}x' + \frac{4}{2}$



$\boldsymbol{y = \sqrt{x + 2}}$

Despejaremos en función de x, para ello elevaremos al cuadrado a ambos lados.

$y^2 = (\sqrt{x + 2})^2$
$y^2 = x + 2$
$y^2 - 2 = x$
$x = f^{-1} = y^2 - 2$
$y' = x'^2 - 2$



2.6.- Gráfica de una función:
Para la representación geométrica de una función Y = f(x) como un gráfico es común usar el plano cartesiano. A continuación, detallamos tres pasos que facilitaran dicho proceso, pero más adelante lo ampliaremos:

- Seleccione un grupo representativo de números de **x** del dominio de f y elabore una tabla de valores de la función Y = f(x) para tales números.
- Representar los números correspondientes (x, y).
- Unir los puntos representativos con una línea uniforme.

Para graficar una parábola de forma general tomamos en consideración los siguientes pasos:

1. Localizar el vértice:
   X = -B/2A
   Y = -B/2A
2. Ver hacia donde abre
3. Intercepción con ejes

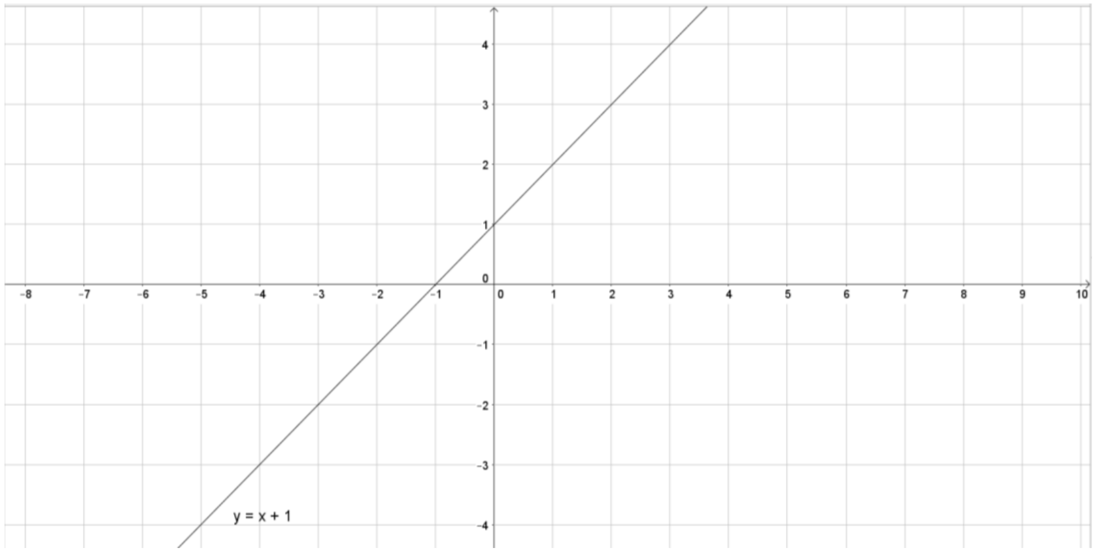
Para graficar una recta de forma general tomamos en consideración solo la intercepción con ejes y trazamos una recta entre los dos puntos.

Ejemplo 31.- **Dadas las siguientes funciones grafíquelas:**

$y = x + 1$
$y = x^2 - 1$
$y = x^3$

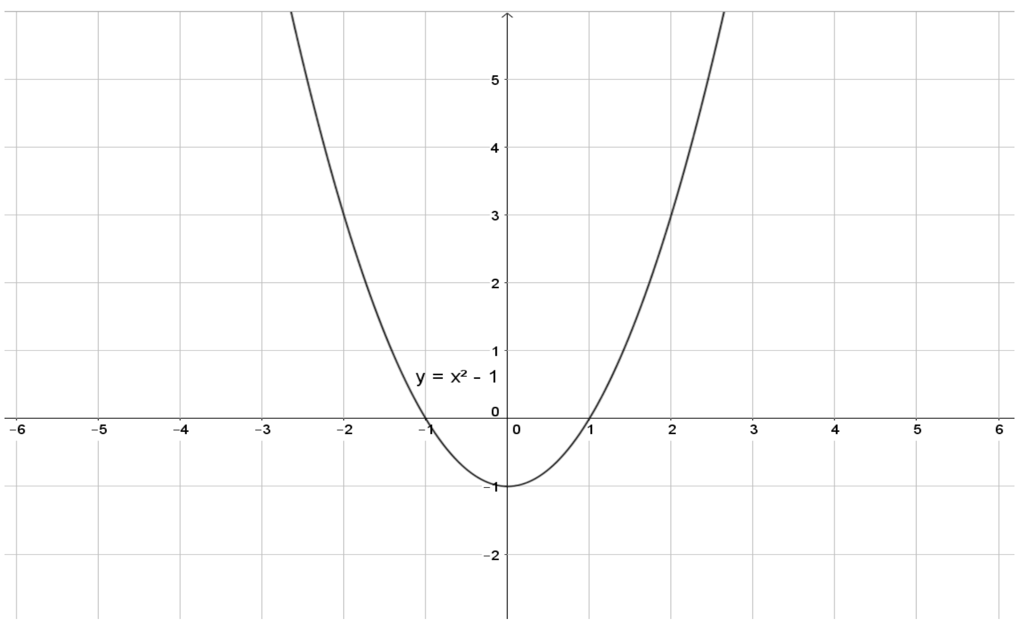
$y = x + 1$

X	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
Y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6



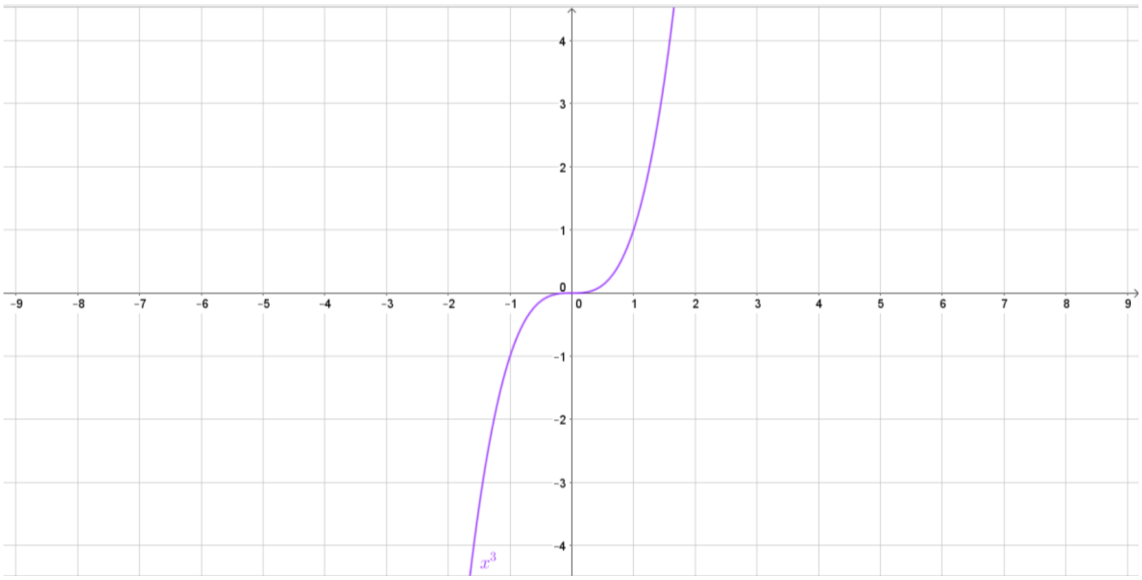
y = x² - 1

X	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
Y	24	15	8	3	0	-1	0	3	8	15	24



$y = x^3$

X	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
Y	-125	-64	-27	-8	-1	0	1	8	27	64	125



Laboratorio 2

1.- Determinar si las siguientes relaciones son o no funciones, el conjunto dominio y el conjunto contradominio.

a) {(-1, 3), (0, 2), (1, 1)}
b) {(2, 1), (4, 3), (6, 5)}
c) {(1, 3), (3, 5), (3, 7), (5, 7), (5, 9)}
d) {(-1, 0), (-1, 5), (-2, 5), (-3, 8)}
e) {(-1, 3), (0, 3), (1, 3), (2, 3)}
f) {(2, 8), (3, 8), (4, 9), (5, 9)}

2.- Dadas las siguientes ecuaciones indique cual es relación y cual es función. Establezca su dominio y contradominio.

a) $y = 3 - x$
b) $y = 2x^2 - 3x + 5$
c) $y^2 - x = 2$
d) $x^2 + y^2 = 81$
e) $y^3 = x$
f) $y = \sqrt{(x + 1)}$
g) $y = \sqrt{x^2 + x - 12}$

3.- Grafique las siguientes funciones. Donde $-6 \leq x \leq 6$.

a) $y = x^3 + x$
b) $y = x^2 + 1$
c) $y = 2x + 4$
d) $y = \frac{x+3}{x-2}$
e) $y = 3x^3 - 4x$
f) $y = 2x^2 - 3x + 4$
g) $y = 7x^6 - x^4 + 7$

4.- Dada las siguientes funciones obtenga los valores funcionales dado el valor de (x):

a) $f(x) = x^3 - x^2 + 6$, obtenga $f(0); f(-2)$
b) $f(y) = \sqrt{\frac{y^2-4}{y}}$, obtenga $f(-1); f(4)$

5.- Obtenga el producto cartesiano de los siguientes conjuntos:

A = {2, 3, 4, 5}
B = {7, 6, 8}
C = {a, b, c, d}
D = {9, 10, 11, 12, 13}

a) A x B
b) C x D
c) A x C
d) B x D
e) A x D
f) B x C

6.- Encuentre la función (*f* o g)(x) y sus dominios:

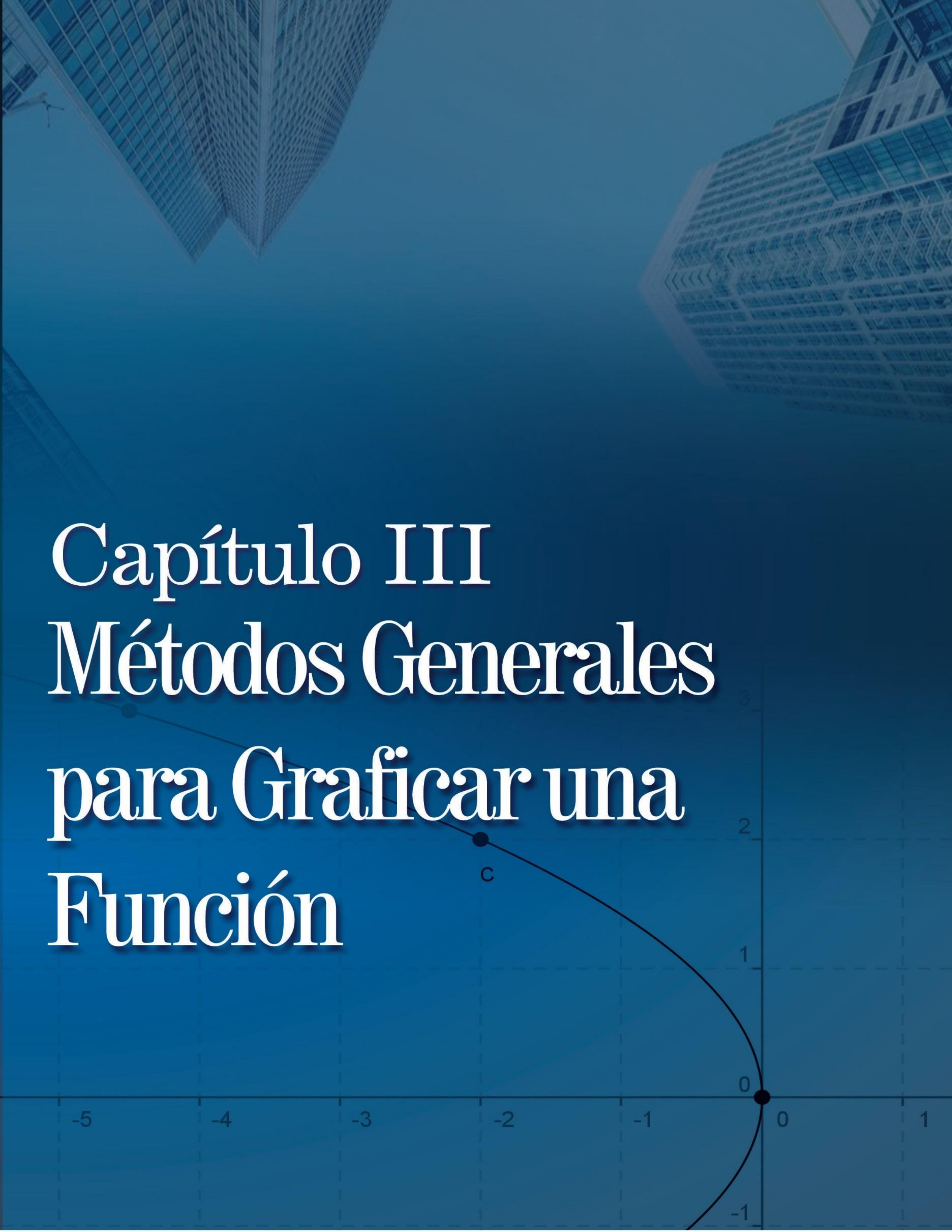
a) $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = \frac{x-1}{2}$

b) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ y $g(x) = \sqrt{x - 1}$

c) $f(x) = x^{2/3}$ y $g(x) = 8 - x^3$

d) $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3 + 2x + 4$

Capítulo III
Métodos Generales para Graficar una Función



Capítulo III

Métodos generales para graficar una función

3.1.- Discusión de una función

Según Lehmann (1980), dentro de la Geometría Analítica existen dos problemas fundamentales a saber:

- Dada una ecuación interpretarla geométricamente, es decir, construir la gráfica correspondiente.
- Dada una figura geométrica, o la condición que deben cumplir los puntos de la misma, determinar su ecuación.

Como vemos ambos problemas están íntimamente relacionados, juntos constituyen el problema fundamental de toda la Geometría Analítica. Para nuestros fines los tomaremos por separado para tomar en consideración a la vez ciertos conceptos. Pasaremos a analizar el primer problema.

3.1.1.- Gráfica de una ecuación

Si tenemos una ecuación de dos variables sean estas Y y X, denotada por:

$$\boldsymbol{f\ (x, y)\ =\ 0}$$

"El conjunto de los puntos, y solamente de aquellos puntos cuyas coordenadas satisfagan una ecuación pertenecen a la gráfica de la ecuación, se llaman ***gráfica de la ecuación*** o su ***lugar geométrico***" (Leithold, 2008). Estos puntos se localizaran de forma tal que tomados en conjunto forman un trazado definido llamado curva, gráfica o lugar geométrico.

3.1.2.- Intercepción con los ejes

Las intercepciones de una curva con los ejes coordenados no es más que los puntos en los que corta los ejes (Lehmann, 1980). La intercepción con el Eje X se la obtiene dando un valor de $Y\ =\ 0$ en la ecuación de la curva y se despeja X obteniendo el punto $(a, 0)$. La intercepción con el eje Y se la obtiene dando un valor de $X\ =\ 0$ en la ecuación de la curva y se obtiene el punto $(0, b)$.

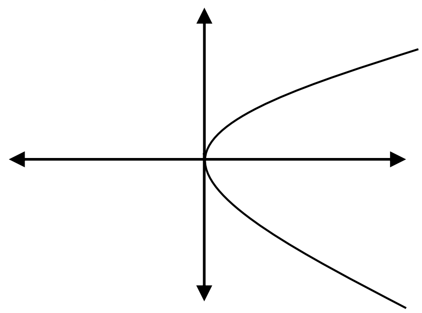
3.1.3.- Simetría

En este punto nos interesa saber si la curva es simétrica respecto al origen o respecto con algunos de los ejes coordenados (Lehmann, 1980).

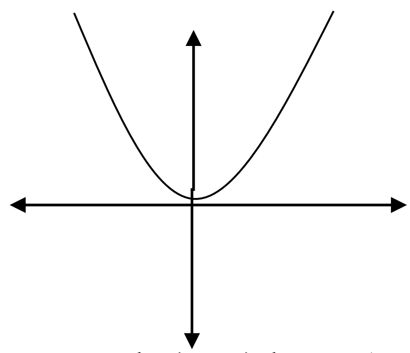
La simetría es la correspondencia exacta en forma, tamaño y posición de las partes de un todo (Lehmann, 1980), un ejemplo de simetría es el Hombre de Vitruvio de Leonardo da Vinci.
Como características de la simetría tenemos:

- Se dice que dos puntos son simétricos con respecto a una recta si la recta es perpendicular al segmento que los une en su punto medio y la recta se llama eje del Segmento. También podemos decir que dos puntos son simétricos con respecto a un punto O si O es el punto medio del segmento que los une.

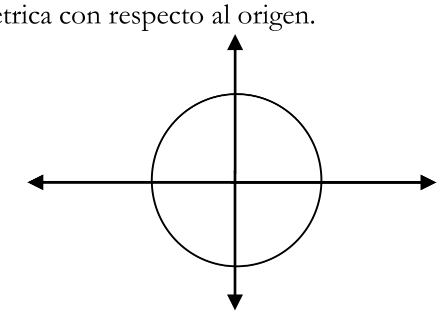
- Una curva es simétrica con respecto a un eje de simetría cuando para cada punto de la curva hay un punto correspondiente también de la curva, tal que estos dos puntos son simétricos con respecto al origen.
- Una curva es simétrica con respecto a un centro de simetría O cuando para cada punto de la curva hay un punto correspondiente, también de la curva, tal que estos dos puntos son simétricos con respecto a O.
- Una curva es simétrica con respecto al eje x si el punto (a, -b) está en la gráfica siempre que (a, b) está en ella, es decir, si la ecuación de un curva no se altera cuando la variable y es reemplazada por (-y), la curva es simétrica con respecto al eje x.



- Una curva es simétrica con respecto al eje y si el punto (-a, b) está en la gráfica siempre que (a, b) está en ella, es decir, si la ecuación de un curva no se altera cuando la variable x es reemplazada por (-x), la curva es simétrica con respecto al eje y.



- Una curva es simétrica con respecto al origen si el punto (-a, -b) está en la gráfica siempre que (a, b) está en ella, es decir, si la ecuación de un curva no se altera cuando el punto (x, y) es reemplazada por (-x, -y), la curva es simétrica con respecto al origen.

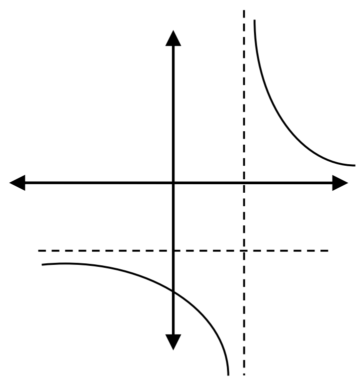


3.1.4.- Extensión

En este punto básicamente debemos considerar las limitaciones de la curva especialmente cuando tratamos con raíces ya que no hay raíces de números negativos en los números reales y cuando tratemos funciones racionales.

3.1.5.- Asíntota

Si para una curva dada, exista una recta tal que, a medida que un punto de la curva se aleja indefinidamente del origen, la distancia de ese punto a la recta disminuye continuamente y tiende a cero. La recta se llama ***Asíntota de la Curva***.



3.1.6.- Factorización

En este punto tenemos que considerar que si una ecuación se puede factorizar para poderla graficar tenemos que hacerlo caso contrario su gráfica sería difícil.

3.1.7.- Lugares geométricos reales o imaginarios

Cuando una ecuación es satisfecha por una coordenada o por un número finito de ellas su gráfica se denomina ***lugar geométrico real***. Cuando la ecuación es satisfecha por un punto imaginario su gráfica no tiene representación en un sistema de ejes reales se denomina ***lugar geométrico imaginario***.

Ejemplo 32.- **Dadas las siguientes ecuaciones grafíquelas aplicando los métodos generales de traficación:**

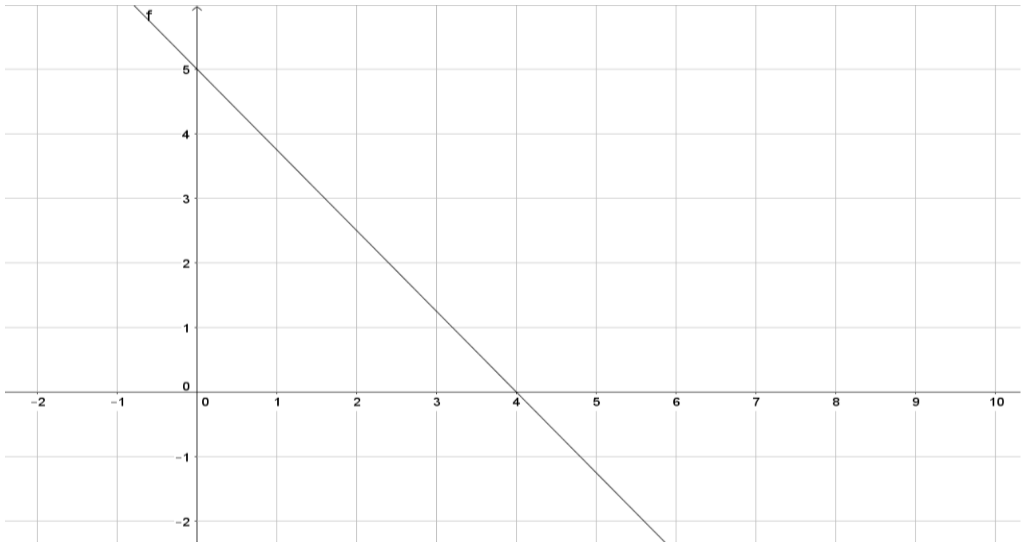
a) $5x + 4y - 20 = 0$

Intercepción con ejes:

$x = 0 \rightarrow y = 5$ (0, 5)
$y = 0 \rightarrow x = 4$ (4, 0)

Simetría:
$5(-x) + 4y - 20 = 0 \rightarrow$ No tiene simetría con el eje y.
$5x + 4(-y) - 20 = 0 \rightarrow$ No tiene simetría con el eje x.
$5(-x) + 4(-y) - 20 = 0 \rightarrow$ No tiene simetría con el origen.

Extensión: No tiene ningún limitante que interrumpa la continuidad de la gráfica.
Asíntota: No tiene.
Factorable: No es necesario.
Lugar geométrico: Es una recta descendente.



b) $3x^2 + 3y^2 = 10$

Intercepción con ejes:

$x = 0 \rightarrow y = \pm\sqrt{10/3}$

$y = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{10/3}$

Simetría:

$3(-x)^2 + 3y^2 = 10 \rightarrow$ Si tiene simetría con el eje y.

$3x^2 + 3(-y)^2 = 10 \rightarrow$ Si tiene simetría con el eje x.

$3(-x)^2 + 3(-y)^2 = 10 \rightarrow$ Si tiene simetría con el origen.

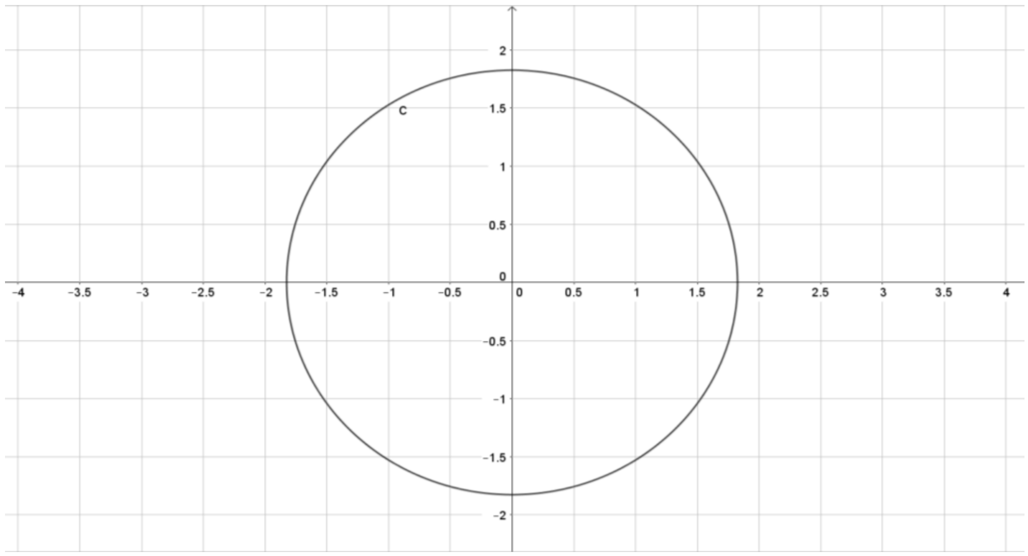
Extensión:

$$y = \pm\sqrt{\frac{10 - 3x^2}{3}}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{10 - 3x^2}{3}}$$

Los valores que asuma y o x tienen que dar una cantidad positiva, porque no existe raíz cuadrada de cantidades negativas.

Asíntota: No tiene.
Factorable: No es necesario.
Lugar geométrico: Es una circunferencia.



c) xy – 2y – 3 = 0

Intercepción con ejes:
$x = 0 \rightarrow y = -3/2$
$y = 0 \rightarrow x =$ No tiene intercepción con el eje x.

Simetría:
$(-x)y - 2y - 3 = 0 \rightarrow$ No tiene simetría con el eje y.
$x(-y) - 2(-y) - 3 = 0 \rightarrow$ No tiene simetría con el eje x.
$(-x)(-y) - 2(-y) - 3 = 0 \rightarrow$ No tiene simetría con el origen.

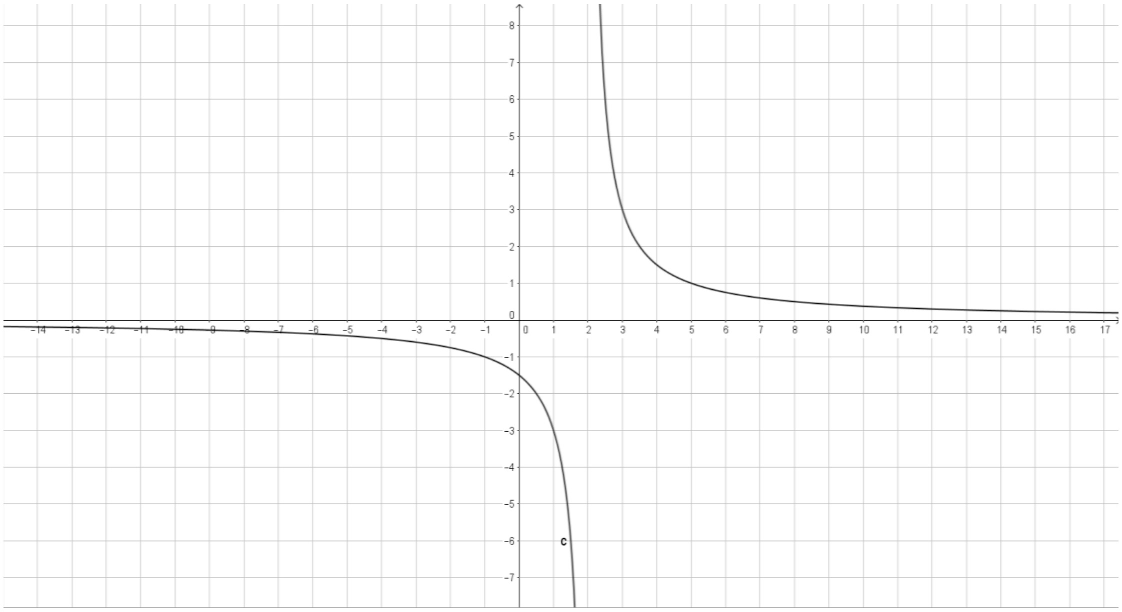
Extensión:
$y = 3 / (x - 2)$

$x = (3/y) + 2$

Cuando y = 0 y x = 2 la ecuación no está definida por lo que su gráfica es discontinua en esos puntos.

Asíntota:
Cuando Y = 0 y X = 2.

Factorable: No es necesario.
Lugar geométrico: Es una curva.



d) $y^3 + xy^2 - xy - x^2 = 0$

Factorable:

Si es necesario factorizarla para poder trabajar con ella.

$y^3 + xy^2 - xy - x^2 = 0$

$y^2(y + x) - x(y + x) = 0$

$(y + x)(y^2 - x) = 0$

Intercepción con ejes:

$y + x = 0$	$y^2 - x = 0$
$x = 0 \rightarrow y = 0$ (0, 0)	$x = 0 \rightarrow y = 0$ (0, 0)
$y = 0 \rightarrow x = 0$ (0, 0)	$y = 0 \rightarrow x = 0$ (0, 0)

Simetría:

$(-y)^2 - x = 0 \rightarrow$ Si tiene simetría con el eje x.

$y^2 - (-x) = 0 \rightarrow$ No tiene simetría con el eje y.

$(-y)^2 + (-x) = 0 \rightarrow$ No tiene simetría con el origen.

Extensión:

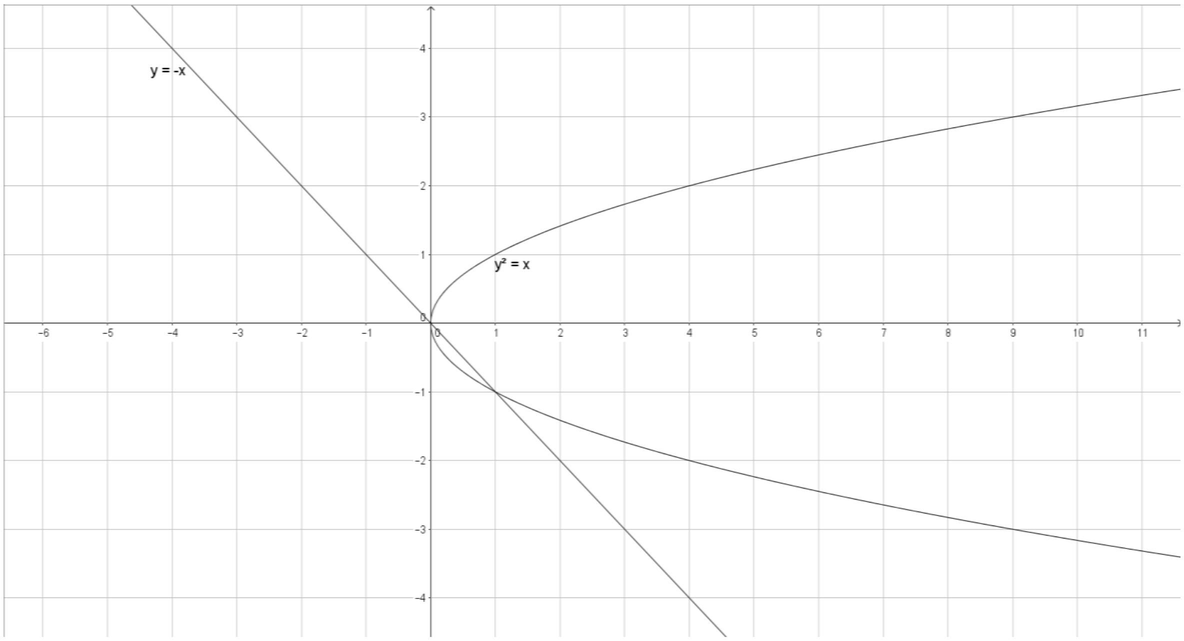
$y + x = 0$ Es una recta por lo que no tiene limitante alguna

$y^2 - x = 0 \rightarrow x = y^2$; no existe limitante alguno

$y^2 - x = 0 \rightarrow y = \sqrt{x}$; si existe limitante porque $x \geq 0$

Asíntota: No tiene.

Lugar geométrico: Es una curva.


y = -x
y² = x

Laboratorio 3

1.- Discuta las siguientes ecuaciones por los métodos vistos:

a) $x^2y = 10$

b) $y = x(x – 3) (x + 4)$

c) $y = x^4 - x^2$

d) $y = x^3 - 4x$

e) $4y = x^3$

f) $x^2y - x^2 - 4y = 0$

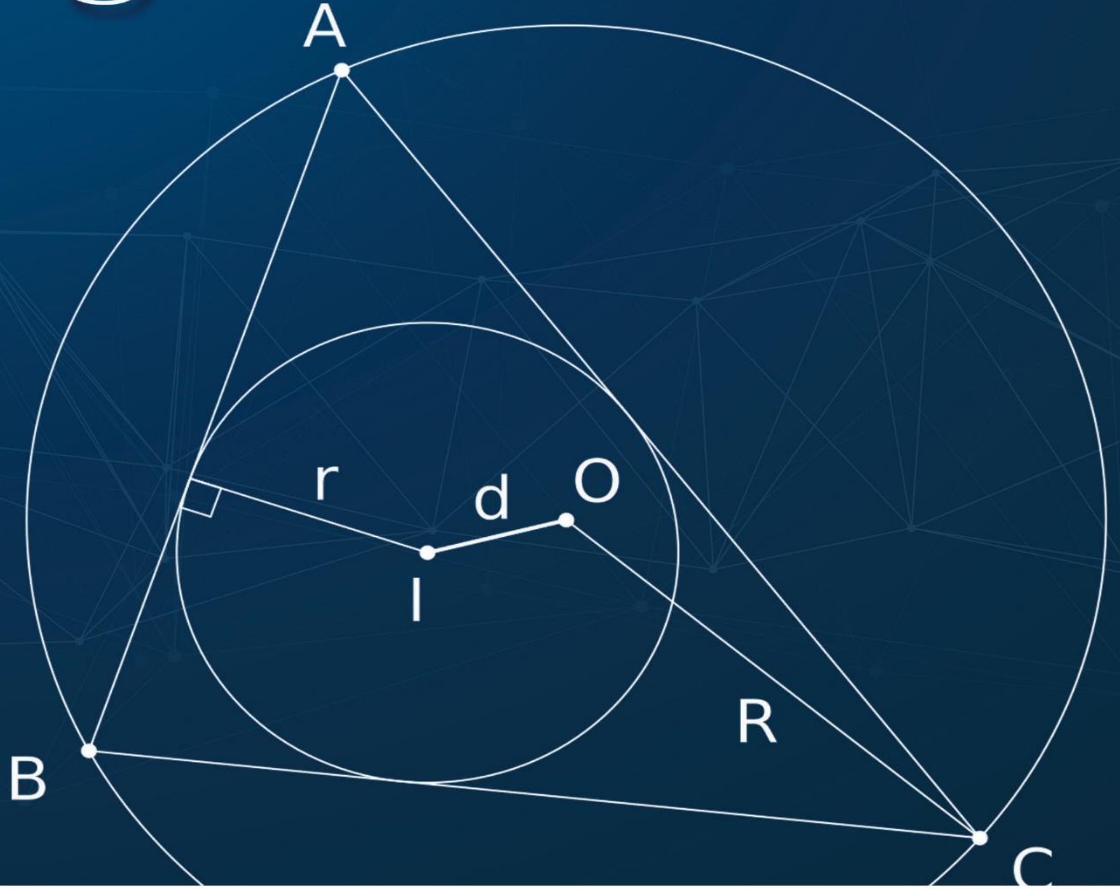
g) $x^4 + x^2 - y^2 - y = 0$

h) $xy – y – x – 2 = 0$

i) $y = x\sqrt{9 - x^2}$

j) $y = (x – 3) (x^2 - 4x – 5)$

Capítulo IV
Desigualdades



Capítulo IV

Desigualdades

Las desigualdades en la vida real son de vital de importancia, por ejemplo: una empresa puede recibir hasta 50 empleados y/o producir no menos de 500 unidades para poder tener utilidades.

4.1.- Definición

Si a y b son números reales:

- ✓ Si a < b si y solo si (b – a) > 0
- ✓ Si a > b si y solo si (a – b) < 0
- ✓ Si existe un número real positivo "p" tal que a + p = b o b – a = p

Una desigualdad es un enunciado que denota que una expresión es mayor que (>), mayor que o igual ($\geq$), menor que (<), o menor que o igual ($\leq$) a otra expresión.

Según Swokowski (2011), resolver una desigualdad significa encontrar todas las posibles soluciones. Dos desigualdades son equivalentes si tienen exactamente las mismas soluciones.

Una solución de una desigualdad es un par ordenado (a, b) que satisface la desigualdad. La gráfica de una desigualdad es la gráfica de todas las soluciones (Ress, Sparks, & Sparks, 2007).

Para saber si una región en particular es parte de la solución de la gráfica de la desigualdad, elijase cualquier punto que esté en la región, pero no en su frontera, y véase si sus coordenadas satisfacen la desigualdad. Al dibujar la gráfica de una desigualdad se sombreará la gráfica de la solución (Ress, Sparks, & Sparks, 2007).

Si se utilizan los signos de desigualdad $\leq o \geq$, entonces, en la gráfica se debe utilizar un trazado de línea sólida o continua; mientras si los signos son $< o >$. Entonces, en la gráfica se debe utilizar un trazado de línea a trazos o discontinua.

<u>**Ejemplo 33.-**</u> **2 < 6 pues 6 – 2 = 4, y 4 es positivo.**

Los símbolos de desigualdad tienen una interpretación geométrica muy clara en el eje numérico real.

Si 2 < 6, 2 está a la izquierda de 6.

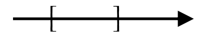
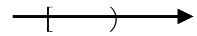
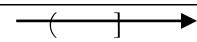
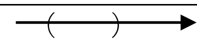
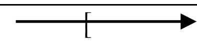
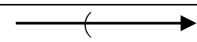
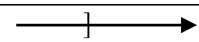
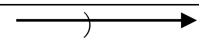
- ➢ Las expresiones con < o > son desigualdades estrictas.
- ➢ Las expresiones con ≤ o ≥ son desigualdades no estrictas.

Si un número "x" está entre a y b si a < x y x < b la expresión será una desigualdad continua.

- ➢ a < x < b → (a, b) → {x/a < x < b} → Intervalo abierto

- ➢ a ≤ x ≤ b → [a, b] → {x/a ≤ x ≤ b} → Intervalo cerrado

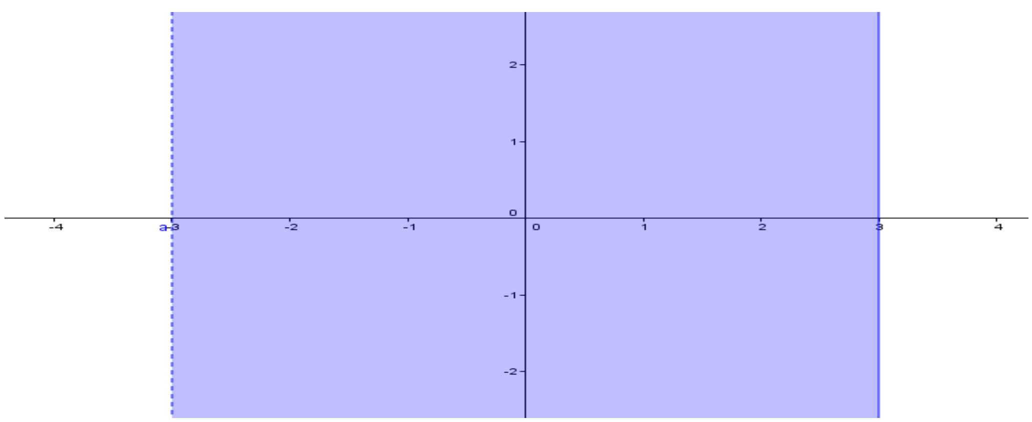
Relación entre: Notación de intervalo, notación de desigualdad, gráfico lineal y tipo de intervalo

Notación de intervalo	Notación de desigualdad	Gráfica de línea	Tipo
[a, b]	a ≤ x ≤ b		Cerrado
[a, b)	a ≤ x < b		Semiabierto
(a, b]	a < x ≤ b		Semiabierto
(a, b)	a < x < b		Abierto
[b, ∞)	X ≥ b		Cerrado
(b, ∞)	X > b		Abierto
(-∞, a]	X ≤ a		Cerrado
(-∞, a)	X < a		Abierto

__Ejemplo 34.-__ **Escribir lo siguiente en notación de intervalo y graficar en un eje numérico real:**

$\mathbf{-3} < x \leq 3$

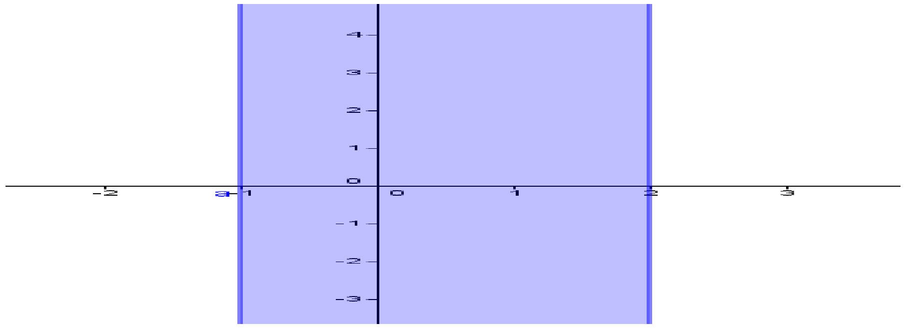
La notación de intervalo sería: (-3, 3] y el gráfico es:



La línea punteada en -3, significa que menos tres no es parte de la solución (intervalo abierto), mientras que la línea continua en 3, significa que tres si es parte del conjunto solución (intervalo cerrado).

$\mathbf{-1 \leq x \leq 2}$

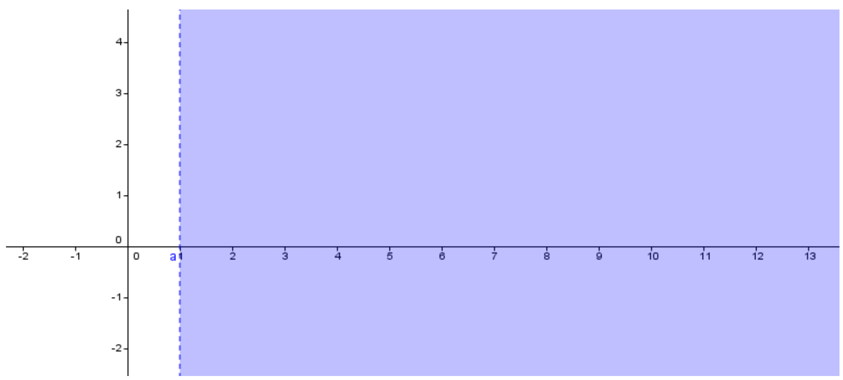
La notación de intervalo sería: [-1, 2] y el gráfico es:



La línea continua en -1, significa que menos uno es parte de la solución (intervalo cerrado) y la línea continua en 2, significa que dos si es parte del conjunto solución (intervalo cerrado).

$x > 1$

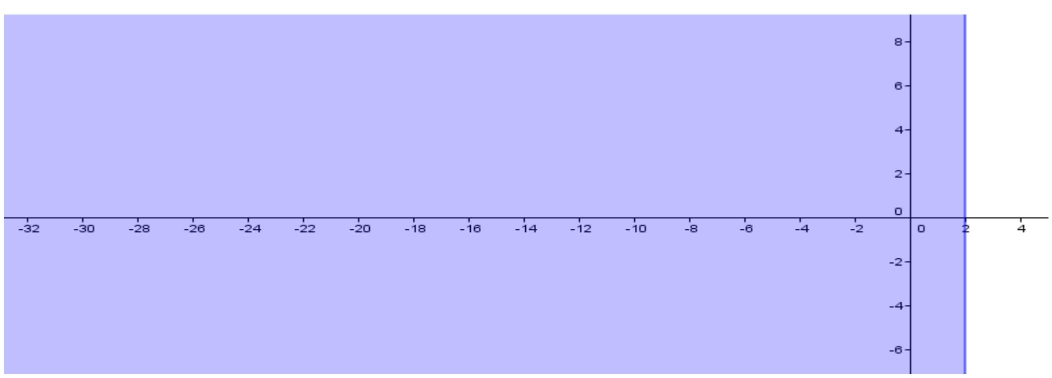
La notación de intervalo sería: (1, ∞) y el gráfico es:



La línea punteada en 1, significa que uno no es parte de la solución (intervalo abierto), sin embargo, el área sombreada se extiende hasta el infinito positivo, siendo este infinito siempre un intervalo abierto.

$\boldsymbol{x \leq 2}$

La notación de intervalo sería: (-∞, 2] y el gráfico es:



La línea continua en 2, significa que dos es parte de la solución (intervalo cerrado), sin embargo, el área sombreada se extiende hasta el infinito negativo, siendo este infinito siempre un intervalo abierto.

4.2.- Propiedades de las desigualdades

1. Propiedad de la suma y resta: Si a < b, entonces a + c < b + c.

2. Propiedad de la multiplicación y división: Si a < b y c > 0, entonces a*c < b*c.

3. Propiedad de la multiplicación y división: Si a < b y c < 0, entonces a*c > b*c.

4. Propiedad tricótoma del orden: Si a y b son números reales, exactamente uno de los tres siguientes enunciados sin verdaderos:

- a < b
- b < a
- a = b

5. Propiedad transitiva del orden: Si a, b y c son números reales y si:

- a < b
- b < c
- a = c

<u>Ejemplo 35.-</u> **Resuelva las siguientes desigualdades:**

$$\mathbf{12x+1 \leq 3+5x}$$

$$12x-5x \leq 3-1$$
$$7x \leq 2$$
$$x \leq \frac{2}{7}$$
$$\left(-\infty, \frac{2}{7}\right]$$

$$\mathbf{\frac{1}{6}x-\frac{3}{4} \leq \frac{3}{8}x+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{6}x-\frac{3}{8}x \leq \frac{1}{2}+\frac{3}{4}$$

$$-\frac{5}{24}x \leq \frac{5}{4}$$

Multiplicamos ambos términos por -1 para que la variable x sea positiva, cabe recordar que el sentido de la desigualdad debe también invertirse.

$$\frac{5}{24}x \geq -\frac{5}{4}$$

$$x \geq \frac{\frac{-5}{4}}{\frac{5}{24}}$$

$$x \geq -6$$

$$[-6, \infty)$$

$$\boldsymbol{(x+6)(x-2) \geq 6x-9}$$

$$x^2 - 2x + 6x - 12 \geq 6x - 9$$
$$x^2 - 2x + 6x - 6x \geq -9 + 12$$
$$x^2 - 2x \geq 3$$
$$x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

Resolvemos el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$.

$$(x-3)(x+1) \geq 0$$

$$x \geq 3 \text{ , } x \geq -1$$

$$\boldsymbol{\frac{2x+1}{x-3} \geq 3}$$

$$2x + 1 \geq 3(x-3)$$
$$2x + 1 \geq 3x - 9$$
$$2x - 3x \geq -9 - 1$$
$$-x \geq -10$$

Multiplicamos ambos términos por -1 para que la variable x sea positiva, cabe recordar que el sentido de la desigualdad debe también invertirse.

$$x \leq 10$$

$$\boldsymbol{\frac{x+3}{x-5} \geq 0}$$

$$x + 3 \geq 0(x-5)$$
$$x + 3 \geq 0$$
$$x \geq -3$$
$$[-3, \infty)$$

$$\boldsymbol{\frac{4x-3}{3}+8\leq\frac{3}{2}x+6}$$

$$\frac{4}{3}x-\frac{3}{3}+8\leq\frac{3}{2}x+6$$

$$\frac{4}{3}x-\frac{3}{2}x\leq 6+1-8$$
$$-\frac{1}{6}x\leq -1$$

Multiplicamos ambos términos por -1 para que la variable x sea positiva, cabe recordar que el sentido de la desigualdad debe también invertirse.

$$\frac{1}{6}x\geq 1$$
$$x\geq 6$$
$$[6,\infty)$$

$$\boldsymbol{2x^2\geq 3x+9}$$

$$2x^2-3x-9\geq 0$$

Resolvemos el trinomio de la forma ax^2+bx+c.

$$\frac{(2x-6)(2x+3)}{2}\geq 0$$

$$\frac{2(x-3)(2x+3)}{2}\geq 0$$

$$(x-3)(2x+3)\geq 0$$
$x\geq 3$ y $x\geq -\frac{3}{2}$

$$\boldsymbol{x^3+12\geq 3x^2+4x}$$

$$\boldsymbol{x^3-3x^2+4x-12\geq 0}$$
$$(x-3)(x-2)(x+2)\geq 0$$
$x\geq 3$, $x\geq 2$, $x\geq -2$

$$\boldsymbol{\frac{3}{2-x}\leq\frac{1}{x+4}}$$

$$3(x+4)\leq 1(2-x)$$
$$3x+12\leq 2-x$$

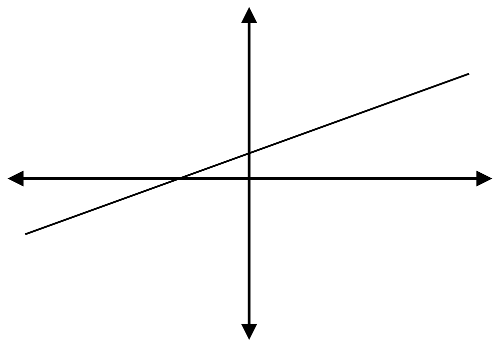
$4x \leq -10$

$x \leq -\frac{5}{2}$

$\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right]$

4.3.- Gráfica de desigualdades

Recordemos que una recta divide al plano en dos mitades llamadas "semiplanos". Dado:



$$Ax + By + C = 0 \rightarrow \begin{cases} (A, B, C) = k \\ (A, B) \neq 0 \end{cases}$$

El conjunto solución es el semiplano localizado arriba de la recta incluida la recta, si el signo es "mayor que o igual" y si es "mayor que" el conjunto solución se encuentra arriba de la recta.

$$Ax + By + C \geq 0$$
$$y \geq \frac{A}{B}x + \frac{C}{B}$$

El conjunto solución es el semiplano localizado abajo de la recta incluida la recta, si el signo es "menor que o igual" y si es "menor que" el conjunto solución se encuentra abajo de la recta.

$$Ax + By + C \leq 0$$
$$y \leq \frac{A}{B}x + \frac{C}{B}$$

Recordar que la recta se denomina "Recta frontera del semiplano" cuando los signos son ≤ o ≥.

4.4.- Pasos para graficar

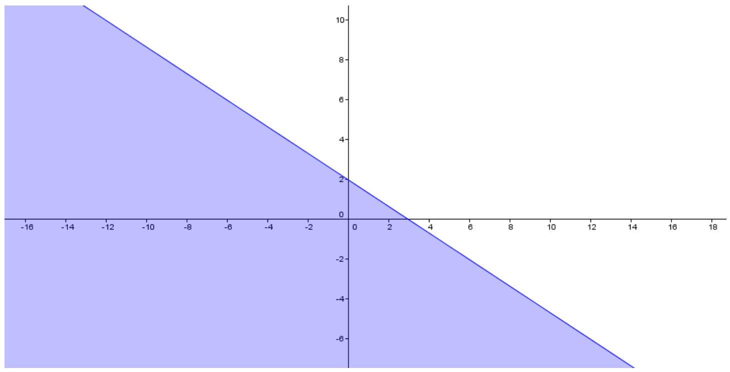
Grafique la recta Ax + By + C = 0 con una línea discontinua si los signos son (> o <) o una línea continua si los signos son (≤ o ≥).

Elija un punto de prueba en cualquier lugar del plano, excepto sobre la recta y sustituya las coordenadas en la desigualdad. El origen a menudo requiere de un último cálculo.

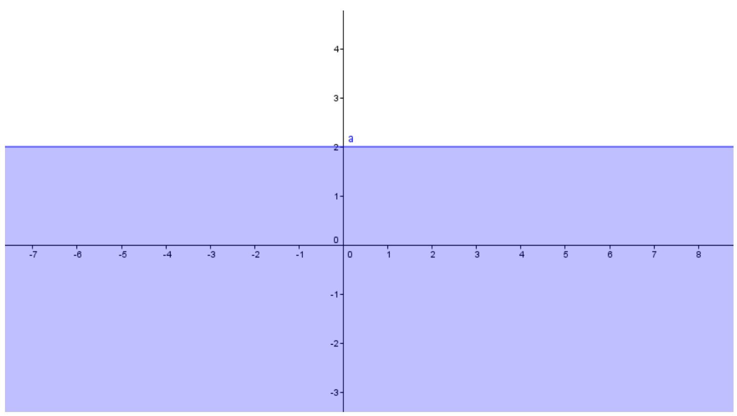
La gráfica de la desigualdad original incluye el semiplano que contiene el punto de prueba si la desigualdad se satisface por ese punto, o el semiplano no contiene ese punto si la desigualdad no se satisface por ese punto (Draper & Klingman, 1992).

Ejemplo 36.- **Grafique las siguientes desigualdades:**

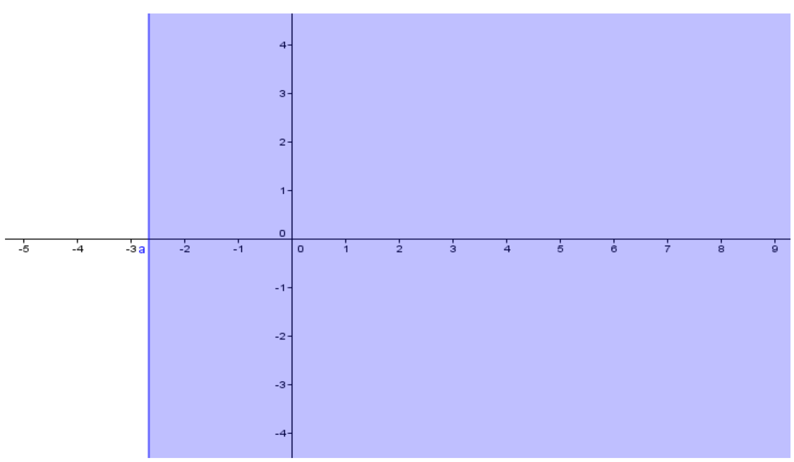
$$\mathbf{2x + 3y \leq 6}$$



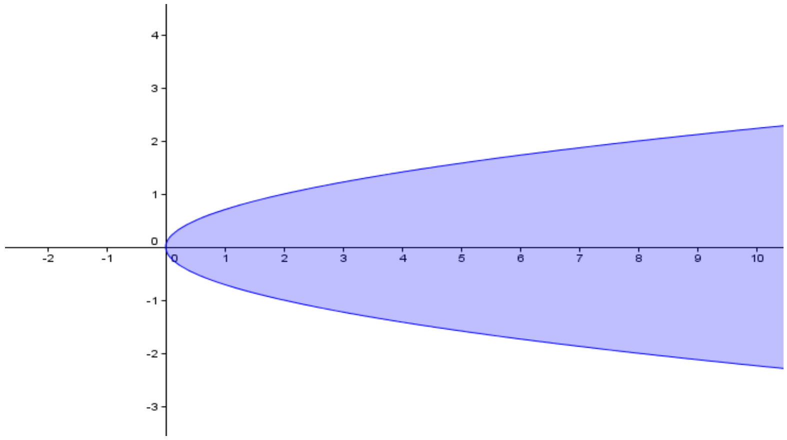
$$\mathbf{y \leq 2}$$



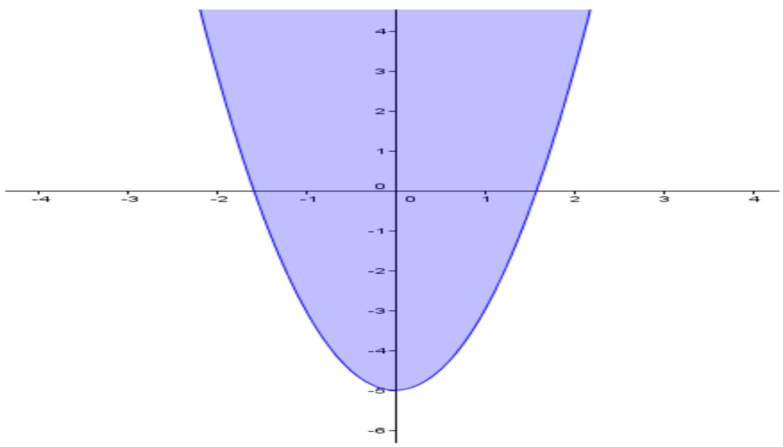
$$\mathbf{3x \geq -8}$$



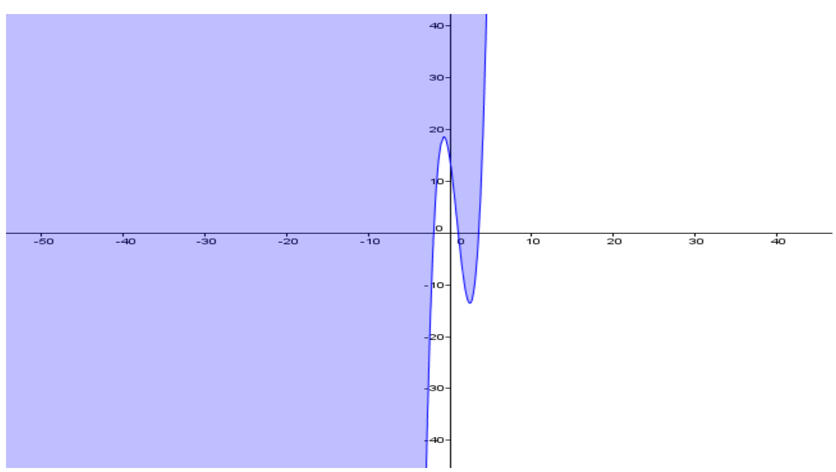
$x \geq 2y^2$



$y \geq 2x^2 - 5$



$y \geq (x+2)(x-1)(2x-7)$



4.5.- Sistemas de desigualdades

Para resolver sistemas de desigualdades, se gráfica cada desigualdad y se determina el par ordenado que satisface a todas las desigualdades.

La gráfica de la ecuación $ax + by + c = 0$ es una recta. Las regiones que se encuentran a cada lado de la recta pero sin incluir la misma se llaman semiplanos abiertos. Por otra parte, si la recta está incluida en una región, está última recibe el nombre de semiplano cerrado (Ress, Sparks, & Sparks, 2007).

La gráfica de un sistema de desigualdades se denomina "Región de Solución" y por lo general es la intersección de todas las gráficas.

Ejemplo 37.- **Resolver el siguiente sistema de desigualdades:**

$$\begin{cases} 3x + y \leq 21 \\ x - 2y \leq 0 \end{cases}$$

A estas desigualdades también se las conoce como inecuaciones, por lo tanto vamos a resolver un sistema de inecuaciones, con dos inecuaciones y dos incógnitas.

Debemos resolver cada una de las inecuaciones por separado, después que tengamos la solución analítica, dibujaremos en una recta real la solución de ambas inecuaciones, si existe intersección entre ellas, este intervalo será la solución del sistema de desigualdades.

Llamaremos a cada una de las inecuaciones por un número, llamaremos a la inecuación superior, número 1 y a la inecuación inferior, número 2.

$$\begin{cases} 3x + y \leq 21 \ \textbf{inecuación 1} \\ x - 2y \leq 0 \ \textbf{inecuación 2} \end{cases}$$

Al igual que un sistema de igualdad o sistema de ecuaciones, podemos recurrir al método de reducción, como ejemplo, multiplicando por 2 la inecuación 1, para que se pueda eliminar con la inecuación 2.

$$\begin{array}{l} 6x + 2y \leq 42 \\ \underline{\ x - 2y \leq 0} \\ 7x \qquad \leq 42 \end{array}$$

$$x \leq \frac{42}{7} \, o \, x \leq 6$$

Reemplazando en la primera o segunda inecuación el valor de "x", encontraremos el valor de "y".

$$\begin{array}{l} \ x - 2y \leq 0 \\ 6 - 2y \leq 0 \\ -2y \leq -6 \end{array}$$

El signo negativo en la incógnita obliga a cambiar el sentido de la desigualdad y recordando la ley de los signos menos por menos es más.

$y \geq 3$

Haremos una gráfica en la cual dibujaremos nuestros valores encontrados, tal como aparece en la figura 29:

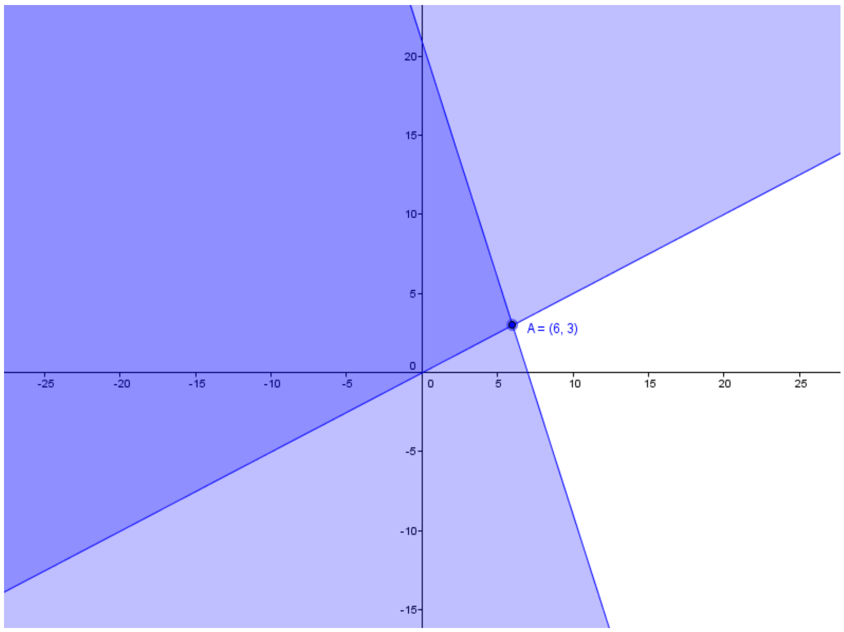


Figura 29

Como "x" es menor o igual que 6, el corchete simboliza el intervalo cerrado, es decir, el intervalo debe incluir el 6 y se pinta el área a la izquierda del 6 (menores); mientras que "y" es mayor e igual que tres y se pinta el área a la derecha del tres (mayores). El área donde coinciden los dos pintados, es el área solución de la desigualdad, en nuestro caso la respuesta es que la solución va desde 3 incluido hasta 6 incluido. Dicho en notación de desigualdad la respuesta es [3,6].

Si el símbolo de la desigualdad es solo > ó < entonces se utilizan paréntesis que representan que el intervalo es abierto y que, por lo tanto, dicho valor no se incluye en la solución al sistema de inecuaciones.

Ejemplo 38.- **Resolver el siguiente sistema de desigualdades:**

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \leq 0 \\ 4x - 4 \geq 0 \end{cases}$$

Llamaremos a cada una de las inecuaciones por un número, llamaremos a la inecuación superior, número 1 y a la inecuación inferior, número 2.

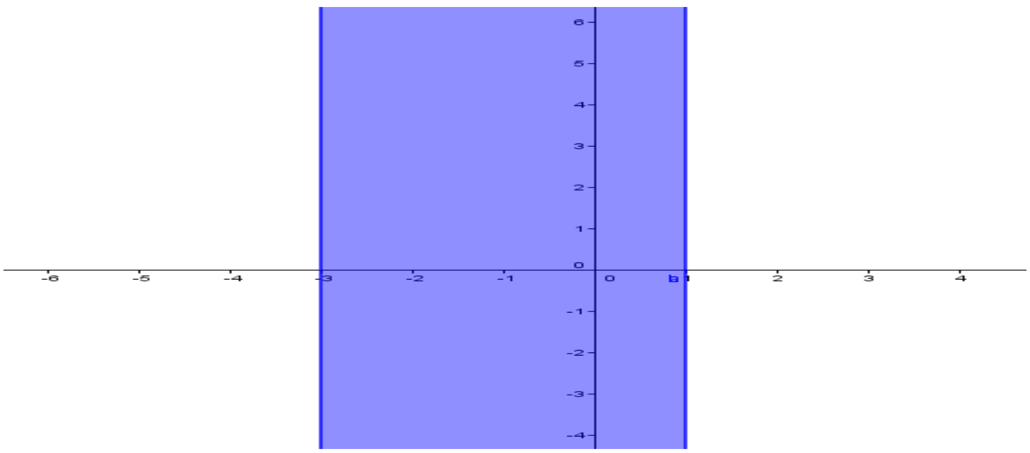
$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \leq 0 \ \ \textit{inecuación } 1 \\ 4x + 4 \geq 0 \ \ \textit{inecuación } 2 \end{cases}$$

Se debe factorizar la inecuación uno, por medio del trinomio de la forma $x^2 + bx + c$:

$$(x + 3)(x - 1) \leq 0$$

Con lo cual despejando cada factor tenemos: $x \leq -3$ y $x \leq 1$, por lo tanto la respuesta quedaría: $x \leq -3$ U $x \leq 1$.

Ahora despejamos la inecuación dos: $x \geq -1$ y graficamos las respuestas en el plano cartesiano.



Laboratorio 4

1.- En los siguientes ejercicios grafique los intervalos y escríbalos en notación de desigualdad:

a) (-5, 5)
b) (-∞, -2]
c) [1, 9]
d) (-1, +∞)
e) [-8, 3)
f) (-∞, 10)
g) (-7, 0]
h) [0, +∞)

2.- Escribir lo siguiente en notación de intervalo y graficar en un eje numérico real:

a) $-3 < x \leq 3$
b) $-1 \leq x \leq 2$
c) $x > 1$
d) $x \leq 2$

3.- En las siguientes desigualdades obtenga el conjunto solución y expréselo en notación de intervalo:

a) $3x - 5 < 7$

b) $5 - \frac{1}{3}x \geq \frac{1}{4}x - 2$

c) $3x + 1 \geq 4x - 3$

d) $6x - 1 < \frac{5x-1}{3}$

e) $5x + 6 \leq x - 2$

f) $\frac{2x-9}{7} > 0$

g) $\frac{x-5}{4} \leq x$

h) $\frac{4x-7}{5x+1} \geq 2$

i) $\frac{y+6}{y-4} \geq 0$

j) $\frac{2-7t}{5-4t} > 4$

k) $\frac{3x-8}{2x+3} < 4$

l) $\frac{4}{2x-1} < \frac{1}{x+1}$

m) $x^2 < 4$

n) $(x-1)(x-5) > 0$

o) $(3x+5)(2x-3) < 0$

4.- Grafique la región definida por el sistema de desigualdades, si es que hay:

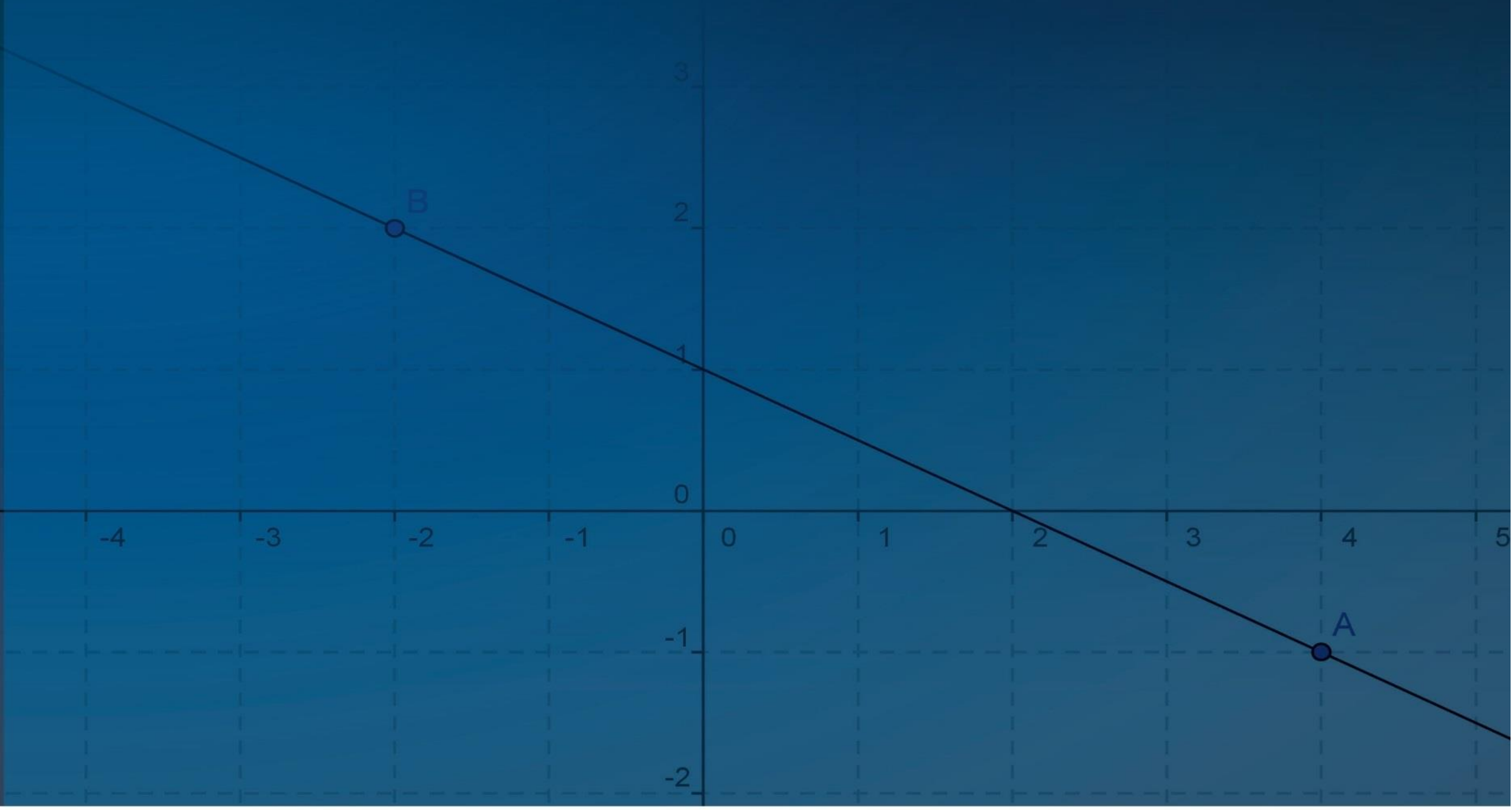
a) $\begin{cases} y + 4x \geq 6 \\ 6x - 2y \leq 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 3y - 7 > 0 \\ 6x - y - 5 < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x - y - 5 > 0 \\ 4x + 3y - 7 > 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -1 < x - y \\ x - y \leq 2 \end{cases}$

Capítulo V
La Recta



Capítulo V

La recta

5.1.- Definición

Definimos a la línea recta como el lugar geométrico de los puntos tales que tomado dos puntos diferentes cualesquiera P_1 (x_1, y_1) y P_2 (x_2, y_2) del lugar, el valor de la pendiente m calculada por:

$$m = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; x_1 \neq x_2$$

Según Lehmann (1980), una recta es la distancia más corta entre dos puntos, por lo cual los tratados superiores de Geometría, admiten la existencia de la línea recta como un postulado.

Resulta siempre constante y su gráfica se la aprecia en la figura 30.

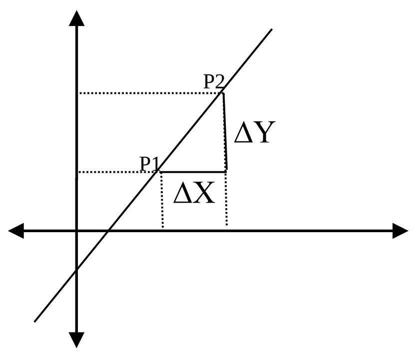


Figura 30

5.2.- Forma general de la ecuación de una recta

La ecuación de una recta cualesquiera, en el plano coordenado, es:

$$AX + BY + C = 0$$

Donde:
A y B son ≠ 0
C igual o no a 0

Si dejáramos Y = *f* (x) la ecuación de la recta seria:

$$Y = \pm\frac{A}{B}X \pm \frac{C}{B} \leftarrow y = \pm b \pm mx$$

Donde:
m = (A/B), es la pendiente
b = (C/B), es el punto donde la recta corta al eje Y (y intercepto)

5.3.- Formas de la ecuación de la recta

Existen varias formas, por las cuales, se puede representar la ecuación de una recta, para efectos del presente trabajaremos las siguientes:

5.3.1.- Forma punto-pendiente

Para determinar esta ecuación debemos tener un punto P_1 (x_1, y_1) y la pendiente m. Si la información anterior está dada, entonces, la ecuación de la recta se la puede hallar mediante:

$$y - y_1 = m * (x - x_1)$$

Ejemplo 39.- **Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (4, -1) y su pendiente es (-1/2).**

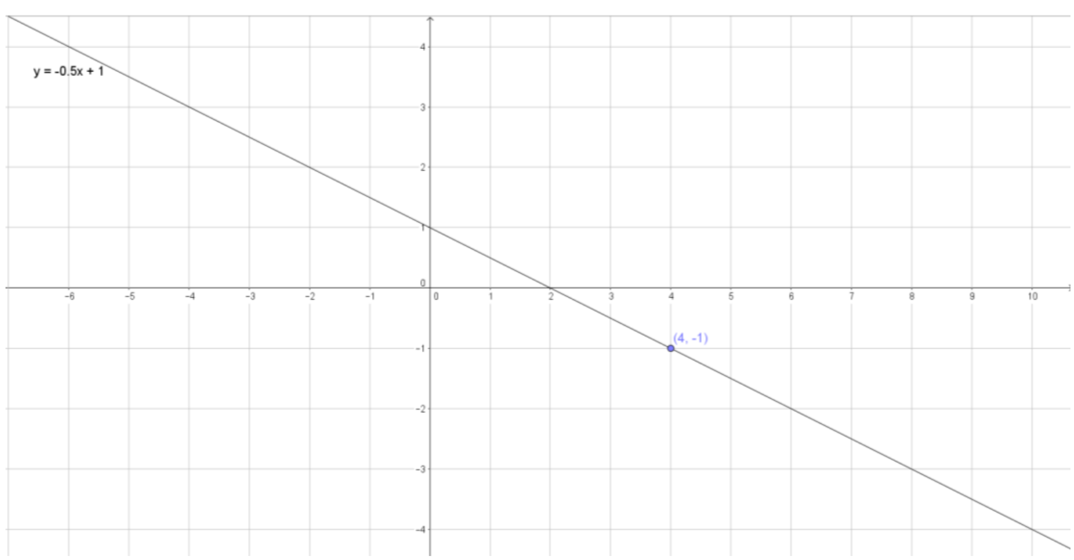
$$y - y_1 = m * (x - x_1)$$

$$y + 1 = -\frac{1}{2} * (x - 4)$$

$$y + 1 = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2 - 1$$

$$y = 1 - \frac{1}{2}x$$



5.3.2.- Forma Pendiente e Intercepto (ordenada en el origen)

Para determinar esta ecuación debemos tener la pendiente m y el punto (0, b) donde b representa la ordenada en el origen o el punto donde la recta corta al eje Y. La ecuación de esta recta es:

$$y - y_1 = m * (x - x_1)$$

$$y - b = m * (x - 0)$$

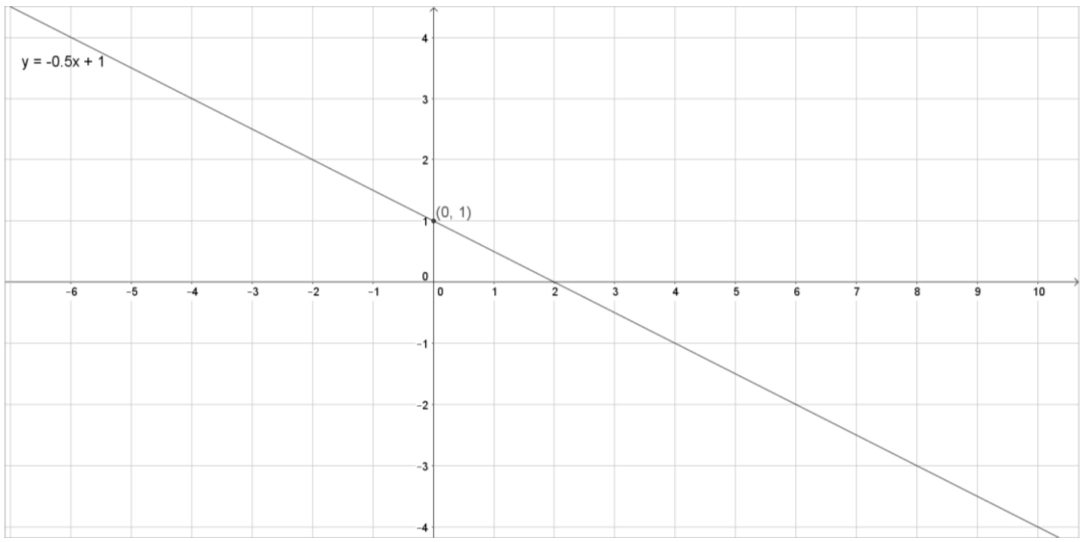
$$y - b = mx$$

$$y = b \pm mx$$

Ejemplo 40.- **Hallar la ecuación de la recta que tiene pendiente $(-1/2)$ y el punto donde la recta corta al eje de las ordenadas es $(0, 1)$.**

$$y = b \pm mx$$

$$y = 1 - \frac{1}{2}x$$



5.3.3.- Forma dos puntos

Para determinar esta ecuación debemos tener dos puntos P_1 (x_1, y_1) y P_2 (x_2, y_2) cualesquiera por donde pasa la recta, con lo cual la ecuación de esta recta es:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} * (x - x_1)$$

Donde:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} ; x_2 \neq x_1$$

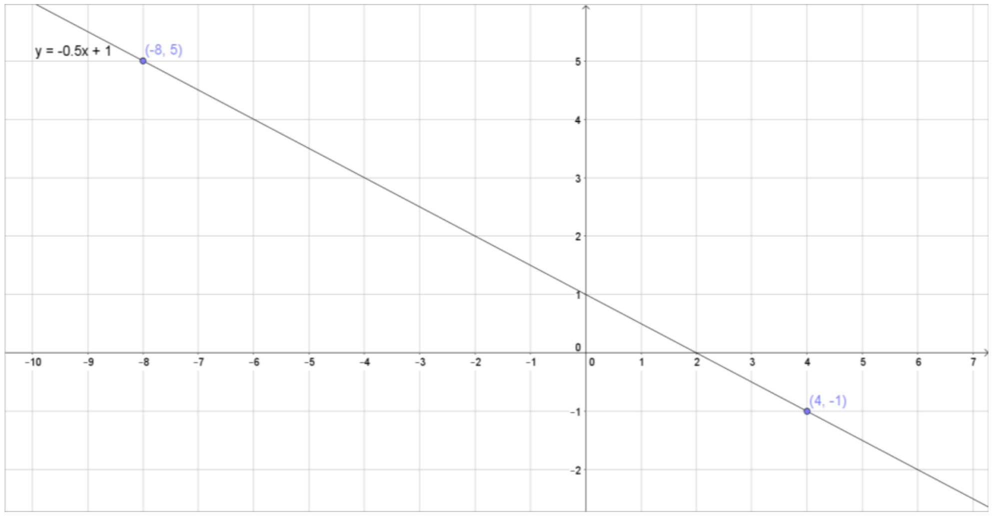
Ejercicio 41.- **Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (4, -1) y (-8, 5).**

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} * (x - x_1)$$

$$y + 1 = \frac{5+1}{-8-4} * (x - 4) \rightarrow y + 1 = \frac{6}{-12} * (x - 4)$$

$$y + 1 = -\frac{1}{2} * (x - 4) \rightarrow y + 1 = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2 - 1 \rightarrow y = 1 - \frac{1}{2}x$$



5.3.4.- Forma simétrica

Para determinar esta ecuación debemos tener los puntos (a, 0) y (0, b), es decir, ser las intercepciones con los ejes. La ecuación de esta recta es:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} * (x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{0 - b}{a - 0} * (x - a)$$

$$y = \frac{-b}{a} * (x - a)$$

$$y = -\frac{b}{a} x + b$$

$$y + \frac{b}{a} x = b * \left(\frac{1}{b}\right)$$

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1$$

Ejercicio 42.- **Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2, 0) y (0, 1).**

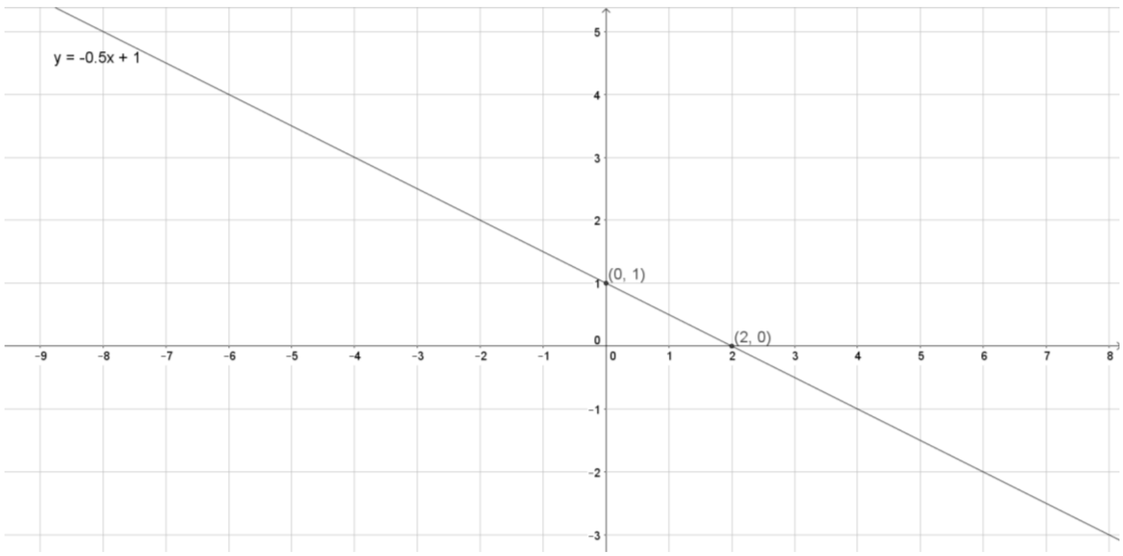
$$y - 0 = \frac{0 - 1}{2 - 0} * (x - 2)$$

$$y = \frac{-1}{2} * (x - 2)$$

$$y = -\frac{1}{2} x + 2$$

$$y + \frac{1}{2} x = 2 * \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{y}{2} + \frac{x}{1} = 1 \rightarrow y = 1 - \frac{1}{2} x$$



***<u>Ejemplo 43</u>*.- Hallar la pendiente de la recta cuya ecuación es $-\boldsymbol{x}+\mathbf{3}\boldsymbol{y}-\mathbf{5}=\mathbf{0}$**

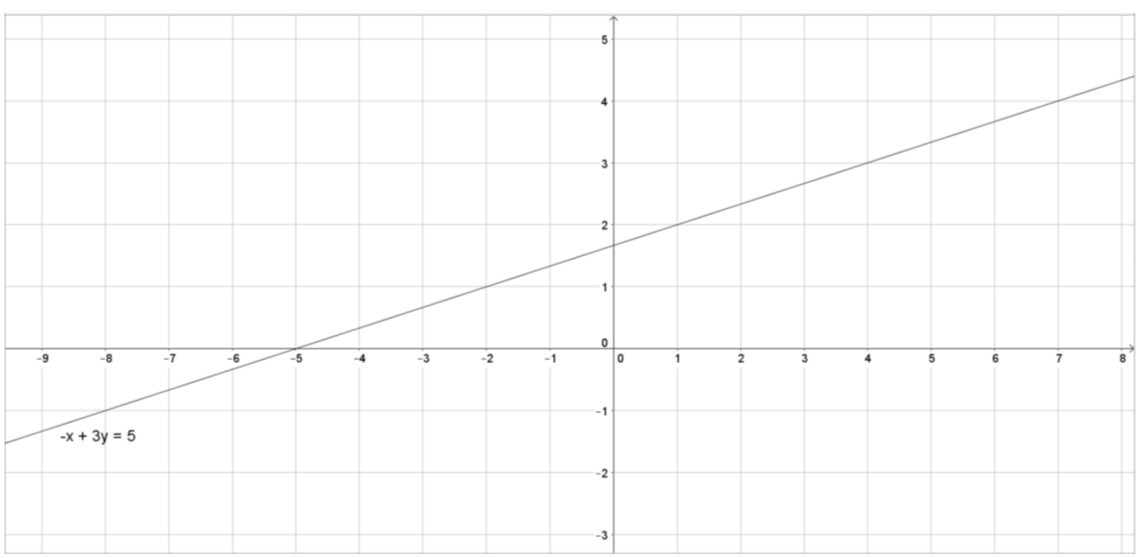
$-x+3y-5=0$

$3y=x+5$

$\frac{3y}{3}=\frac{x}{3}+\frac{5}{3}$

$y=\frac{x}{3}+\frac{5}{3}$

$m=\frac{1}{3}$

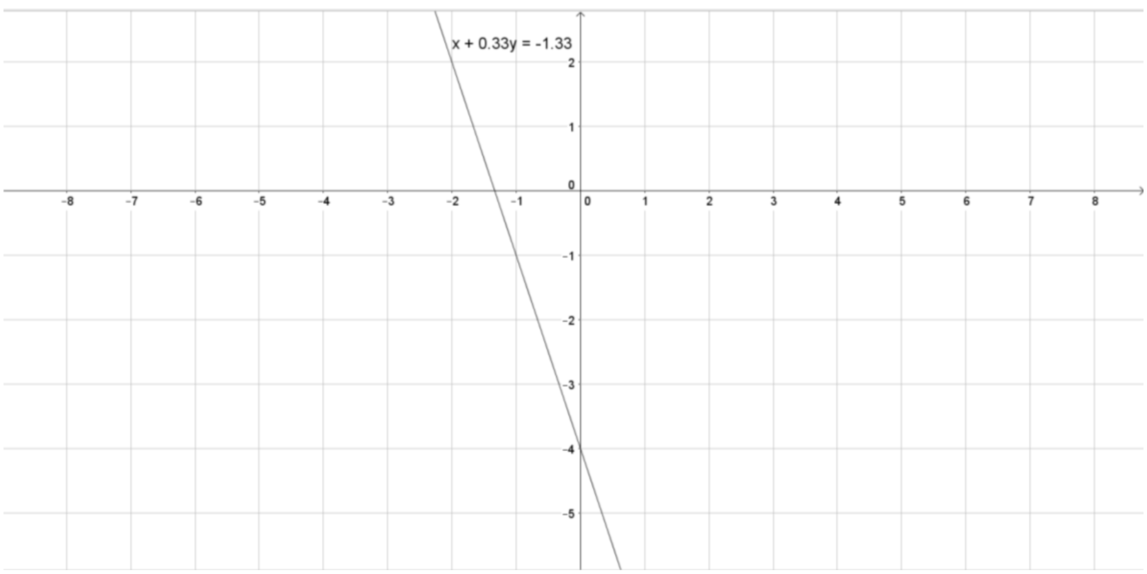


Ejemplo 44.- **Hallar la pendiente de la recta y el punto de corte en el eje *y*, cuya ecuación es** $\mathbf{x + \frac{y}{3} + \frac{4}{3} = 0}$

$$x + \frac{y}{3} + \frac{4}{3} = 0$$
$$3x + \frac{3y}{3} + \frac{3(4)}{3}$$
$$3x + y + 4 = 0$$
$$y = -3x - 4$$

Donde los valores para la pendiente y el corte serán:

$$m = -3$$
$$b = -4$$

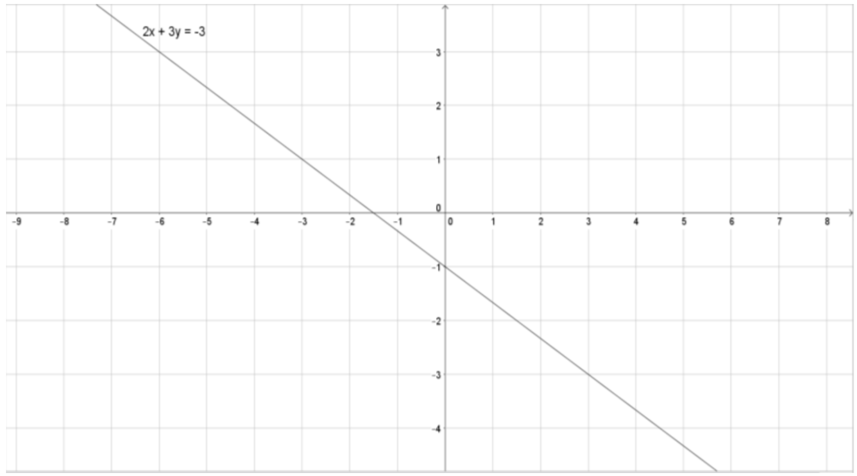


Ejemplo 45*.- Hallar la pendiente de la recta cuya ecuación es *2x+3y+3=0

$$2x + 3y + 3 = 0$$
$$3y = -2x - 3$$
$$\frac{3y}{3} = -\frac{2x}{3} - \frac{3}{3}$$
$$y = -\frac{2x}{3} - 1$$

Donde la pendiente de la recta es:

$$m = -\frac{2}{3}$$



5.4.- Posiciones relativas de dos rectas

Una vez visto la forma general de la ecuación de la recta y sus cuatro formas adicionales, consideraremos las posiciones relativas de dos rectas con las siguientes ecuaciones escritas en forma general:

$$\begin{cases} AX + BY + C = 0 \\ A'X + B'Y + C' = 0 \end{cases}$$

5.4.1.- Las dos rectas serán paralelas

Si (A*B’) - (A’*B) = 0

Ejemplo 46.- **Dadas las siguientes ecuaciones determine si son o no paralelas.**

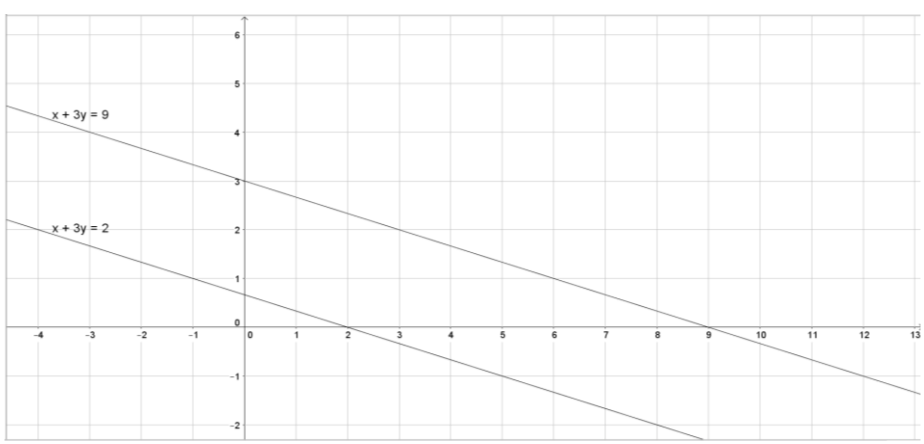
$$\begin{cases} 2x + 6y - 4 = 0 \\ x + 3y - 9 = 0 \end{cases}$$

$$(2*3) - (6*1) = 0$$

$$6 - 6 = 0$$

$$0 = 0$$

Por lo tanto las rectas son paralelas.



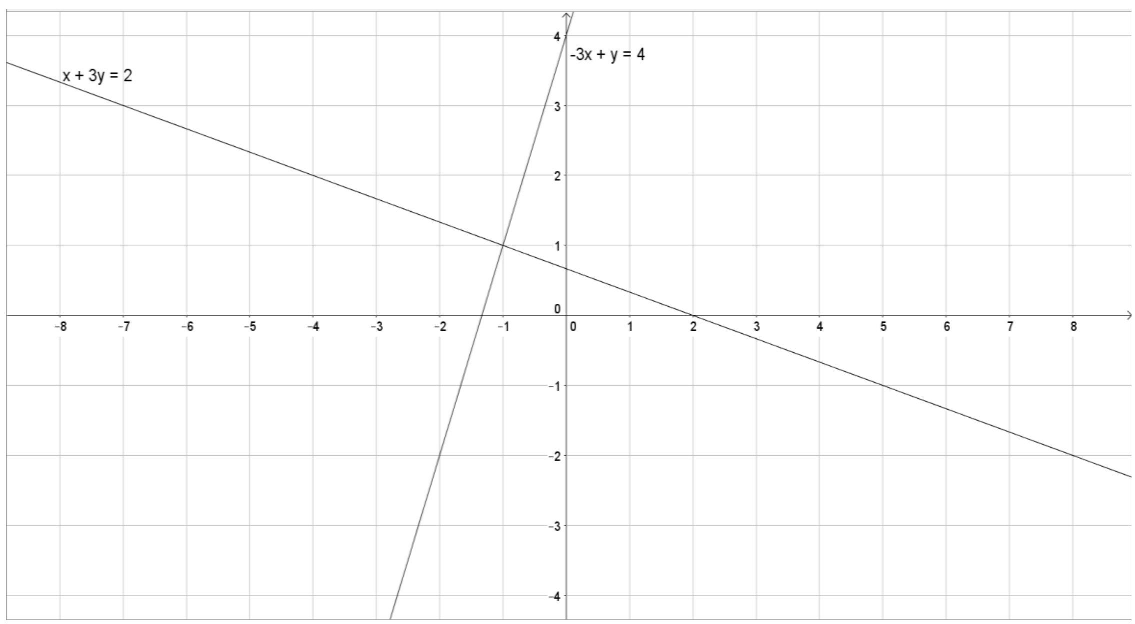
b) **<u>Las dos rectas serán perpendiculares:</u>** Si (A*A') + (B*B') = 0

Ejemplo 47.- **Dadas las siguientes ecuaciones determine si son o no perpendiculares.**

$$\begin{cases} 2x+6y-4=0 \\ -3x+y-4=0 \end{cases}$$

$$(2*-3)+(6*1)=0$$
$$-6+6=0$$
$$0=0$$

Por lo tanto las rectas son perpendiculares.



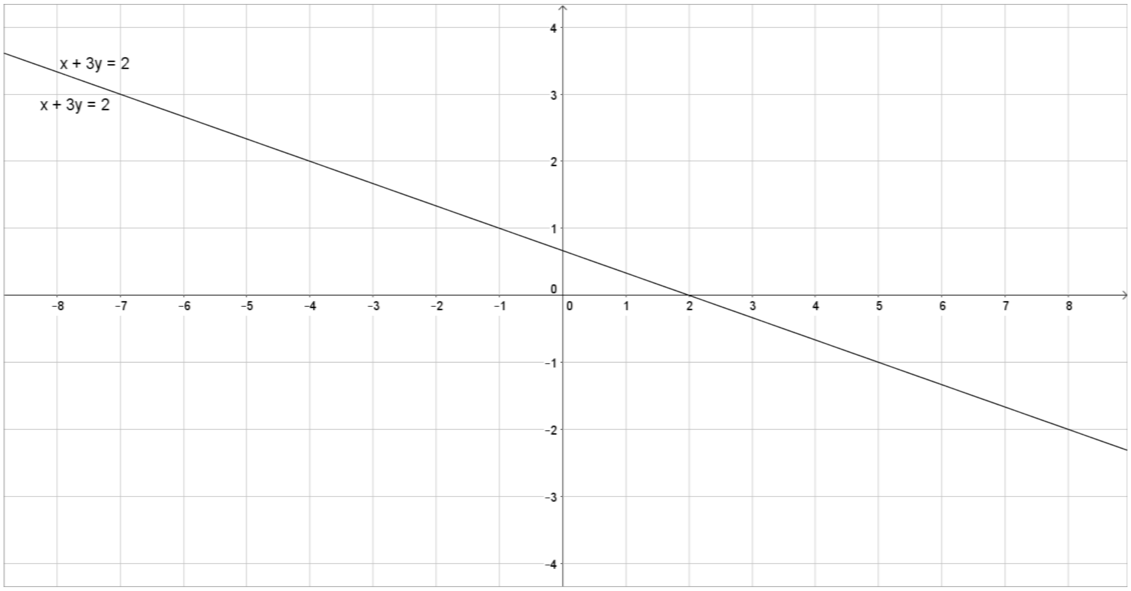
c) **<u>Las dos rectas serán coincidentes:</u>** Si $\dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}=\dfrac{C}{C'}=K; K\neq 0$

Ejemplo 48.- **Dadas las siguientes ecuaciones determine si son o no coincidentes.**

$$\begin{cases} 2x+6y-4=0 \\ 4x+12y-8=0 \end{cases}$$

$$\frac{2}{4}=\frac{6}{12}=\frac{-4}{-8}=\frac{1}{2}$$

Por lo tanto las rectas son coincidentes.



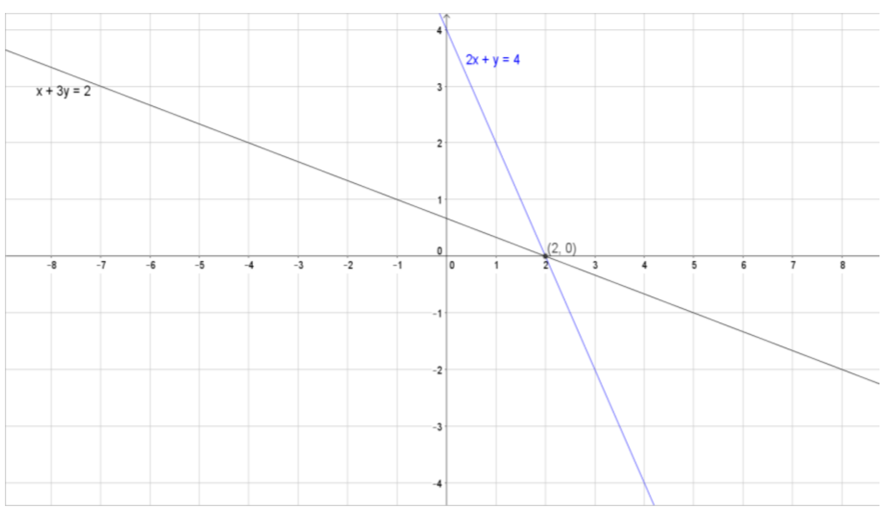
***d)* Las dos rectas se cortaran en uno y solo en un punto:** Si (A*B’) - (A’*B) $\neq$ 0

Ejemplo 49.- **Dadas las siguientes ecuaciones determine si se cortan o no en un solo punto.**

$$\begin{cases} 2x + 6y - 4 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$(2*1) - (2*6) \neq 0$$
$$2 - 12 \neq 0$$
$$-10 \neq 0$$

Por lo tanto las rectas se cortan en un solo punto.



5.5.- Intersección de dos rectas

Las coordenadas del punto de intersección de dos rectas deben satisfacer ambas ecuaciones y puede hallarse resolviendo simultáneamente las dos ecuaciones. La condición geométrica que deben cumplir corresponde a la condición algebraica de que sus ecuaciones formen un sistema independiente, compatible y por lo tanto que tengan una ***solución simultánea.***

Si tenemos dos ecuaciones en forma general:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Resolvemos este sistema por cualquiera de los métodos ya vistos.

Ejemplo 50.- **Dadas las siguientes ecuaciones determine su punto de intersección.**

$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \rightarrow 2x + 6y - 4 = 0$
$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \rightarrow 2x + y - 4 = 0$

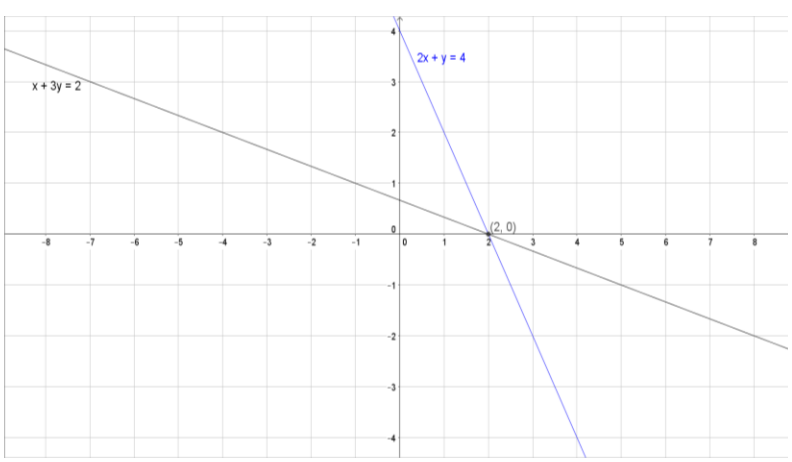
$2x + 6y - 4 = 0 * (1) \rightarrow \mathbf{2x} + 6y - 4 = 0$
$2x + y - 4 = 0 *(-1) \rightarrow \underline{\mathbf{-2x} - y + 4 = 0}$
$5y + 0 = 0$

y = 0

$2x + 6(0) - 4 = 0$
$2x - 4 = 0$
$2x = 4$
$x = 4/2$

x = 2

El punto donde se cortan es el par (2, 0).



Laboratorio 5

1.- Los vértices de un cuadrilátero son (0, 0); (2, 4); (6, 7) y (8, 0). Hallar las ecuaciones de sus lados.

2.- los segmentos que una recta determinas sobre los ejes Y y X son -3 y 2 respectivamente. Hallar su ecuación.

3.- Una recta de pendiente -2 pasa por el punto (-1, 4). Hallar su ecuación en la forma simétrica.

4.- Demostrar que los puntos (-5, 2); (1, 4); (4, 5) son colineales hallando la ecuación de la recta que pasa por dos de esos puntos.

5.- Dados los puntos A (-2, 1); B (4, 7) y C (6, -3). Se pide:

a) Hallar las ecuaciones de los lados.
b) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el puno B y es paralela al lado opuesto AC.
c) Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por los vértices y son paralelas a los lados opuestos.

6.- Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -4 y que pasa por el punto de intersección de las rectas $2x + y – 8 = 0$, $3x – 2y + 9 = 0$.

7.- Las ecuaciones de los lados de un cuadrilátero son: $3x – 8y + 36 = 0$; $x + y – 10 = 0$; $3x – 8y -19 = 0$; $x + y + 1 = 0$. Demostrar que la figura es un paralelogramo y hallar las coordenadas de sus vértices.
8.- Demostrar que las rectas $5x – y - 6 = 0$; $x + 5y – 22 = 0$; $5x – y – 32 = 0$; $x + 5y + 4 = 0$ forman un cuadrado.

9.- Cuales de los siguientes puntos quedan en la línea recta $x – 5y + 4 = 0$?

a) (0, 0)
b) (4, 0)
c) (1, 1)
d) (3, 2)
e) (0, 4/5)
f) (-1, 5)

Trace la recta indicando cuales de los puntos anteriores quedan sobre ella.

10.- Para cada una de las siguientes ecuaciones realice lo que se indica:

Se pide:

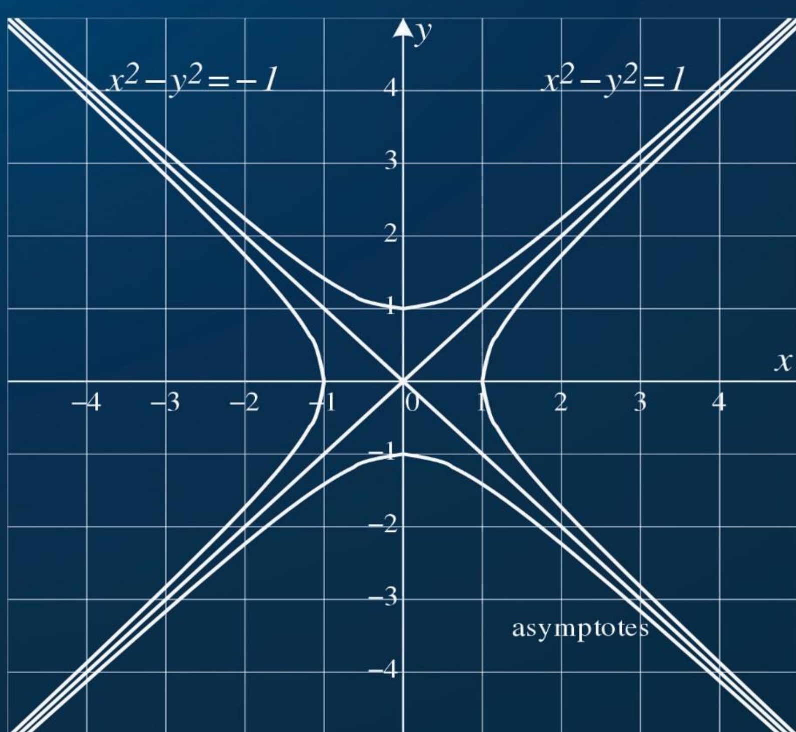
a.- Graficar usando las intercepciones
b.- Expresarla en forma de pendiente e intercepto
c.- Expresarla en la forma con intercepciones
a) $4y – 3x = 12$
b) $5x – y = 10$
c) $2y + 3x + 2 = 0$

d) $x - 3y = 0$

11.- ¿Qué relación (paralelismo, perpendicularidad, coincidencia o intersecantes) tiene la recta $3x + 4y - 2 = 0$ con cada una de las siguientes rectas?

a) $15x + 20y - 10 = 0$
b) $8x - 6y + 5 = 0$
c) $9x + 12y + 7 = 0$
d) $3x + y - 4 = 0$
e) $12x - 9y + 2 = 0$
f) $2x + y - 6 = 0$

Capítulo VI
Funciones no Lineales



Capítulo VI

Funciones no lineales

Una función lineal, es aquella en la cual la gráfica de la función, no es una línea recta, por lo tanto, la gráfica corresponde a líneas curvas. Así son funciones no lineales: las funciones polinómicas de grado mayor o igual que 2, las funciones trigonométricas, las exponenciales y logarítmicas, las funciones hiperbólicas (Swokowski & Cole, 2011).

6.1.- Funciones cónicas

A partir del concepto de línea recta se puede realizar una generalización de la ecuación $Ax + By + C = 0$. Esta generalización consiste en añadir términos cuadráticos en las variables Y y X, como lo cual la ecuación puede escribirse en la forma:

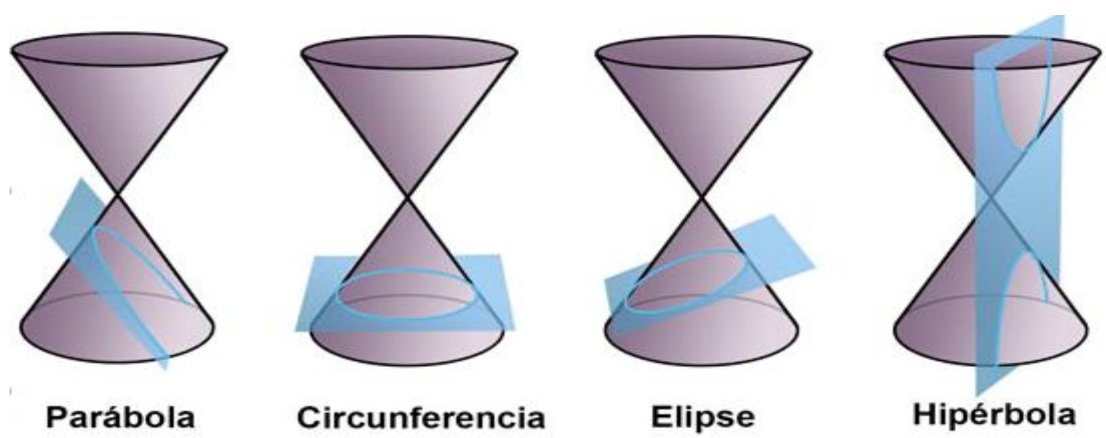
$$\boldsymbol{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Esta es la ecuación de Segundo Grado, en cada una de las variables, en donde no se cumple el supuesto de que $A = B = C = 0$.

El conjunto de los puntos (x, y) que verifican esta ecuación se llama Sección Cónica, geométricamente, se puede obtener la curva mediante la intersección de un plano con un cono, de ahí su nombre.

Las secciones cónicas, también llamadas cónicas, pueden obtenerse al cortar con un plano un cono circular recto de doble rama, como lo muestra la figura 31 (Swokowski & Cole, 2011).

Figura 31



Fuente y elaboración: http://www.profesordedibujo.com/index.php/apuntes/10-1-clasificacion-conicas.html

Tal como se muestra en la figura 31, una ecuación cuadrática puede representar una circunferencia, cuando un plano corta todo un manto de un cono circular en un ángulo recto con el eje; una elipse cuando un plano corta todo un manto; si el plano corta solo un manto, pero sin cruzarlo todo, la curva de intersección se llama parábola; si el plano corta ambos mantos, pero no a través del vértice, la curva de intersección se llama hipérbola.

Las cónicas pueden variar considerablemente, cambiando la posición del plano de sección y la forma del cono. Para algunas posiciones del plano, resultan las llamadas cónicas degradadas o degeneradas. Un plano que pase a través del vértice del cono produce cónicas degeneradas: un punto, una recta o un par de rectas.

Como es posible eliminar el término xy, haciendo que roten los ejes originales alrededor del origen, la ecuación general puede formularse como:

$$\mathbf{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

La ausencia de este término nos indica que la curva es simétrica respecto a la recta o rectas (ejes de la curva) que son paralelas a uno, o a uno y otro de los ejes coordenados. Una circunferencia siempre tiene este tipo de simetría por definición por lo que $B = 0$ en esta curva.

Cualquier cónica se definirá como el lugar geométrico de un punto que se mueve de manera que la razón de su distancia a partir de un punto fijo (foco), a su distancia desde una recta fija (directriz), es una constante ***e*** (excentricidad).

Identificación de una Curva Cuadrática:

CURVA	***B ≠ 0***	***B = 0***	***EXCENTRICIDAD***
Circunferencia	$A = C \neq 0$ y $B = 0$	$A = C \neq 0$	$e = 0$
Elipse	$B^2 - 4AC < 0$	$A \neq C$, pero signo (=)	$0 < e < 1$
Parábola	$B^2 - 4AC = 0$	$A = 0$ o $C = 0$, pero ambas no nulas	$e = 1$
Hipérbola	$B^2 - 4AC > 0$	A y C tienen signos contrarios	$e > 1$

6.1.2.- La Circunferencia

Se define a la circunferencia como el conjunto de todos los puntos P del plano que equidistan de un punto fijo. La distancia fija se llama ***radio***; el punto fijo se llama ***centro*** (Lehmann, 1980). La gráfica se puede observar en la figura 32 y su ecuación general es:

a) $\mathbf{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$ **b)** $\mathbf{Ax^2 + Cy^2 + F = 0}$

Se la puede expresar también en su forma ***estándar*** o ***canónica***:

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	$(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$
(h, k) = Centro de la circunferencia diferente al origen.	(0, 0) = Centro de la circunferencia en el origen.
r = Radio de la circunferencia.	r = Radio de la circunferencia

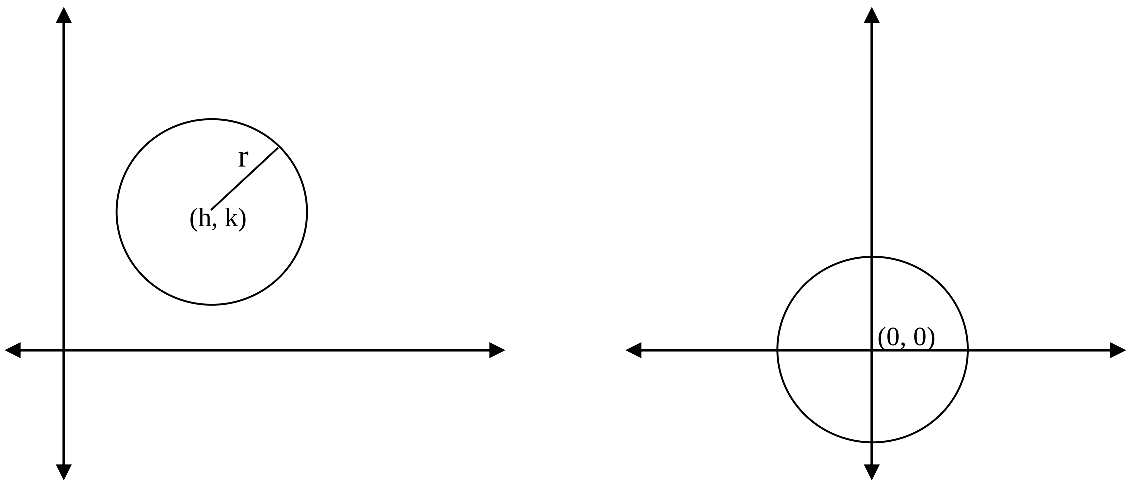


Figura 32

Donde:

$r^2 < 0$ El lugar geométrico es imaginario.
$r^2 = 0$ El lugar geométrico es el punto (h, k) o (0, 0).
$r^2 > 0$ El lugar geométrico es una circunferencia.

<u>Ejemplo 51.-</u> **Exprese cada ecuación en la forma estándar:**

<u>a) $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 10 = 0$</u>

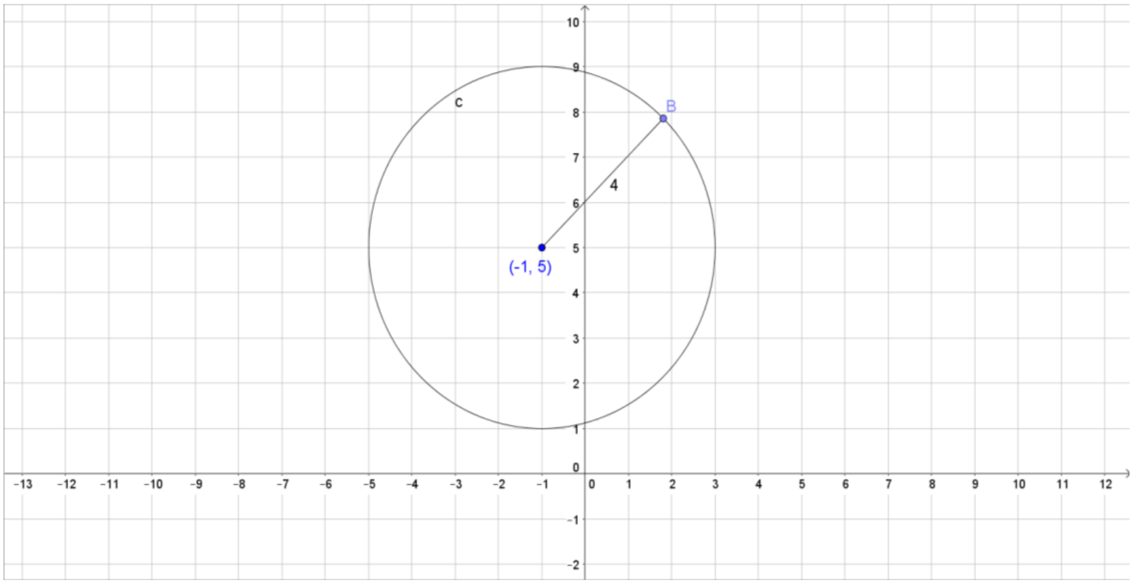
$x^2 + 2x + y^2 - 10y = -10$

$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 10y + 25 = -10 + 1 + 25$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 = 16$

<u>$(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 16$</u>

Centro (-1, 5)
Radio $\sqrt{16}$
Radio = 4
$r^2 > 0$ El lugar geométrico es una circunferencia.



Gráficación:

"Para elaborar esta gráfica tome la siguiente sugerencia: Trácense las rectas: x + 1 = 0, y – 5 = 0 y tómelas como nueves ejes coordenados".

$(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 16$
$(x + 0)^2 + (y + 0)^2 = 16$
$x^2 + y^2 = 16$
$y = \pm\sqrt{16 - x^2}$

Intercepción con Ejes:

$y = \pm\sqrt{16 - x^2}$
$x = 0 \quad y = \pm 4 \;\longrightarrow\; (0, \pm 4)$
$y = 0 \quad x = \pm 4 \;\longrightarrow\; (\pm 4, 0)$

Tabla de Valores:

X	± 4	± 3	± 2	± 1	0
Y	0	$\pm\sqrt{(7)}$	$\pm\sqrt{(12)}$	$\pm\sqrt{(15)}$	± 4

b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 19 = 0$

$x^2 - 4x + y^2 - 6y + 19 = 0$
$x^2 - 4x + y^2 - 6y + 19 = 0$
$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = -19 + 4 + 9$
$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = -6$
$\underline{(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = -6}$
$r^2 < 0$ El lugar geométrico es imaginario.

c) $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 29 = 0$

$x^2 - 10x + y^2 + 4y + 29 = 0$
$x^2 - 10x + 25 + y^2 – 4y + 4 = -29 + 25 + 4$
$x^2 - 10x + 25 + y^2 – 4y + 4 = 0$
$\underline{(x – 5)^2 + (y + 2)^2 = 0}$

$r^2 = 0$ El lugar geométrico es un punto. (5, -2)

d) $x^2 + y^2 - 25 = 0$

$x^2 + y^2 = 16$
$(x – 0)^2 + (y – 0)^2 = 25$

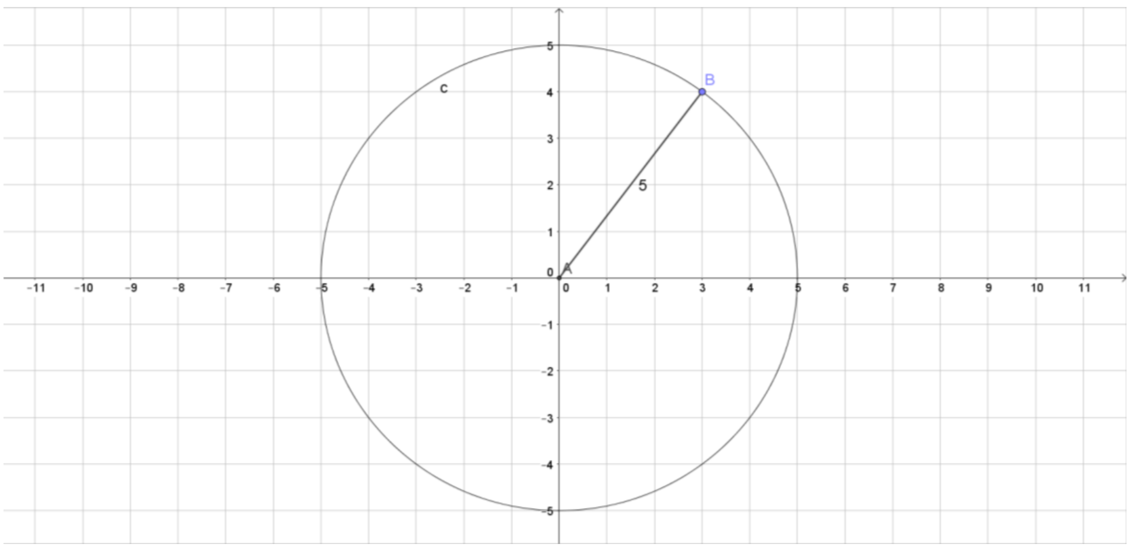
Centro (0, 0)
Radio 5
$r^2 > 0$ El lugar geométrico es una circunferencia.

Gráficación:
$x^2 + y^2 - 25 = 0$
$x^2 + y^2 = 25$
$y^2 = 25 - x^2$
$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$

Intercepción con Ejes:
$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$
$x = 0 \quad y = \pm 5 \rightarrow (0, \pm 5)$
$y = 0 \quad x = \pm 5 \rightarrow (\pm 5, 0)$

Tabla de Valores:

X	± 5	± 4	± 3	± 2	± 1	0
Y	0	± 3	± 4	± √(21)	± √(24)	± 5



6.1.3.- La Elipse

Se define a la elipse como el lugar geométrico de todos los puntos P en un plano, tales que es constante la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados ***focos*** (Leithold, 2008). La elipse tiene 2 ejes de simetría ***(segmentos rectilíneos perpendiculares)***. El Eje Mayor es el más largo y el Eje Menor es el más corto, el punto donde se cortan es el ***centro de la elipse***. Su ecuación general es:

$$\mathbf{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

En la figura 33 se puede apreciar su gráfico. La elipse también se la puede expresar en su forma ***estándar*** o ***canónica***:

$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$
Centro de la Elipse (h, k)	Centro de la Elipse (h, k)
Elipse con su eje mayor paralelo al eje de las X, a > b.	Elipse con su eje mayor paralelo al eje de las Y, b > a.
Las longitudes son 2a y 2b	Las longitudes son 2a y 2b
Vértices $(h \pm a, k)$ $(h, k \pm b)$	Vértices $(h, k \pm a)$ $(h \pm b, k)$
Focos (h + c, k) (h- c, k)	Focos (h, k + c) (h, k – c)
$c^2 = a^2 - b^2$	$c^2 = a^2 - b^2$

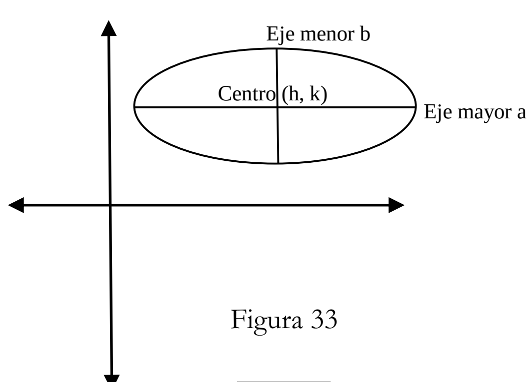


Figura 33

Si la ecuación general presenta la siguiente forma **$Ax^2 + Cy^2 + F = 0$,** entonces su forma canónica será:

$\frac{(x-0)^2}{a^2} + \frac{(y-0)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-0)^2}{b^2} + \frac{(y-0)^2}{a^2} = 1$
Centro de la Elipse (0, 0)	Centro de la Elipse (0, 0)
Elipse con su eje mayor sobre el eje de las X, a > b.	Elipse con su eje mayor sobre el eje de las Y, b > a.
Las longitudes son 2a y 2b	Las longitudes son 2a y 2b
Focos (± c, 0); $c^2 = a^2 - b^2$	Foco (0, ± c); $c^2 = b^2 - a^2$
Vértices (± a, 0) y (0, ± b)	Vértices (± a, 0) y (0, ± b)

Y su gráfico se lo puede apreciar en la figura 33

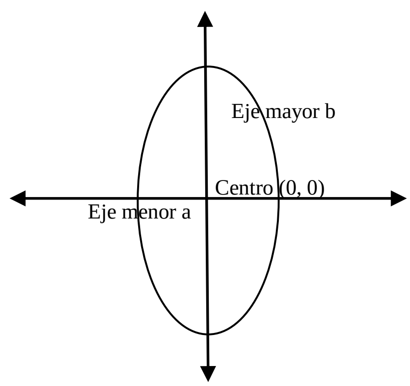


Figura 33

Donde:
Las magnitudes de a y b se conocen como semiejes y sus extremos son los vértices de la elipse.
Si a = b entonces la elipse se transforma en una circunferencia.

$[(x-h)^2]/a^2 + [(y-k)^2]/b^2 = C$, donde $C < 0$, el lugar geométrico es imaginario.
$[(x-h)^2]/a^2 + [(y-k)^2]/b^2 = 0$, el lugar geométrico es el punto (h, k) o (0, 0).

<u>Ejemplo 52.-</u> Exprese cada ecuación en su forma estándar:

<u>a) $16x^2 + 25y^2 = 400$</u>

$[16(x-0)^2/400] + [25(y-0)^2/400] = 400/400$

$[(x-0)^2/25] + [(y-0)^2/16] = 1$

$x^2/25 + y^2/16 = 1$

$x^2/5^2 + y^2/4^2 = 1$

$a > b \rightarrow 5 > 4$, entonces el eje mayor es paralelo al eje x, pero en esta caso está en el eje x.
Semieje a = 5, su longitud es 2a, es decir, 2(5) = 10
Semieje b = 4, su longitud es 2b, es decir, 2(4) = 8
Centro (0, 0)
El eje mayor esta sobre el eje X
Los Puntos Focales (c, 0) y (-c, 0) se los obtiene con:

- $c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c^2 = 25 – 16 \rightarrow c^2 = 9 \rightarrow c^2 = \pm 3 \rightarrow (3, 0)$ y $(-3, 0)$

Graficación:

$16x^2 + 25y^2 = 400$
$25y^2 = 400 - 16x^2$
$y^2 = (400 - 16x^2)/25$

$$y = \pm\sqrt{\frac{400 - 16x^2}{25}}$$

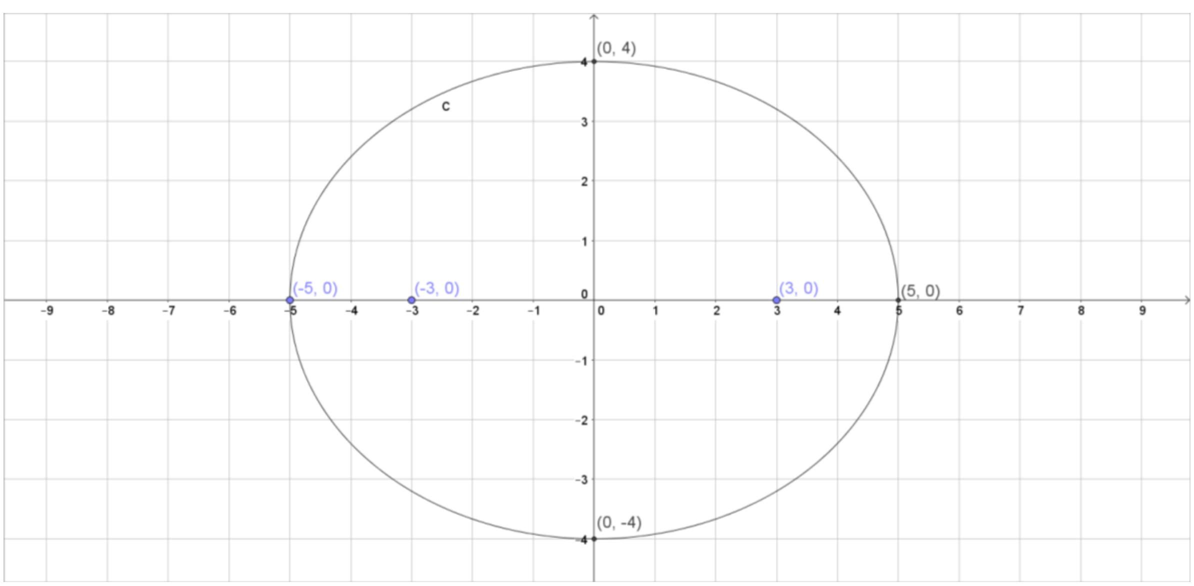
Intercepción con Ejes:

$$y = \pm\sqrt{\frac{400 - 16x^2}{25}}$$

$x = 0 \quad y = \pm 4 \rightarrow (0, \pm 4)$
$y = 0 \quad x = \pm 5 \rightarrow (\pm 5, 0)$

Tabla de Valores:

X	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5
Y	± 4	± 3,92	± 3,67	± 3,2	± 2,4	0



b) $4x^2 - 32x + 9y^2 - 36y + 64 = 0$

$4(x^2-8x) + 9(y^2 – 4y) + 64 = 0$

$4(x^2- 8x + 16) + 9(y^2 – 4y + 4) = -64+ 64 + 36$

$4(x^2 - 8x + 16) + 9(y^2 – 4y + 4) = 36$

$4(x - 4)^2 + 9(y – 2)^2 = 36$

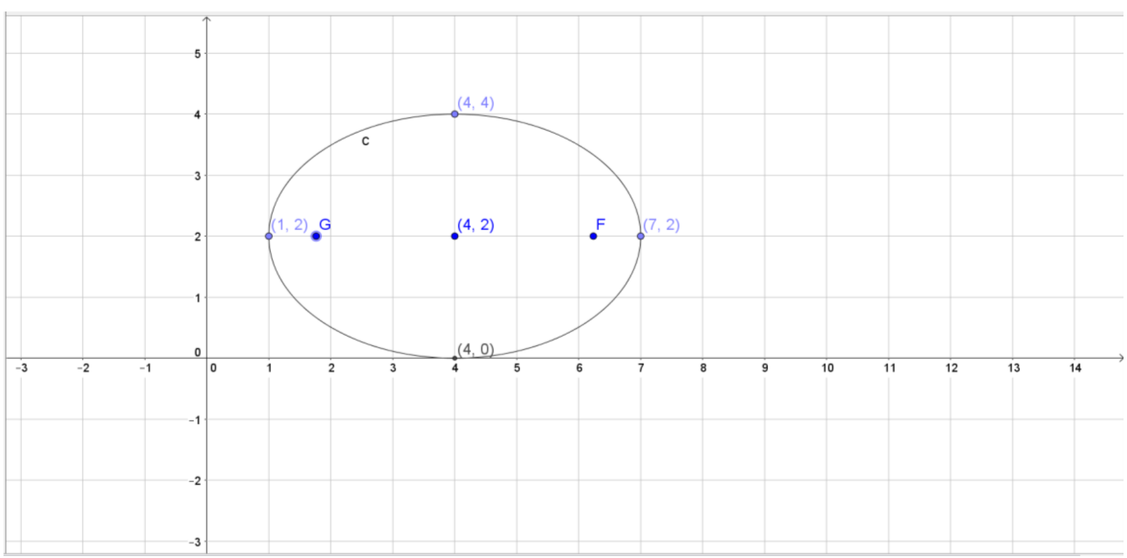
$[4(x -4)^2/36] + [9(y – 2)^2/36] = 36/36$

$[(x - 4)^2/9] + [(y – 2)^2/4] = 1$

$[(x - 4)^2/ 3^2] + [(y – 2)^2/ 2^2] = 1$

a>b → 3>2, entonces el eje mayor es paralelo al eje x.

Semieje a = 3, su longitud es 2a, es decir, 2(3) = 6
Semieje b = 2, su longitud es 2b, es decir, 2(2) = 4
Centro (4, 2)
Focos (h + c, k) (h- c, k) → $(4 + \sqrt{5}, 2)$ y $(4 - \sqrt{5}, 2)$
Vértices (h + a, k) (h – a, k) → (7, 2) y (1, 2)



Graficación:
"Para elaborar esta gráfica tome la siguiente sugerencia: Trácense las rectas: x -4 = 0, y – 2 = 0 y tómelas como nueves ejes coordenados".

$4(x - 4)^2 + 9(y – 2)^2 = 36$
$4(x - 0)^2 + 9(y – 0)^2 = 36$

$4x^2 + 9y^2 = 36$
$4x^2/36 + 9y^2/36 = 36/36$
$x^2/9 + y^2/4 = 1$
$x^2/3^2 + y^2/2^2 = 1$

$a > b \rightarrow 3 > 2$, entonces el eje mayor es paralelo al eje x.
Semieje a = 3, su longitud es 2a, es decir, 2(3) = 6
Semieje b = 2, su longitud es 2b, es decir, 2(2) = 4
Centro (0, 0)
Los Puntos Focales (0, c) y (0, -c) se los obtiene con:

- $c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c^2 = 9 - 4 \rightarrow c^2 = 5 \rightarrow c^2 = \pm\sqrt{5} \rightarrow (0, \sqrt{5})$ y $(0, -\sqrt{5})$

$4x^2 + 9y^2 = 36$
$9y^2 = 36 - 4x^2$
$y^2 = (36 - 4x^2)/9$

$$y = \pm\sqrt{\frac{36 - 4x^2}{9}}$$

Intercepción con Ejes:

$$y = \pm\sqrt{\frac{36 - 4x^2}{9}}$$

$x = 0 \quad y = \pm 2 \rightarrow (0, \pm 2)$
$y = 0 \quad x = \pm 3 \rightarrow (\pm 3, 0)$

Tabla de Valores:

X	0	± 1	± 2	± 3
Y	± 2	± 5,66	± 4,47	0

c) $6x^2 - 36x + 4y^2 + 16y + 70 = 0$

$6(x^2 - 6x) + 4(y^2 - 4y) + 70 = 0$
$6(x^2 + 6x + 9) + 4(y^2 + 4y + 4) = -70 + 54 + 16$
$6(x^2 + 6x + 9) + 4(y^2 - 8y + 16) = 0$
$\underline{6(x - 3)^2 + 4(y + 2)^2 = 0}$

Como c = 0 el lugar geométrico es el punto (3, -2).

d) $2x^2 - 16x + y^2 - 12y + 80 = 0$

$2(x^2 - 8x) + (y^2 - 12y) + 80 = 0$

$2(x^2 - 8x + 16) + (y^2 - 12y + 36) = -80 + 32 + 36$
$\underline{2(x - 4)^2 + (y + 6)^2 = -12}$

Como c < 0 el lugar geométrico es imaginario.

6.1.4.- La Parábola

Se define a la parábola como el lugar geométrico de los puntos P en un plano, los cuales son equidistantes de un punto fijo llamado ***foco*** y de una recta fija del plano (***directriz***) situados en un plano (Swokowski & Cole, 2011). La parábola es simétrica con respecto a una recta (***eje de la parábola***); el punto de intersección de la parábola y su eje es el ***vértice*** de la misma. Su ecuación general es:

a) $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$ **b)** $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Se la puede expresar también en su forma ***estándar*** o ***canónica***:

$(x - h)^2 = 4p(y - k), p < 0$	$(y - k)^2 = 4p(x - h), p < 0$
Eje de simetría paralelo al eje Y	Eje de simetría paralelo al eje X
Punto Vértice (h, k)	Punto Vértice (h, k)
Valor de p	Valor de p
Abre hacia abajo si p < 0	Abre hacia la izquierda si p < 0
Focos (h, k – p)	Focos (h – p, k)
Directriz y = p + k	Directriz x = p + h

La figura 35, es la representación gráfica de la parábola con forma general: $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

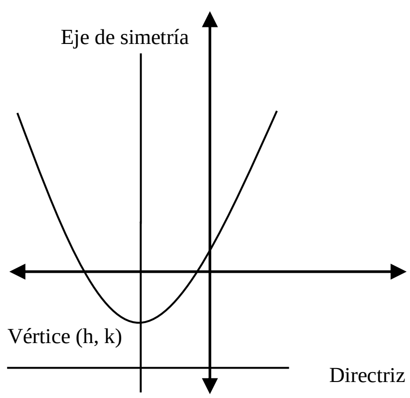


Figura 35

$(x - h)^2 = 4p(y - k), p > 0$	$(y - k)^2 = 4p(x - h), p > 0$
Eje de simetría paralelo al eje Y	Eje de simetría paralelo al eje X
Punto Vértice (h, k)	Punto Vértice (h, k)
Valor de p	Valor de p
Abre hacia arriba si p > 0	Abre hacia la derecha si p > 0
Focos (h, k + p)	Focos (h + p, k)
Directriz y = k – p	Directriz x = h – p

La figura 36, es la representación gráfica de la parábola con forma general:

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$$

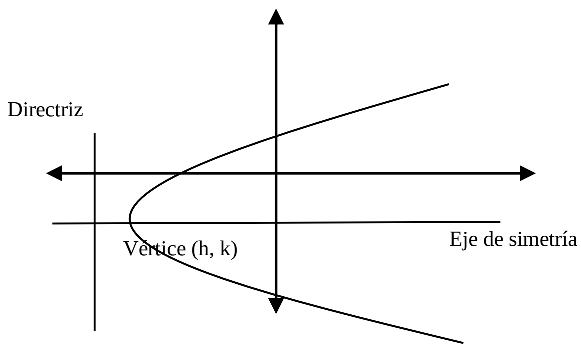


Figura 36

Si la ecuación general, presenta las siguientes formas, entonces:

a) $Ax^2 + Ey + F = 0$ **b) $Cy^2 + Dx + F = 0$**

$(x - 0)^2 = 4p(y - 0)$, $p < 0$	$(y - 0)^2 = 4p(x - 0)$, $p < 0$
Eje de simetría sobre el eje Y	Eje de simetría sobre el eje X
Punto Vértice (0, 0)	Punto Vértice (0, 0)
Valor de p	Valor de p
Abre hacia abajo si $p < 0$	Abre hacia la izquierda si $p < 0$
Focos (0, p)	Focos (p, 0)
Directriz $y = - p$	Directriz $x = - p$

Los gráficos de ambas formas estándares se aprecian en las figuras 37 y 38.

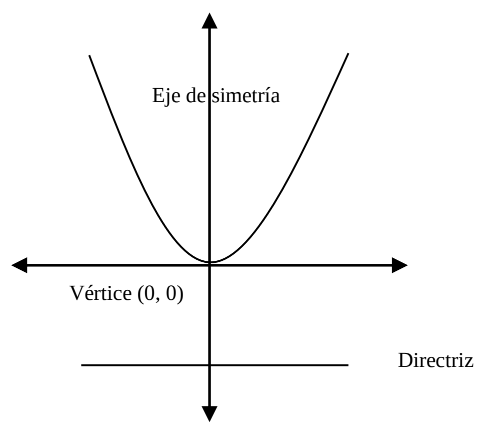


Figura 37

$(x-0)^2 = 4p(y-0)$, $p > 0$	$(y-0)^2 = 4p(x-0)$, $p > 0$
Eje de simetría sobre el eje Y	Eje de simetría paralelo al eje X
Punto Vértice (0, 0)	Punto Vértice (0, 0)
Valor de p	Valor de p
Abre hacia arriba si $p > 0$	Abre hacia la derecha si $p > 0$
Focos (0, p)	Focos (p, 0)
Directriz $y = -p$	Directriz $x = -p$

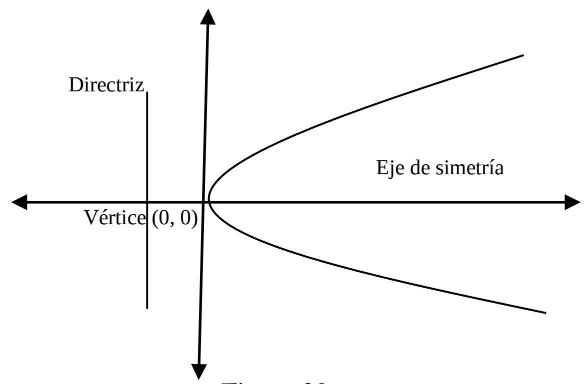


Figura 38

Donde:

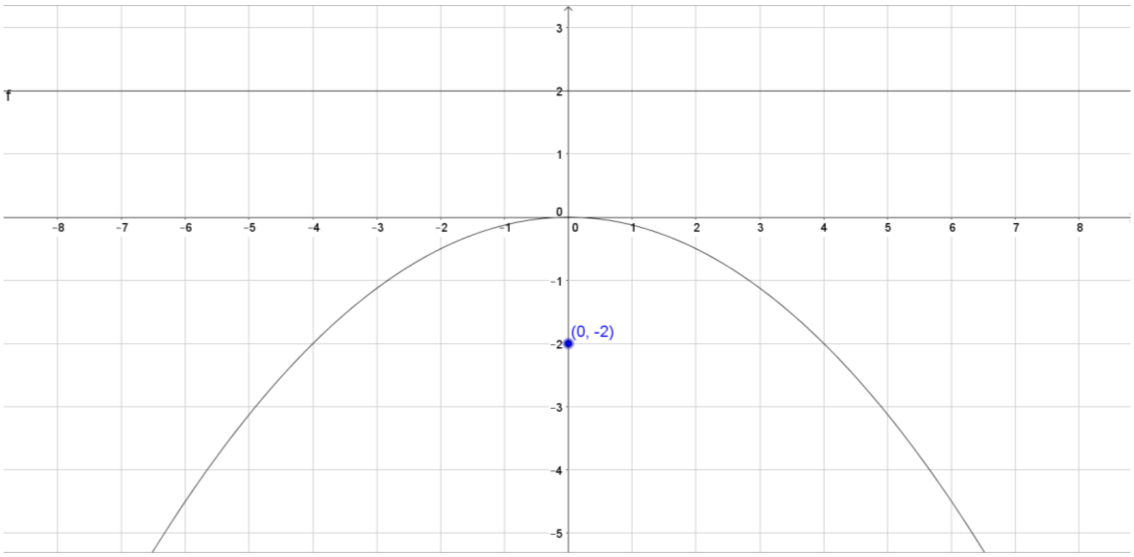
Si $(x-h)^2 = c$, donde $c < 0$ el lugar geométrico es imaginario.
Si $(x-h)^2 = 0$, el lugar geométrico son dos rectas coincidentes.
Si $(x-h)(x-k) = 0$, el lugar geométrico son dos rectas paralelas.
p es la longitud del segmento del eje entre el foco y el vértice.
La distancia entre la directriz y el foco es 2p.

<u>Ejemplo 53.-</u> Exprese cada ecuación en su forma estándar:

<u>a) $x^2 + 8y = 0$</u>

$x^2 + 8y = 0$
$x^2 = -8y$
$(x-0)^2 = -8(y-0)$

Vértice (0, 0)
La eje de simetría esta sobre el eje y
$4p = -8 \rightarrow p = -8/4 \rightarrow p = -2 \rightarrow p < 0$, la parábola abre hacia abajo.
El punto del foco es $(0, p) \rightarrow (0, -2)$
La directriz es $y = -p \rightarrow y = -(-2) \rightarrow y = 2$



Graficación:
$Y = (-1/8)x^2$

Tabla de Valores:

X	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5
Y	0	-0,125	-0,5	-1,125	-2	-3,125

b) $y^2 - 4y - 2x - 4 = 0$

$y^2 - 4y - 2x - 4 = 0$

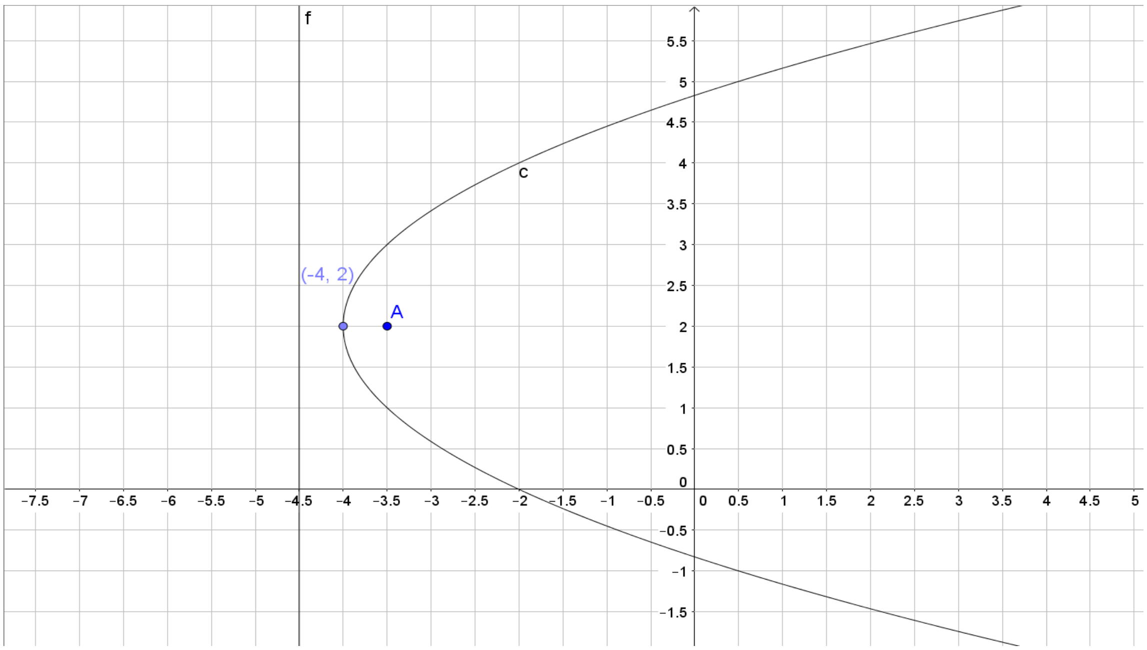
$y^2 - 4y = 2x + 4$

$y^2 - 4y + 4 = 2x + 4 + 4$

$(y-2)^2 = 8+2x$

$(y-2)^2 = 2(x + 4)$

Vértice (-4, 2).
El eje de simetría paralelo al eje X
$4p = 2 \rightarrow p = 2/4 \rightarrow p = 1/2 \rightarrow p > 0$, la parábola abre hacia derecha.
Focos$(h + p, k) \rightarrow [(-4 + 0.5), 2] \rightarrow (-3.5, 2)$
Directriz $x = h - p \rightarrow x = -4 - 0.5 \rightarrow x = -4.5$



Graficación:
"Para elaborar esta gráfica tome la siguiente sugerencia: Trácense las rectas: x + 4 = 0, y - 2 = 0 y tómelas como nuevos ejes coordenados".

$(y - 2)^2 = 2(x + 4)$
$(y - 0)^2 = 2(x + 0)$
$y^2 = 2x$

$x = y^2/2$

Vértice (0, 0)
La eje de simetría esta sobre el eje x
$4p = 2 \rightarrow p = 2/4 \rightarrow p = 1/2 \rightarrow p > 0$, la parábola abre hacia derecha.
El punto del foco es $(p, 0) \rightarrow (0, 1/2)$
La directriz es $x = -p \rightarrow y = -(1/2) \rightarrow y = -1/2$

Tabla de Valores:

Y	0	± 1	± 2	± 3
X	0	0,5	2	4,5

c) $y^2 - 8y + 17 = 0$

$y^2 - 8y + 17 = 0$
$y^2 - 8y = -17$
$y^2 - 8y + 16 = -17 + 16$
$y^2 - 8y + 16 = -1$
$(y - 4)^2 = -1$

$(y - k)^2 < 0$ el lugar geométrico es imaginario.

d) $y^2 - 8y + 17 = 0$

$y^2 - 10y + 25 = 0$
$(y - 5)^2 = 0$

$(y - k)^2 = 0$ el lugar geométrico son dos rectas coincidentes.

e) $x^2 - 7x + 12 = 0$

$x^2 - 7x + 12 = 0$
$x^2 - 7x = -12$
$x^2 - 7x + 49/4 = -12 + 49/4$
$(x - 7/2)^2 = 1/4$
$(x - 7/2) = \pm\sqrt{1/4}$
$x = \pm (1/2) + (7/2)$
$x = 4$
$x = 3$
$(x - 4)(x - 3) = 0$

$(x - h)(x - k) = 0$, el lugar geométrico son dos rectas paralelas.

6.1.5.- La Hipérbola

Se define a la hipérbola como el lugar geométrico de los puntos P en un plano, para los que el valor absoluta de la diferencia de sus distancias a 2 puntos fijos (***focos***) es constante positiva (Swokowski & Cole, 2011). La hipérbola tiene dos ejes de ***simetría perpendiculares***, el que corta la hipérbola se llama ***Eje Transverso***, el punto en el que se cortan los ejes es el ***centro de la hipérbola*** y consta de dos ramales. La ecuación general de la hipérbola es:

$$\mathbf{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Se la puede expresar también en su forma ***estándar*** o ***canónica***:

$\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
Centro de la Hipérbola (h, k)	Centro de la Hipérbola (h, k)
Hipérbola con eje transverso (a) paralelo al eje de las X, eje conjugado (b) paralelo al eje Y.	Hipérbola con eje transverso (b) paralelo al eje de las Y, eje conjugado (a) paralelo al eje X.
Las longitudes son 2a y 2b	Las longitudes son 2a y 2b
Vértices $(h + a, k)$ $(h - a, k)$	Vértices $(h, k + b)$ $(h, k - b)$
Focos $(h + c, k)$ $(h- c, k)$	Focos $(h, k + c)$ $(h, k - c)$
$c^2 = a^2 + b^2$	$c^2 = b^2 + a^2$

La figura 39 muestra la gráfica para este caso:

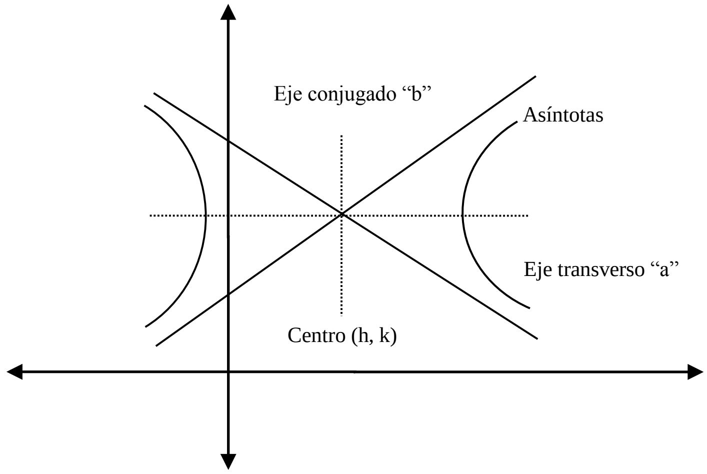


Figura 39

Si el centro de la hipérbola es el origen, entonces su ecuación general se reduce a:

$$\mathbf{Ax^2 + Cy^2 + F = 0}$$

La figura 40 muestra la gráfica para este caso:

$\frac{(x-0)^2}{a^2} - \frac{(y-0)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-0)^2}{a^2} - \frac{(x-0)^2}{b^2} = 1$
Centro de la Hipérbola (0, 0)	Centro de la Hipérbola (0, 0)
Hipérbola con eje transverso (a) sobre el eje de las X, eje conjugado (b sobre el eje Y.	Hipérbola con eje transverso (b) sobre el eje de las Y, eje conjugado (a) sobre el eje X.
Las longitudes son 2a y 2b	Las longitudes son 2a y 2b
Vértices (a, 0) (– a, 0)	Vértices (0, b) (0, – b)
Focos (c, 0) (-c, 0)	Focos (0, c) (0, – c)
$c^2 = a^2 + b^2$	$c^2 = b^2 + a^2$

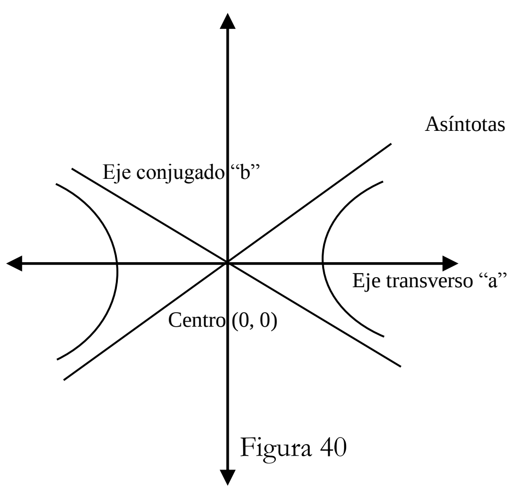


Figura 40

Donde:
Si a = b las asíntotas son perpendiculares y la figura se denomina Hipérbola Equilátera.
Toda hipérbola tiene un par de asíntotas que son rectas que se cortan y se dan por:

- $(x - h)/a = \pm (y - k)/b$
- $y = \pm (b/a)x$

a = longitud del semieje transverso
b = longitud del semieje conjugado
c = distancia del centro al foco

Si $[(x - h)^2]/a^2 - [(y - k)^2]/b^2 = 0$, el lugar geométrico son dos recta intersecantes.

No existe lugar geométrico imaginario en una hipérbola.

<u>Ejemplo 54.-</u> Exprese cada ecuación en su forma estándar:

<u>a) $16y^2 - 9x^2 - 144 = 0$</u>

$16y^2 - 9x^2 - 144 = 0$
$16y^2 - 9x^2 = 144$

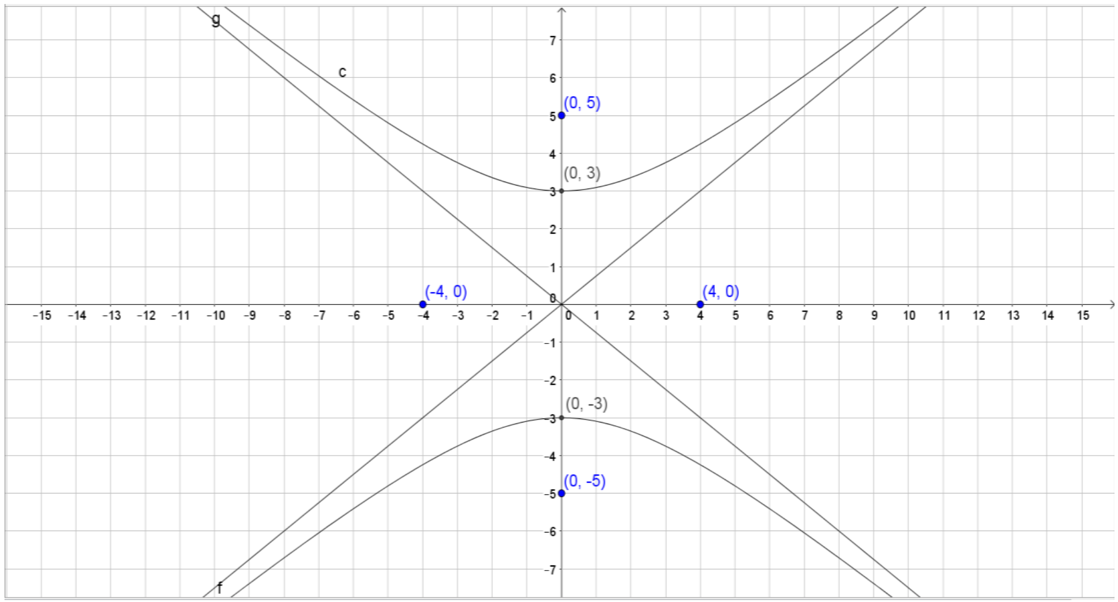
Dividimos todo para 144.

$$\frac{16y^2}{144} - \frac{9^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

$$\frac{(y-0)^2}{3^2} - \frac{(x-0)^2}{4^2} = 1$$

Eje Transverso en el eje y
Centro (0, 0)
a = 4, longitud es 2a $\rightarrow$ 2(4) = 8 Eje transverso
b = 3, longitud es 2b $\rightarrow$ 2(3) = 6 Eje conjugado
No hay intercepción con el eje x
Intercepción con el eje y es $y = \pm a \rightarrow y = \pm 3$
Puntos del foco (0, -c) y (0, c) $\rightarrow$ (0, -5) y (0, 5)
$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 4^2 + 3^2 \rightarrow c^2 = 25 \rightarrow c = \pm\sqrt{25} \rightarrow c = \pm 5$



Graficación:

$y^2/9 - x^2/16 = 1$
$y^2/9 = 1 + x^2/16$
$y^2 = (1 + x^2/16)9$

$$y = \pm\sqrt{\frac{1 + x^2}{16} * 9}$$

Las asíntotas son:

- $y = (3/4)x$
- $y = (-3/4)x$

Tabla de Valores:

X	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5
Y	± 3	± 3,09	± 3,35	± 3,75	± 4,24	± 4,80

b) $9y^2 - 36y - x^2 + 12x - 36 = 0$

$9y^2 - 36y - x^2 + 12x - 36 = 0$
$9(y^2 - 4y) - (x^2 - 12x) = -36$
$9(y^2 - 4y + 4) - (x^2 - 12x + 36) = 36 + 36 - 36$
$9(y^2 - 4y + 4) - (x^2 - 12x + 36) = 36$
$9(y - 2)^2 - (x - 6)^2 = 36$
$9(y - 2)^2/36 - (x - 6)^2/36 = 36/36$

$(y - 2)^2/4 – (x - 6)^2/36 = 1$
$(y- 2)^2 / 2^2 – (x - 6)^2/ 6^2 = 1$

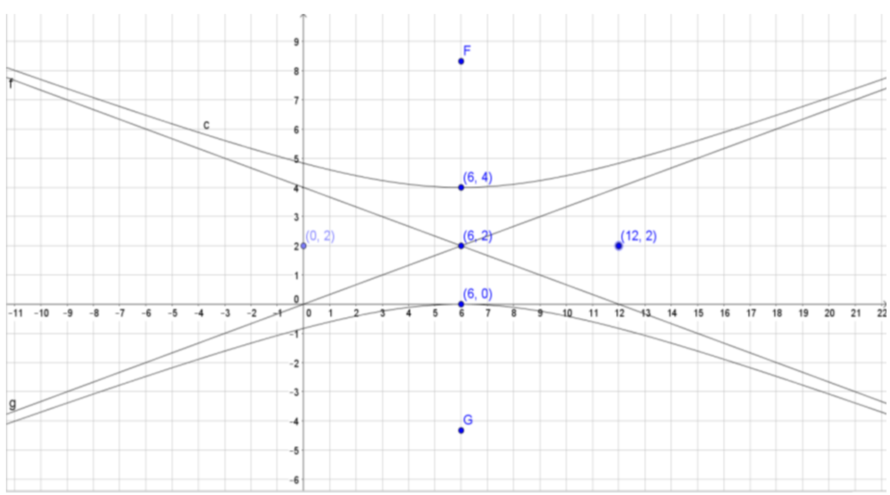
Centro (6, 2)
Eje Transverso paralelo al eje Y
a = 6, longitud 2a $\longrightarrow$ 2(6) = 12Eje conjugado
b = 2, longitud 2b $\longrightarrow$ 2(2) = 4 Eje transverso
Vértices (h, k + a) (h, k – a) $\longrightarrow$ (6, 4) y (6, 0)
Focos (h, k + c) (h, k – c) $\longrightarrow$ $(6, 2 +\sqrt{40})$ y $(6, 2 - \sqrt{40})$

Las asíntotas son:

$(y -2)/2 = \pm (x -6)/6$

$y = \pm (1/3)(x –6) + 2$

- $y = (1/3)(x -6) + 2;$
  x = 3 y = 1 (3, 1)
  x = -3 y = -1 (-3, -1)
- $y = -(1/3)(x -6) + 2$
  x = 3 y = 3 (3, 3)
  x = -3 y = 5 (-3, 5)



Graficación:
“Para elaborar esta gráfica tome la siguiente sugerencia: Trácense las rectas: x -6 = 0, y - 2 = 0 y tómelas como nuevos ejes coordenados”.

$(y - 2)^2 / 2^2 – (x - 6)^2 / 6^2 = 1$
$(y - 0)^2 / 2^2 – (x - 0)^2 / 6^2 = 1$
$y^2 / 2^2 – x^2 / 6^2 = 1$
$y^2 / 2^2 = 1 + x^2 / 6^2$

$y^2 = [(1 + x^2 / 6^2) / 2^2]$

$$y = \pm\sqrt{\frac{1 + x^2}{36} * 4}$$

Tabla de Valores:

X	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5
Y	± 2	± 2,03	± 2,11	± 2,24	± 2,40	± 2,60

c) $5x^2 + 20x - 3y^2 - 24y - 28 = 0$

$5x^2 + 20x - 3y^2 - 24y - 28 = 0$
$5(x^2 + 4x) - 3(y^2 + 8y) = 28$
$5(x^2 + 4x + 4) - 3(y^2 + 8y + 16) = 28 + 20 - 48$
$5(x^2 + 4x + 4) - 3(y^2 + 8y + 16) = 0$
$5(x + 2)^2 - 3(y + 4)^2 = 0$

Como c = 0 el lugar geométrico son dos recta intersecantes y cuyo punto de intersección es (-2, -4)

$$\frac{(x + 2)}{\sqrt{3}} = \pm\frac{(y + 4)}{\sqrt{5}}$$

$y = \pm \sqrt{(5/3)}\,(x + 2) - 4$

$y = \sqrt{(5/3)}\,(x + 2) - 4$
$y = -\sqrt{(5/3)}\,(x + 2) - 4$

6.2.- Funciones trascendentes (no algebraicas)

Los polinomios se forman haciendo uso de las cuatro operaciones fundamentales y la extracción de raíces (Ress, Sparks, & Sparks, 2007).

Aquellas funciones que no cumplen con dichas condiciones, se las considera funciones trascendentes, los dos tipos de funciones no algebraicas que estudiaremos en esta sección son: las funciones exponenciales y las funciones logarítmicas. Existen otras funciones no algebraicas que no estudiaremos como por ejemplo las funciones trigonométricas.

Las funciones exponenciales, así como las funciones logarítmicas, tienen aplicaciones importantes en la dinámica económica, como por ejemplo: el crecimiento poblacional, la optimización en el tiempo y el interés compuesto.

6.2.1.- Función exponencial

El término exponente es un indicador de la potencia a la cual se va a elevar una variable. Una función cuya variable independiente aparece en el papel de un exponente se llama función exponencial (Ress, Sparks, & Sparks, 2007). En otras palabras la incógnita es un exponente.

En 1970 Thomas Malthus, propuso que el crecimiento de la población era exponencial, mientras que el crecimiento de la producción de alimentos era lineal, por lo tanto en algún momento, la población superará a la producción de alimentos. Dicha propuesta ha sido causa de profundos análisis en las políticas económicas.

Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = 2^x \;\; y \;\; g(x) = x^2$$

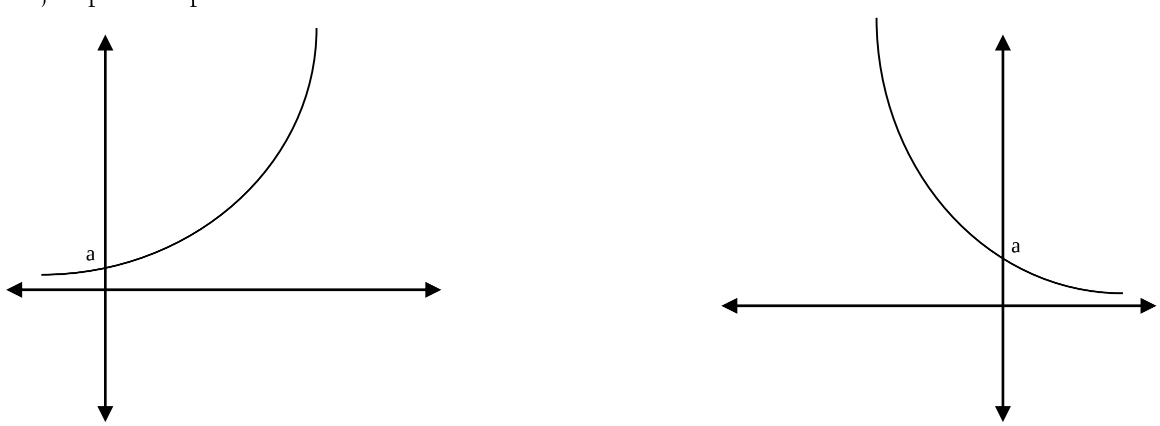
Observemos que no son las mismas funciones. La función g es cuadrática; en cambio la función *f* es una función exponencial.

Definimos a una función exponencial como aquella función *f* constituida por una base constante (a) y un exponente variable (x). Este tipo de función se la denota de la siguiente manera:

$$y = a^x;$$

Donde:
a ≠ 1
a = es una constante llamada ***base*** que debe ser positiva.
x = es el ***exponente*** y es una variable.
El dominio de *f* es el conjunto de todos los números reales, R
El rango de *f* es el conjunto de los números reales positivos (0 < y < ∞).
El y intercepto es el punto (0, 1).

Si a > 0 la función es creciente, pero si 0 < a < 1 la función es decreciente, según se puede observar en la figura 40. Debemos tomar en cuenta que esta función tiene una asíntota que es el eje x, es decir, la curva nunca topara el eje x pero se aproximara indefinidamente a él.



a > 1 0 < a < 1

Figura 41

Como vemos en la figura 41, estas funciones exponenciales pasan por el punto (0, 1), pero si ***a*** varia las tangentes de las distintas curvas en dicho punto determinaran ángulos de inclinación diferentes. Sola una de estas dará un ángulo de inclinación de 45º con el eje X y es la función:

$$y = e^x$$

Donde:

e = 2,71828183…… y esta es la función exponencial más usada.

Una función exponencial natural es como su nombre lo dice una función exponencial pero que tiene la particularidad de tener como base ya no un número real sino tiene como base al número de neper, que fue utilizado por vez primera por el matemático escocés John Napier, de ahí su nombre.

Aunque su nombre adecuado es función exponencial natural, esta función es tan importante que se acostumbra llamarla *función exponencial* sin mencionar su base y es de uso más frecuente en la investigación de fenómenos físicos, matemáticas avanzadas y en las ciencias económicas, donde la mayoría de las funciones exponenciales tienen base *e*.

Las propiedades de los exponentes que se repasaron en cursos anteriores, pueden aplicarse a este tipo de funciones. Por conveniencia dichas propiedades se enunciaran a continuación. Los valores de a y b representan números reales positivos, *x* e *y* asumen valores racionales esta notación es debido a las funciones exponenciales:

Propiedades de los exponentes

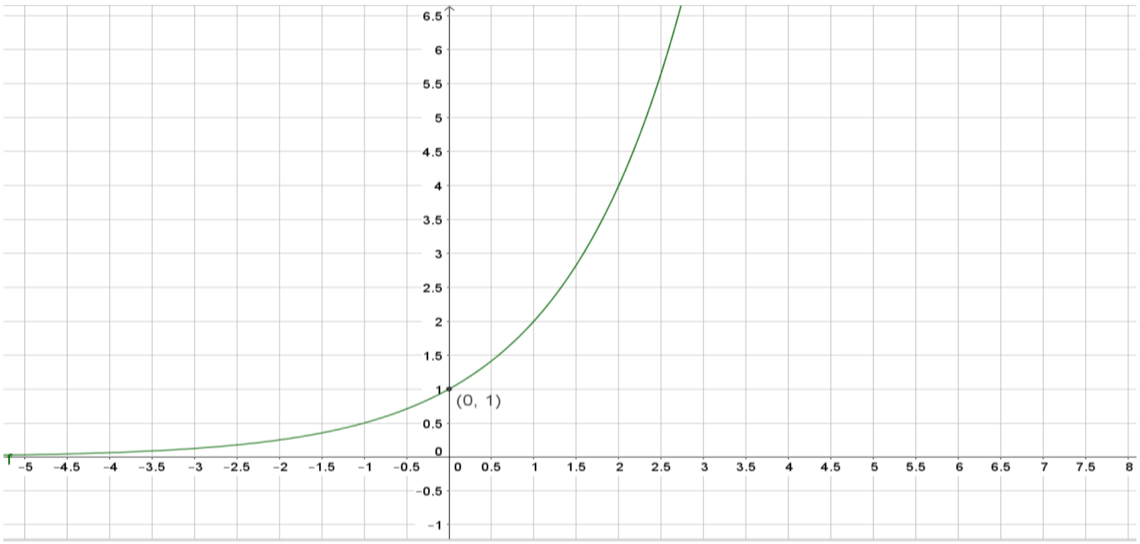
- $a^x * a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{x*y}$
- $(ab)^x = a^x b^x$
- $(\frac{a}{b})^x = (\frac{a^x}{b^x});\ b \neq 0$
- $a^{-1} = \frac{1}{a}$
- $a^{(x/y)} = \sqrt[y]{a^x};\ x, y\ enteros, x > 0$

Ejemplo 55.- **Grafique las siguientes funciones exponenciales:**

$\boldsymbol{y = 2^x}$

Tabla de Valores:

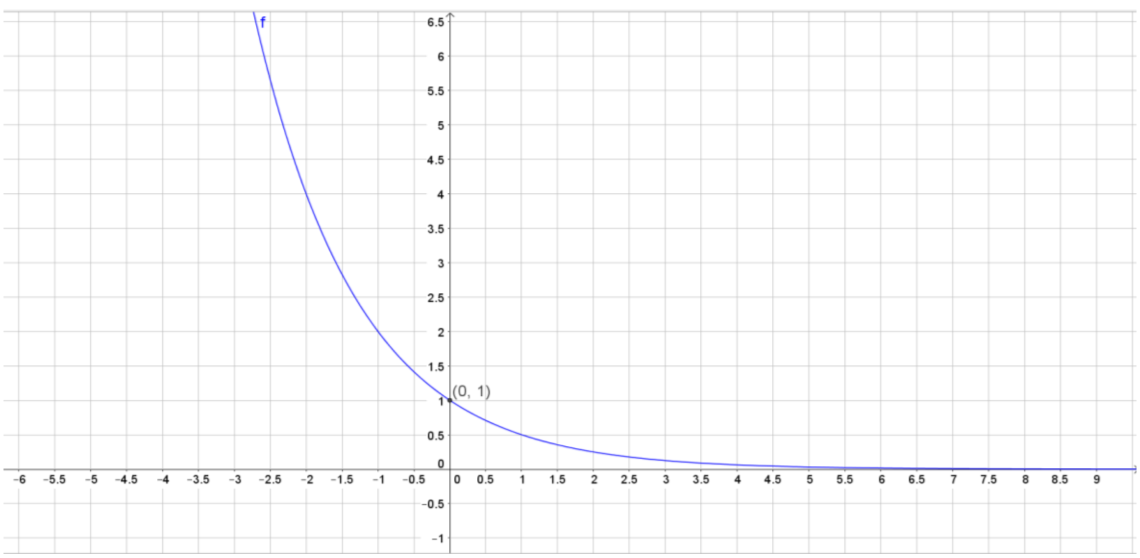
X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	(1/8)	(1/4)	(1/2)	1	2	4	8



$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Tabla de Valores:

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	8	4	2	1	(1/2)	(1/4)	(1/8)



6.2.2.- Función logarítmica

Una vez estudiada la función exponencial, procederemos ahora a estudiar una nueva clase de función, las ***logarítmicas***, que no son más que la inversa de ciertas funciones exponenciales de base a (Swokowski & Cole, 2011). Las mismas se denotan de la siguiente manera:

$$y = \log_a x$$

Se lee: ***"logaritmo de x en base a"***.

El logaritmo de un número, es el exponente al que hay elevar la base para obtener dicho número (Swokowski & Cole, 2011).

La base que más se utiliza es la de base 10, por su facilidad al efectuar simplificaciones, pero por fines teóricos siempre se toma la base *e*.

Las funciones log, son el resultado de invertir los papeles de las variables dependiente e independiente de las funciones exponenciales correspondientes (Chiang & Wainwright, 2006).

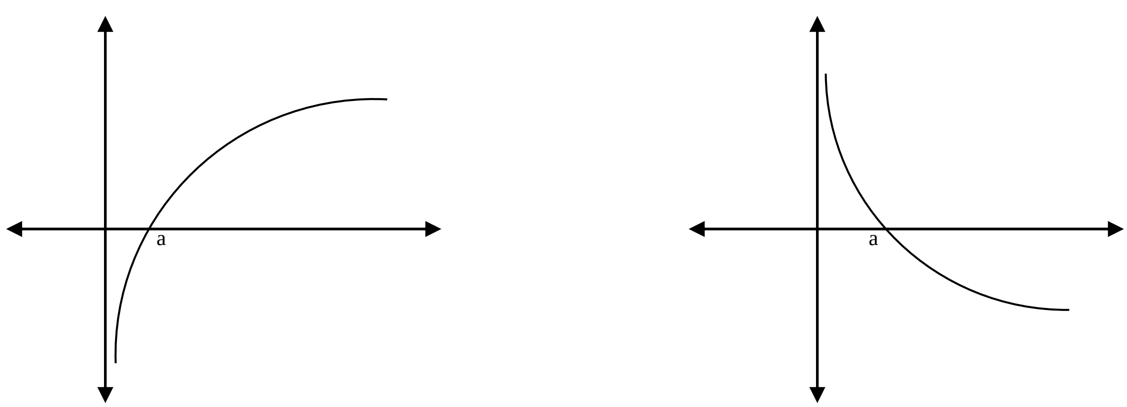
Si comenzamos con la siguiente función exponencial:

$$y = 2^x$$

Luego intercambiamos las variables x e y, obtenemos la función inversa:

$$x = 2^y \leftrightarrow y = \log_2 x$$

Entonces $y = \log_2 x$ es equivalente a $x = 2^y$, es decir, $y = \log_2 x$ es la potencia a la que debe elevarse 2 para obtener x.
Dónde:
$a \neq 1$
a = es una constante llamada ***base*** que debe ser positiva.
X = es el ***exponente*** y es una variable.
El rango de f es el conjunto de todos los números reales, R
El dominio de f es el conjunto de los números reales positivos ($0 < y < \infty$).
El *y* intercepto es el punto (1, 0), tal como lo muestra la gráfica 42.



a > 1 0 < a < 1

Figura 42

Igual que en la función exponencial recordaremos las propiedades de los logaritmos, donde x e y son números reales positivos:

Propiedades de los logaritmos

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^r = r * \log_a x$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = a$
- $a \log_a x = x$

Ejemplo 56.- **Grafique las siguientes funciones logarítmicas:**

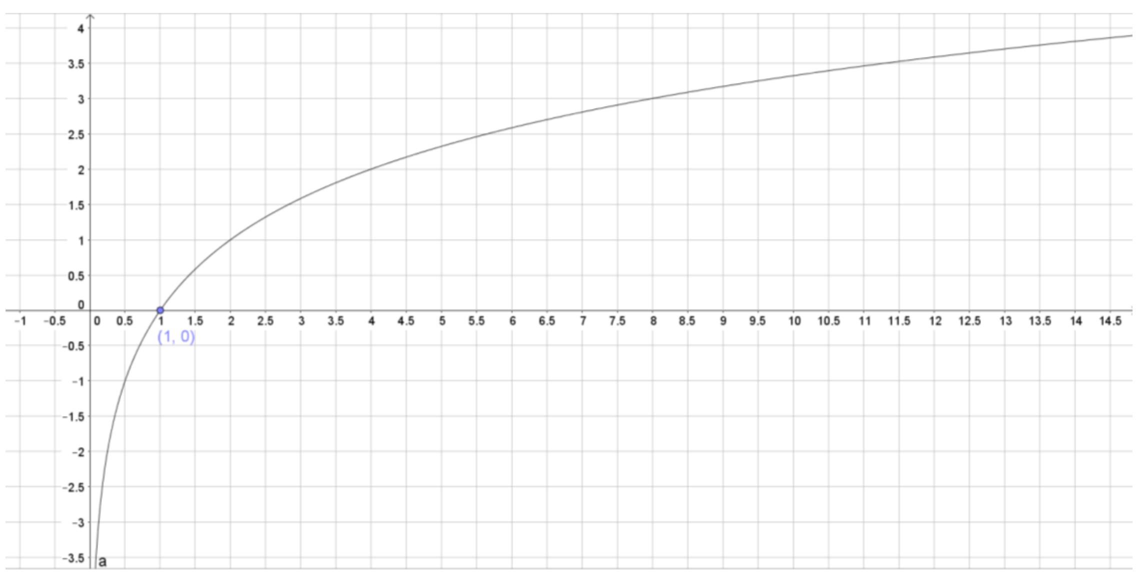
$\boldsymbol{y = \log_2 x}$

Transformado la función logarítmica tendríamos:

$x = 2^y$

Tabla de Valores:

Y	-3	-2	-1	0	1	2	3
X = 2y	(1/8)	(1/4)	(1/2)	1	2	4	8



$\boldsymbol{y = \log_{1/2} x}$

Transformado la función logarítmica tendríamos:

$x = \left(\frac{1}{2}\right)^y$

Tabla de Valores:

Y	-3	-2	-1	0	1	2	3
X = (1/2)^y	8	4	2	1	(1/2)	(1/4)	(1/8)

Laboratorio 6

1.- Encontrar la forma canónica, el centro, el radio y graficar las siguientes funciones:

a) $x^2 + y^2 - 16x + 2y + 65 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 19 = 0$

2.- Si r = 6 y el centro son los puntos A (-3, 6) y B (0, 0). Determine la ecuación de la circunferencia.

3.- Encuentre la ecuación de la elipse si los vértices son $(0, \pm 7)$ y los focos son $(0, \pm 2)$.

4.- Dadas las siguientes elipses analícelas y grafíquela:

a) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$

b) $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{1} = 1$

5.- Encuentre la ecuación de la parábola que satisface las condiciones dadas:

a) Foco (2, 0) y directriz x = -2
b) Foco (-3, -2) y directriz y = 1

6.- Dada las siguientes ecuaciones parabólicas, llévelas a su forma canónica y grafíquelas:

a) $4y^2 - x + 16y + 12 = 0$
b) $x^2 - 6x^2 - 4y + 13 = 0$

7.- Encuentre la ecuación de la hipérbola que satisface las condiciones dadas:

a) Focos $(0, \pm 3)$, vértices $(0, \pm 2)$
b) Focos $(\pm 5, 0)$, vértices $(\pm 3, 0)$

8.- Dada la siguiente ecuación de hipérbolas, llévela a su forma canónica y grafíquela:

a) $4x^2 + 56x - y^2 + 2y + 195 = 0$
b) $25y^2 - 36x^2 - 900 = 0$

9.- Para cada una de las siguientes funciones cuadráticas identifíquelas, exprésela en su forma estándar, indique sus parámetros, características y grafíquelas:

a) $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$
b) $4x^2 + 40x + y + 106 = 0$
c) $16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0$
d) $9x^2 - 4y^2 - 54x - 16y + 29 = 0$

e) $y^2 + 20x = 0$
f) $x^2 + y^2 - 4 = 0$
g) $3x^2 - 2y^2 - 12 = 0$
h) $4x^2 + 7y^2 - 28 = 0$

3.- Encuentre la ecuación y trace la gráfica según las características dadas:

a) Centro (0, 0); radio $\sqrt{11}$
b) Centro (-2, -1); radio 2
c) Foco (0, -4); directriz $y = -2$
d) Foco ($\pm$ 4, 0); eje transversal 4
e) Centro (-5, 6); radio $\sqrt{5}$
f) Vértice (0, 0); eje de simetría “eje x”; pasa por el punto (4, 8)
g) Centro (0, 0); eje transverso “eje x”; longitud eje transverso 8; longitud eje conjugado 6

4.- Grafique cada función exponencial para $-3 \leq x \leq 3$ y su respectiva inversa:

a) $y = 3^x$
b) $y = (1/3)^x$
c) $y = e^{2x}$
d) $y = e^{-2x}$
e) $y = \log_3 x$
f) $y = \log_e x$
g) $y = 3\ln(-x)$

Capítulo VII
Aplicaciones en La Economía

Capítulo VII

Aplicaciones en la economía

7.1. Funciones aplicadas a la economía.

Función de oferta: $O_{(x)}$ para el artículo es el precio unitario $p = O_{(x)}$ por el cual los productores están dispuestos a ofrecer x unidades al mercado.

Función de Demanda: $D_{(x)}$ para el artículo es el precio unitario $p = D_{(x)}$ que debe cobrarse por cada el cual los productores están dispuestos a ofrecer x unidades al mercado.

Función de Costos: $C_{(x)}$ es el costo de producir x unidades de un artículo.

Función de Ingreso: $R_{(x)}$ obtenido por la venta de x unidades del artículo está dado por:

$$R_{(x)} = (\text{número de artículos vendidos})*(\text{precio del articulo})$$
$$R_{(x)} = xp_{(x)}$$

Función de Utilidad: $U_{(x)}$ es la utilidad obtenida al vender x unidades del artículo y está dada por la diferencia de los ingresos y los gastos:

$$U_{(x)} = R_{(x)} - C_{(x)}$$
$$U_{(x)} = xp_{(x)} - C_{(x)}$$

<u>Ejemplo 57</u>.- la función de tazas de café compradas está dada por los siguientes datos, cuando el precio de la taza es 1,50 dólares las personas compran 3 tazas, y cuando el precio sube a 3 dólares, las personas compran 1 taza.

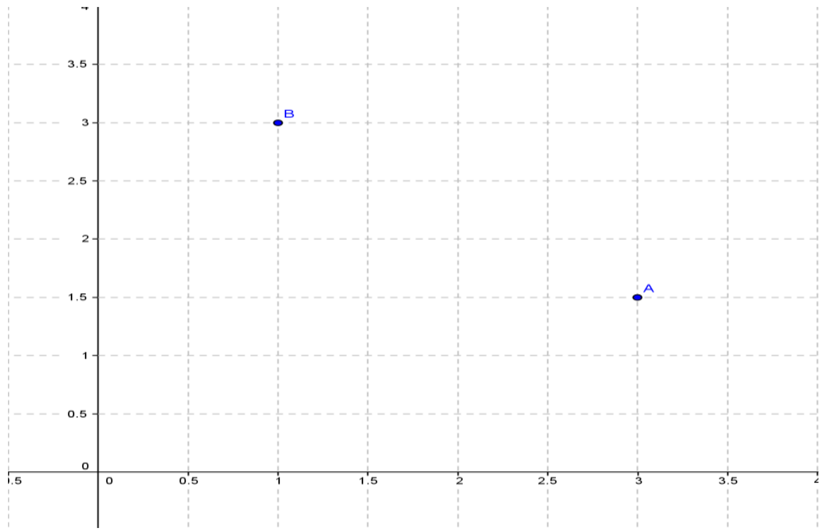
a) Identifique las variables como dependiente e independientes
b) Grafique los puntos dentro de un plano cartesiano
c) Obtenga la función respectiva e identifíquela
d) Grafique la función

a)

Variable independiente (eje y): precio (p)
Variable dependiente (eje x): cantidad (q)

b)

Punto A = (3; 1,5)
Punto B = (1; 3)



c)

$$m = \frac{3 - 1{,}5}{1 - 3}$$

$$m = \frac{1{,}5}{-2}$$

$$m = -\frac{3}{4}$$

$$p - 3 = -\frac{3}{4}(q - 1)$$

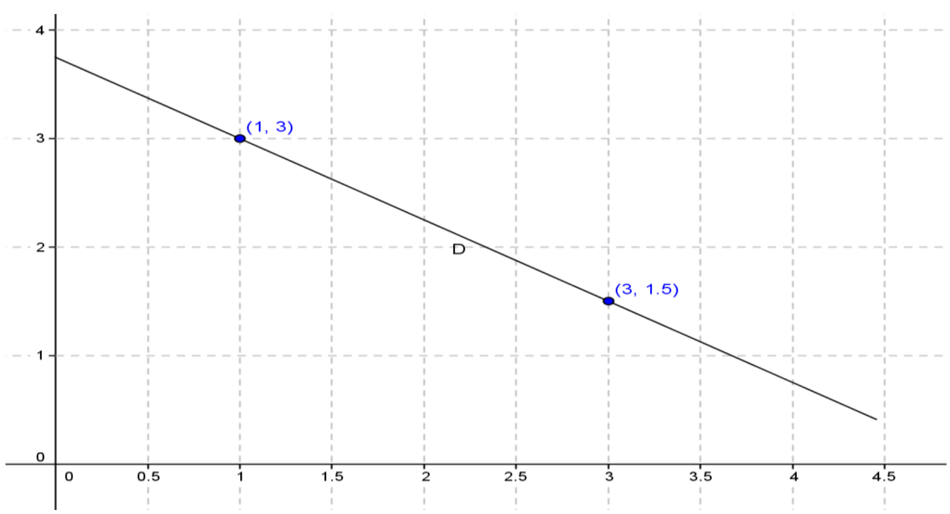
$$p - 3 = -\frac{3}{4}q + \frac{3}{4}$$

$$p = -\frac{3}{4}q + \frac{3}{4} + 3$$

$$\boldsymbol{p = -\frac{3}{4}q + \frac{15}{4}}$$

Es una función de Demanda.

d)



<u>Ejemplo 58</u>.- la función de galletas vendidas está dada por los siguientes datos, cuando el precio de las galletas es 0,50 dólares las personas venden 2 galletas, y cuando el precio sube a 4,50 dólares, las personas venden 10 galletas.

a) **Identifique las variables como dependiente e independientes**
b) **Grafique los puntos dentro de un plano cartesiano**
c) **Obtenga la función respectiva e identifíquela**
d) **Grafique la función**

a)

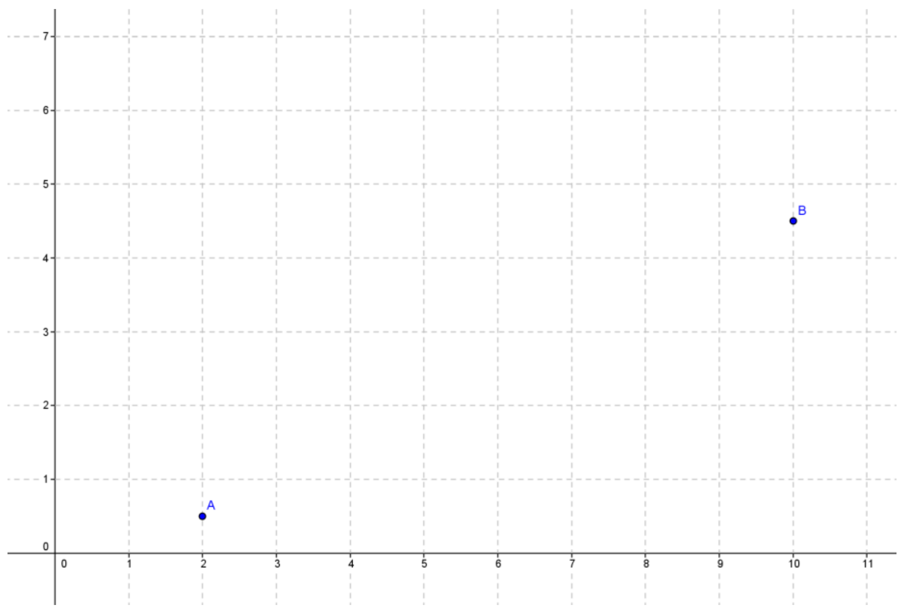
Variable independiente (eje y): precio (p)

Variable dependiente (eje x): cantidad (q)

b)

Punto A = (2; 0,5)

Punto B = (10; 4,5)



c)

$$m = \frac{4{,}5 - 0{,}5}{10 - 2}$$

$$m = \frac{4}{8}$$

$$m = \frac{1}{2}$$

$$p - 0{,}5 = \frac{1}{2}(q - 2)$$

$$p - 0{,}5 = \frac{1}{2}q - 1$$

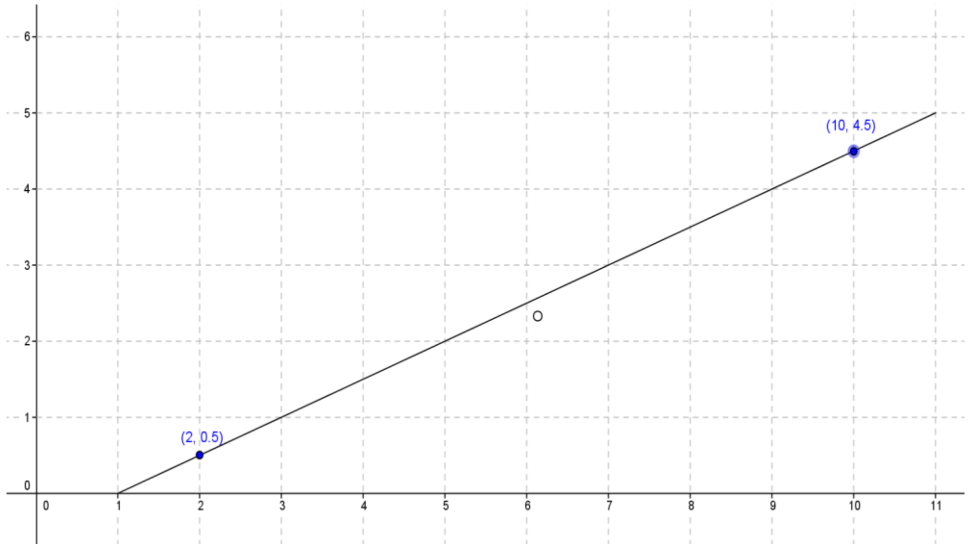
$$p = \frac{1}{2}q - 1 - 0{,}5$$

$$p = \frac{1}{2}q - 1{,}5$$

$$\boldsymbol{p = \frac{1}{2}q - \frac{3}{2}}$$

Es una función de Oferta

d)



<u>Ejemplo 59</u>.- Dada las siguientes funciones para el mercado de fundas de caramelos:

$$\boldsymbol{p = -\frac{4}{5}q + \frac{5}{2}}$$

$$\boldsymbol{p = \frac{2}{3}q + 1}$$

a) Identifique la función de oferta y demanda, justifique su respuesta.
b) Obtenga el precio y la cantidad de equilibrio.
c) Grafique la función de oferta y demanda.

a)

Función de oferta: $p = \frac{2}{3}q + 1$

Función de demanda: $p = -\frac{4}{5}q + \frac{5}{2}$

b)

$$\frac{2}{3}q + 1 = -\frac{4}{5}q + \frac{5}{2}$$

$$\frac{2}{3}q + \frac{4}{5}q = \frac{5}{2} - 1$$

$$\frac{10 + 12}{15}q = \frac{5 - 2}{2}$$

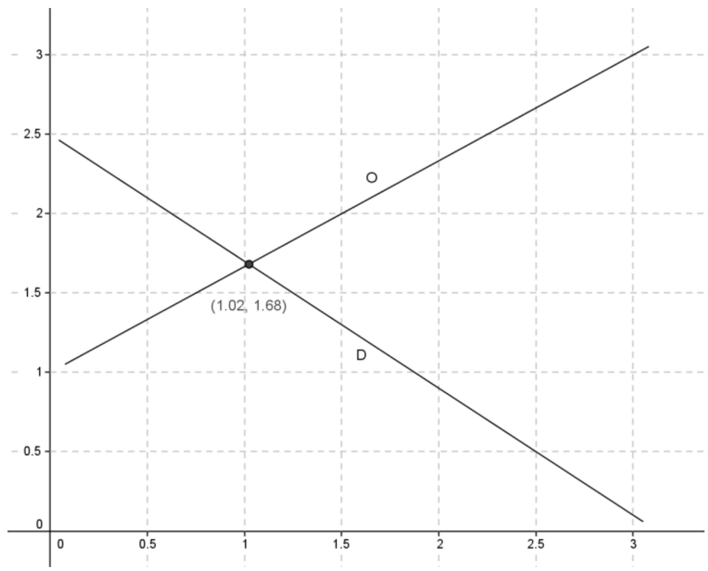
$$\frac{22}{15}q = \frac{3}{2}$$

$$q = \frac{3}{2}\left(\frac{15}{22}\right)$$

$$\boldsymbol{q = \frac{45}{44}}$$
$$\boldsymbol{q \approx 1,02}$$

$$p = \frac{2}{3}\left(\frac{45}{44}\right) + 1$$
$$p = \frac{15}{22} + 1$$
$$p = \frac{15 + 22}{22}$$
$$\boldsymbol{p = \frac{37}{22}}$$
$$\boldsymbol{p \approx 1,68}$$

c)



<u>Ejemplo 60</u>.- Los costos variables y fijos para una empresa de gaseosas light, que embotella 10.000 gaseosas al mes son:

- **Costos fijos:**

Mantenimiento de las embotelladoras $1.500 dólares
Salarios $4.000 dólares
Alquiler de vehículos para distribución de las gaseosas $3.000 dólares
Servicios básicos $1.500 dólares
Publicidad $750 dólares

- **Costos variables para gaseosas de 1 litro:**

Envase descartable plástico $0,10 dólares
Dióxido de carbono, $70 dólares el tanque que sirve para envasar 100 botellas
Etiquetas del producto $0,20 dólares
Tapas de botellas $0,15 dólares
Recargo por entrega a domicilio $0,40

a) **Elabore la función de costo fijo y costo variable**
b) **Elabore la función de costo total**
c) **Calcule el costo variable y el costo total**
d) **Grafique las funciones obtenidas**

a)

$CF = 1500 + 4000 + 3000 + 1500 + 750$

$CF = 10750$

$CV = (0{,}10 + 0{,}70 + 0{,}20 + 0{,}15 + 0{,}40) \times q$

$CV = 1{,}55q$

b)

$CT = CV + CF$

$CT = 1{,}55q + 10.750$

c)

$CV = 1{,}55q$

$CV = 1{,}55(10.000)$

$\boldsymbol{CV = 15.500}$

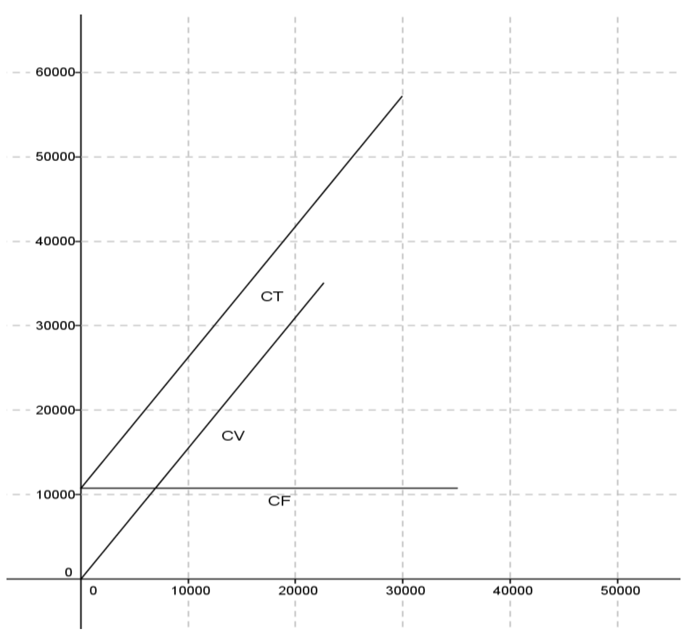
$CT = 1{,}55q + 10.750$

$CT = 1{,}55(10.000) + 10.750$

$CT = 15.500 + 10.750$

$\boldsymbol{CT = 26.250}$

d)



<u>Ejemplo 61</u>.- Dada las siguientes funciones para la empresa de gaseosas del ejemplo anterior:

$$\boldsymbol{CT = 1,55q + 10.750}$$

$$\boldsymbol{I = 3,40q}$$

a) **Encuentre el punto de equilibrio de la empresa de gaseosas light.**

b) **Grafique las funciones y el punto de equilibrio.**

c) **Que sucede si el precio de las gaseosas de 3,40 dólares baja cincuenta centavos por motivo de la entrada de una nueva gaseosa al mercado ¿Cuántas botellas se venden ahora?**

d) **¿Qué sucede con las curvas de ingreso y costo total? ¿Qué sucede con el punto de equilibrio? Grafique y justifique su respuesta.**

a)

$$3,40q = 1,55q + 10.750$$

$$3,40q - 1,55q = 10.750$$

$$1,85q = 10.750$$

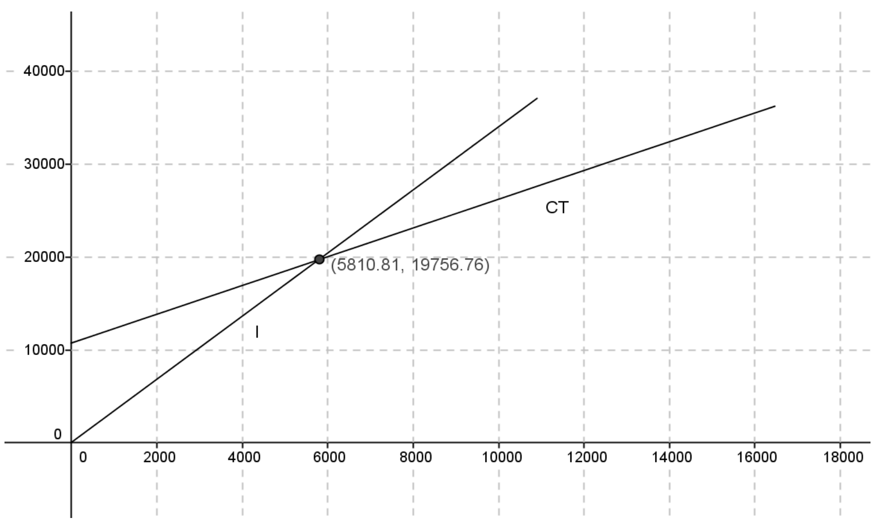
$$q = \frac{10.750}{1,85}$$

$$\boldsymbol{q = 5.810,81}$$

$$I = 3,40(5.810,81)$$

$$\boldsymbol{I = 19.756,75}$$

b)



c)

$$2,90q = 1,55q + 10.750$$

$$2,90q - 1,55q = 10.750$$

$$1,35q = 10.750$$

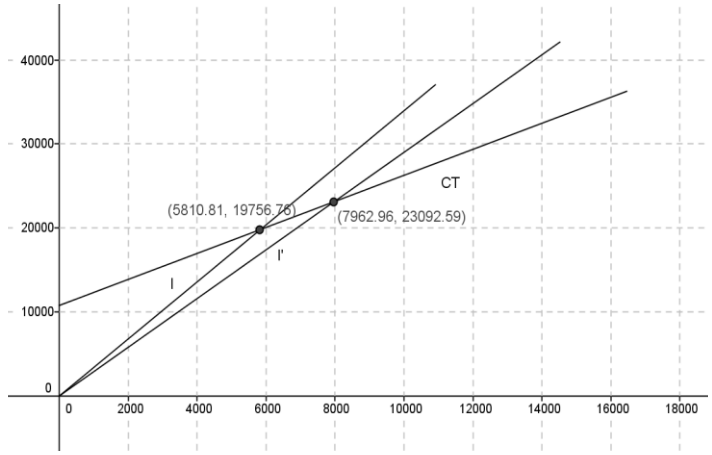
$$q = \frac{10.750}{1,35}$$

$$\boldsymbol{q = 7.962,96}$$

$$I = 2,90(7.962,96)$$

$$\boldsymbol{I = 23.092,58}$$

d)



<u>Ejemplo 62</u>**.- Ángel tiene un ingreso de $ 20 dólares a la semana. Él quiere comprar unos libros de economía los cuales cuestan $ 10 dólares cada uno y también necesita folletos de matemáticas, los cuales cuestan $5 dólares cada uno.**

a) **Dibuje la restricción presupuestaria**
b) **Suponga que el ingreso de Ángel se incrementa en un 25%. Grafique la nueva recta presupuestaria.**
c) **Suponga que el Servicio de Rentas Internas establece un impuesto especial sobre los libros importados de economía del 10%. Grafique la nueva recta presupuestaria.**

a)

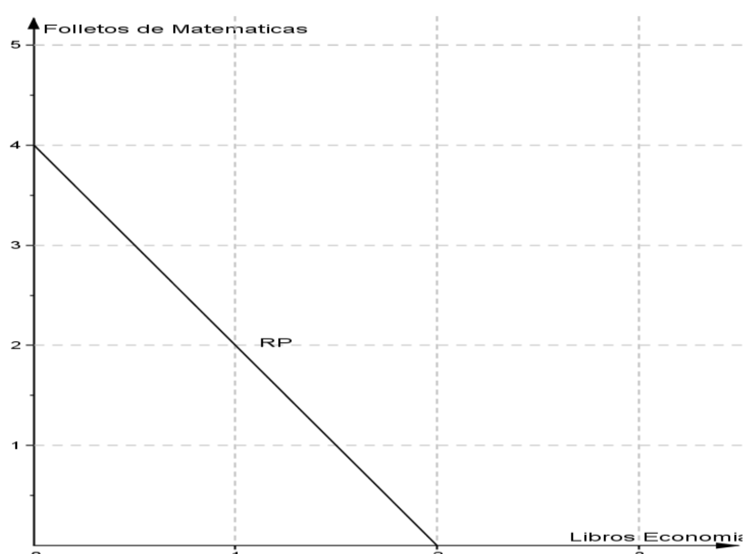
x= Libros de Economía
y= Folletos de Matemáticas
A= Ingreso de Ángel

$A = p_{(x)}x + \ p_{(y)}y$

$20 = 10x + 5y$

$5y = 20 - 10x$

$y = 4 - 2x$

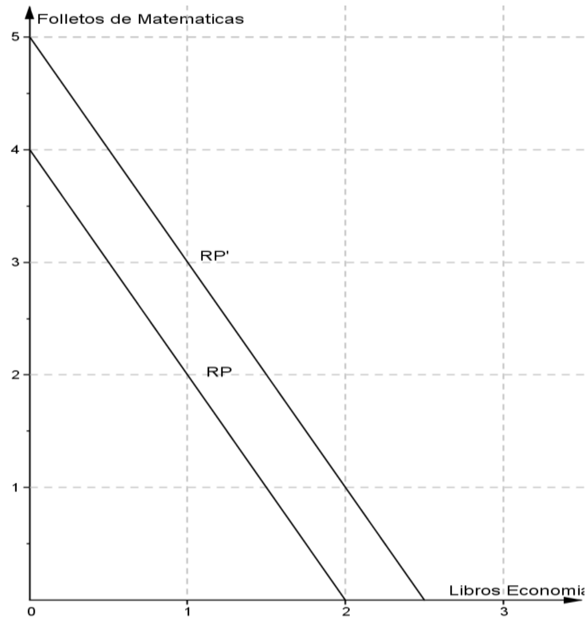


b)

$25 = 10x + 5y$

$y = \dfrac{25}{5} - \dfrac{10x}{5}$

$y = 5 - 2x$

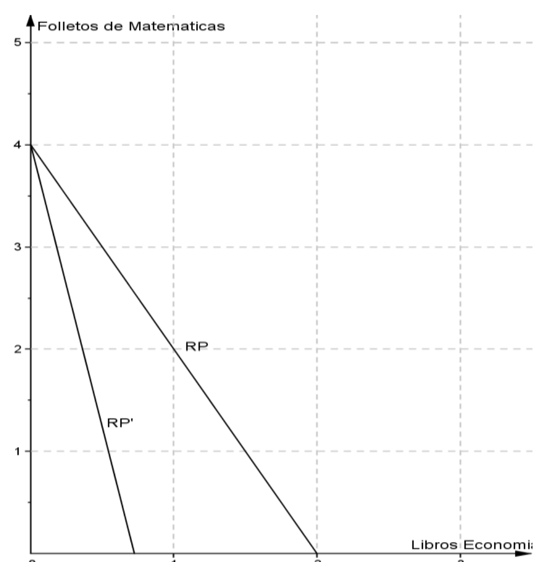


c)

$20 = 11x + 5y$

$5y = 20 - 11x$

$y = 4 - \dfrac{11x}{5}$



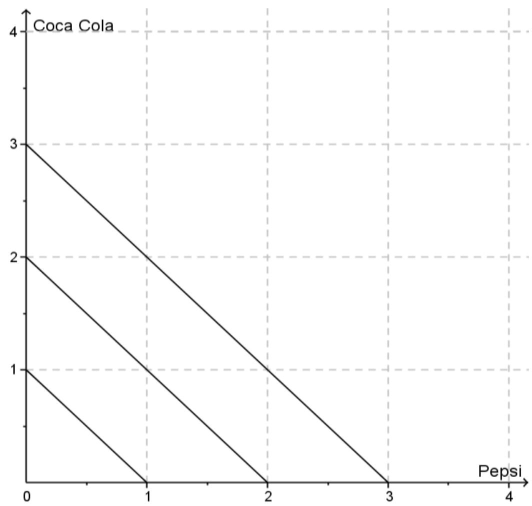
<u>Ejemplo 63</u>.- Lorena es incapaz de diferenciar entre la Coca-Cola y la Pepsi. Si los bienes son sustitutos perfectos. La RMS será siempre constante e igual a 1.

a) **Dibuje las curvas de indiferencia, colocando la Cola-cola en el eje de las ordenadas y Pepsi en el eje de las abscisas.**

b) **Lorena tiene $ 6 dólares para gastar en el bar de la universidad esta semana. La Cola-cola cuesta $ 1,5 dólares cada pack de seis y la Pepsi cuesta $ 1 dólares. Dibuje la restricción presupuestaria, junto con las curvas de indiferencia. ¿Cuál es la cesta de consumo óptima? Dibújela en el mismo gráfico.**

c) **Si el precio de la Coca-Cola y la Pepsi es el mismo, ¿qué combinación de Cola-cola y Pepsi comprará Lorena?**

a)



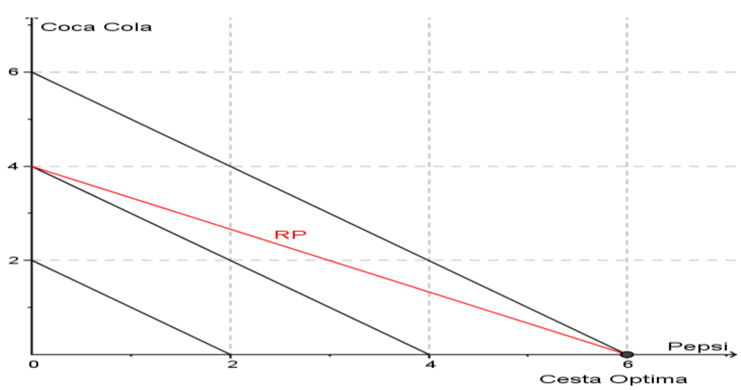
b)

$6 = 1x + 1{,}5y$

$1{,}5y = 6 - 1x$

$y = \dfrac{6}{1{,}5} - \dfrac{1x}{1{,}5}$

$y = 4 - \dfrac{10x}{15}$



c)

Al ser sustitutos perfectos 1 a 1, cualquiera de las combinaciones que se encuentre dentro de la restricción presupuestaria, maximizará su utilidad.

Laboratorio 7

1.- Una pequeña empresa de cartucheras escolares tiene costos fijos de $1.800 dólares y los costos totales por producir 1500 unidades al mes son de $3.330 dólares. Cada cartuchera se vende a $6,35 dólares.

a) Elaborar la ecuación de costos.
b) Elaborar la ecuación de ingreso.
c) Halle el punto de equilibrio de mercado.
d) ¿Cuál sería el precio mínimo al cual estaría dispuesto a vender la empresa?
e) Grafique costo e ingreso en un mismo sistema de coordenadas.
f) ¿Cuántas unidades deberán venderse y producirse, de modo que resulte una utilidad de $6.000 dólares?
g) ¿Cuánto será la utilidad en el año?

2.- Un pequeño productor de alta calidad de calzado artesanal del cantón Guano de la provincia de Chimborazo, le consulta a un estudiante de economía que le ayude con unas ecuaciones, las cuales fueron elaboradas por su agente de microcréditos. El agente que le hizo un estudio de sus ventas le elaboro las siguientes funciones:

$$q = -\frac{2}{3}p + \frac{1000}{3}$$

$$q = \frac{2}{5}p - 40$$

a) El pequeño productor le pide que le ayude a identificar la función de oferta y demanda de sus zapatos elaborados, déjelo en función de la cantidad y justifique su respuesta.
b) Obtenga el precio y la cantidad de equilibrio de la venta de zapatos de alta calidad artesanales.
c) Grafique la función de oferta y demanda con el punto de equilibrio.
d) ¿Qué sucede si la demanda de zapatos artesanales aumenta? La nueva función de demanda es: $q = -p + 400$ ¿Cuál sería el nuevo punto de equilibrio?
e) Grafique

3.- Una agencia de Guayaquil que renta de automóviles compra autos nuevos Chevrolet del modelo Aveo cada año para usarlos en la agencia. Los autos nuevos cuestan $17.000 dólares. Se usan por 4 años, después de los cuales se venden en $6.400. El propietario de la agencia estima que los costos variables de la operación de los autos, aparte de la gasolina, son $0,31 dólares por kilómetro. Se rentan los autos a una tarifa sencilla de $0,47 dólares por kilómetro (sin incluir la gasolina).

a) Elabore la función del ingreso total asociado con la renta de uno de los autos por un total de x kilómetros en un periodo de 4 años.
b) Elabore la función de costo total asociada con la renta de un auto por un total de x kilómetros en 4 años.
c) Elabore la función de la utilidad.
d) ¿Cuál es la ganancia si se renta el automóvil por 100.000 kilómetros en un periodo de 4 años?
e) ¿Qué kilometraje se requiere para tener una utilidad de cero en 4 años?

4.- Los padres de Lena le dan para la semana de clases de $ 45 dólares a la semana, para que viaje todos los días de Daule a Guayaquil para que asista a sus clases en la universidad. Ella compra unos pasajes que cuestan $ 2,50 dólares cada uno y también almuerzos, los cuales cuestan $ 4 dólares cada uno.

a) Dibuje la restricción presupuestaria

b) Suponga que el dinero que le dan a Lena para la semana disminuye en un 20%. Grafique la nueva recta presupuestaria.
c) Suponga que los pasajes aumentan de precio en un 15% debido a una huelga hecha por los transportistas. Grafique la nueva recta presupuestaria.

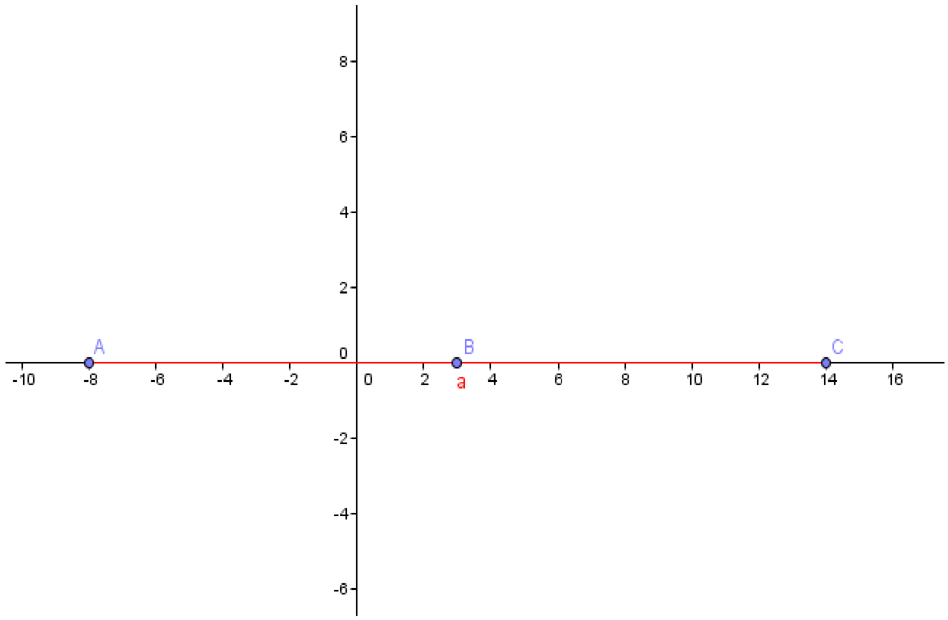
5.- Una madre de familia sabe que para hacer el desayuno el plátano y el pan son sustitutos perfectos. La RMS será siempre constante e igual a 1.

a) La madre de familia consta de $ 2,50 dólares diarios para gastar comprar el desayuno todos los días. El plátano cuesta $ 0,50 la funda de 5 unidades, mientras que la funda de 5 unidades de pan cuesta $ 0,75 dólares. Grafique la restricción presupuestaria, junto con las curvas de indiferencia.
b) ¿Cuál es la cesta de consumo óptima? Dibújela en el mismo gráfico.

Respuestas a ejercicios seleccionados.

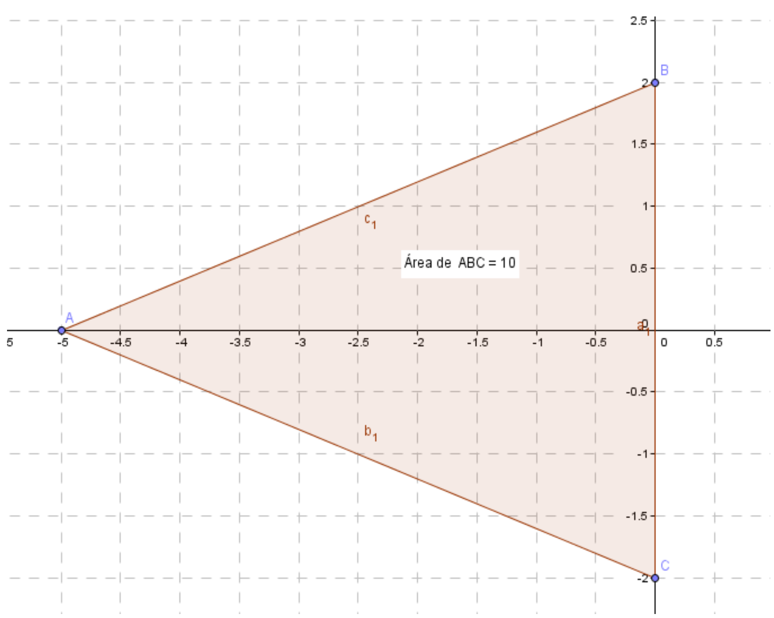
Laboratorio 1

3)

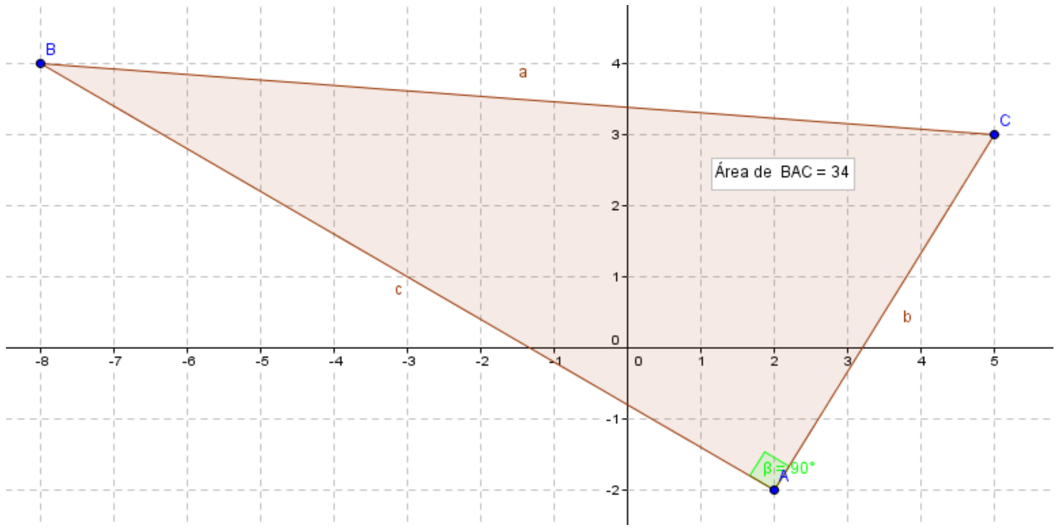


5) $10u$

7) $Área = \ 10u$



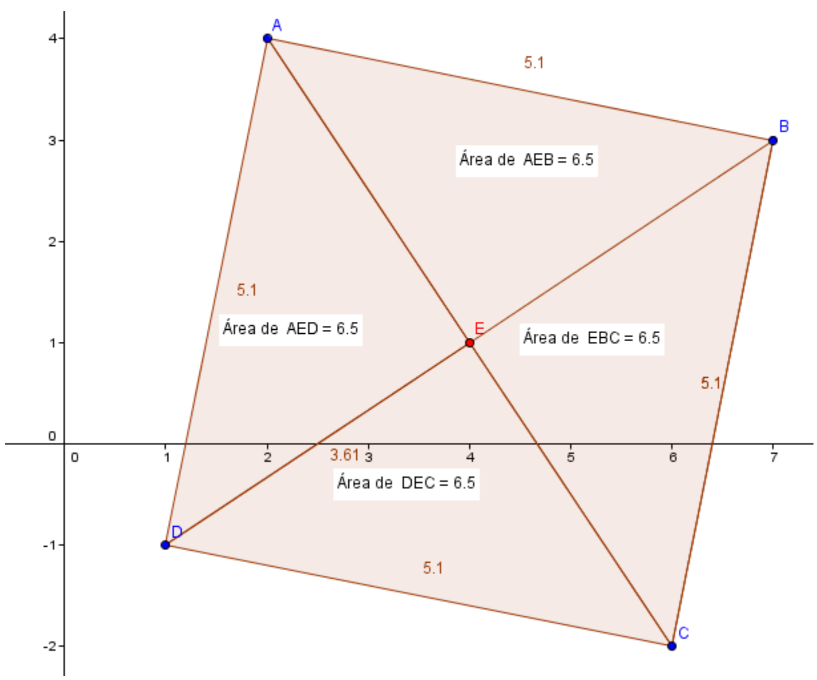
9) $Área = \ 34u$



11) $(1, -2)$

13) Abscisa de $A = 0$ y la ordenada de $B = \ -3/2$

15)



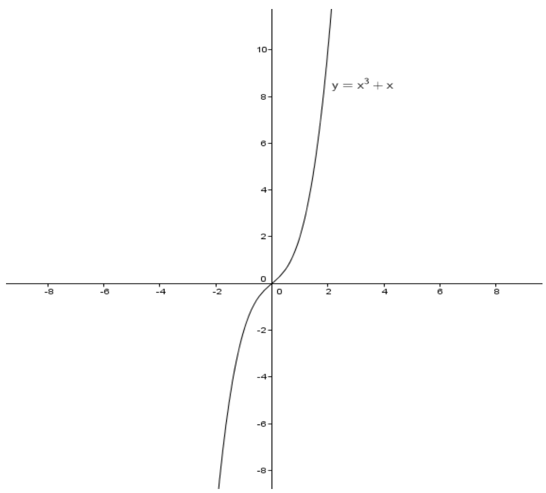
Laboratorio 2

1)

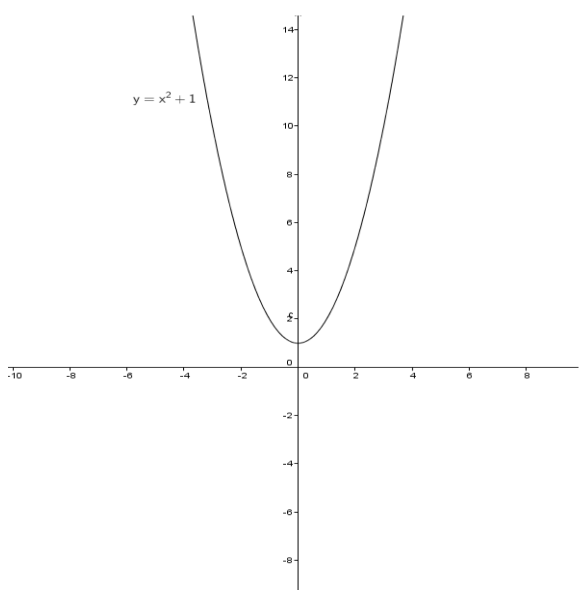
a.	D= {-1, 0,1}	R= {3, 2,1}	Función
b.	D= {2, 4,6}	R= {1, 3,5}	Función
c.	D= {1, 3,5}	R= {3, 5, 7,9}	Relación
d.	D= {-1, -2,-3}	R= {0, 5,8}	Relación
e.	D= {-1, 0,1, 2}	R= {3}	Función
f.	D= {2, 3,4, 5}	R= {8,9}	Función

3)

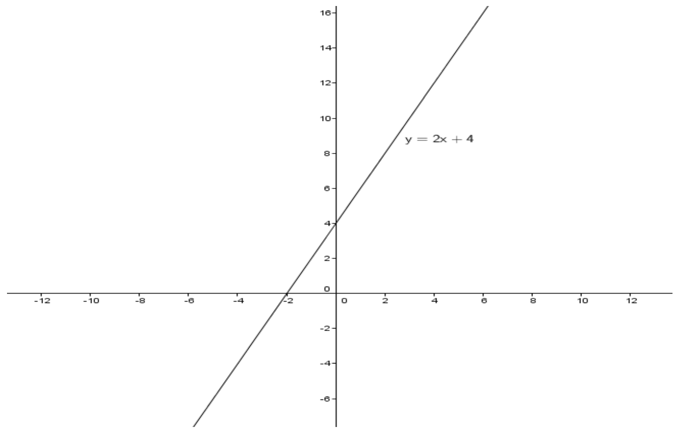
h) $y = x^3 + x$



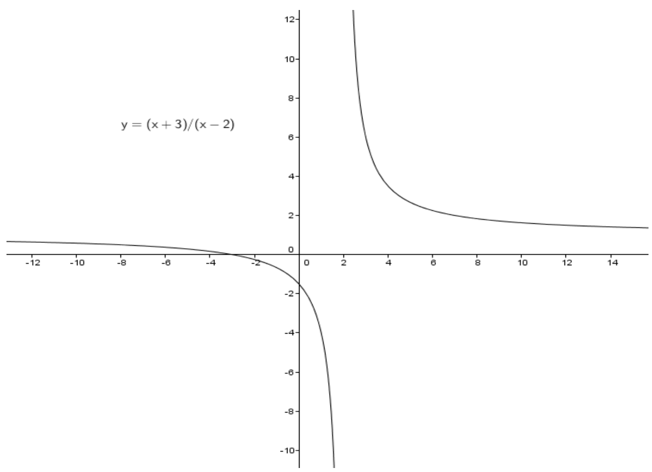
i) $y = x^2 + 1$



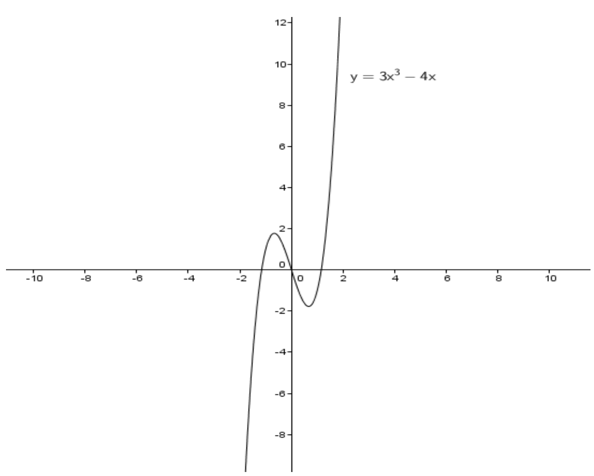
j) $y = 2x + 4$



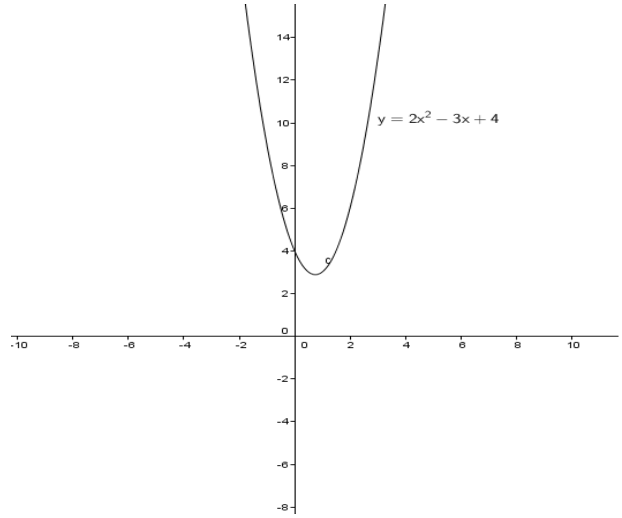
k) $y = \frac{x+3}{x-2}$



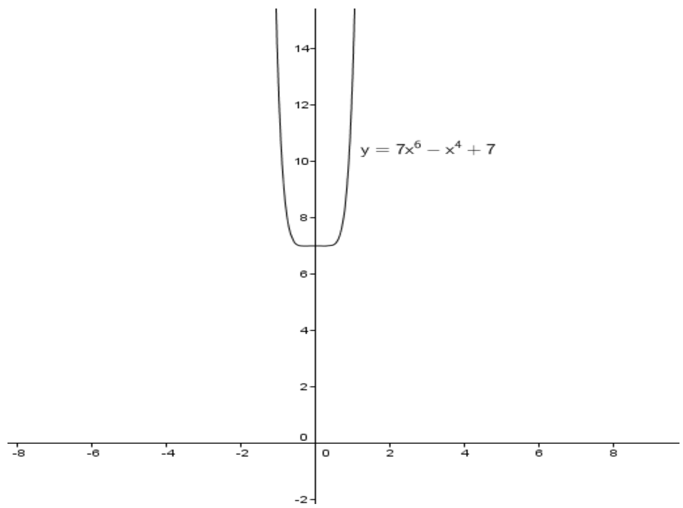
l) $y = 3x^3 - 4x$



m) $y = 2x^2 - 3x + 4$



n) $y = 7x^6 - x^4 + 7$



5)

g) **A x B**= {(2,7),(2,6),(2,8),(3,7),(3,6),(3,8),(4,7),(4,6),(4,8),(5,7),(5,6),(5,8)}

h) **C x D**={(a,9),(a,10),(a,11),(a,12),(a,13),(b,9),(b,10),(b,11),(b,12),(b,13), (c,9),(c,10),(c,11),(c,12),(c,13), (d,9),(d,10),(d,11),(d,12),(d,13)}

i) **A x C**={(2,a),(2,b),(2,c),(2,d), (3,a),(3,b),(3,c),(3,d), (4,a),(4,b),(4,c),(4,d), (5, a), (5, b), (5, c), (5, d)}

j) **B x D**={(7,9),(7,10),(7,11),(7,12),(7,13),(6,9),(6,10),(6,11),(6,12),(6,13), (8,9),(8,10),(8,11),(8,12),(8,13)}

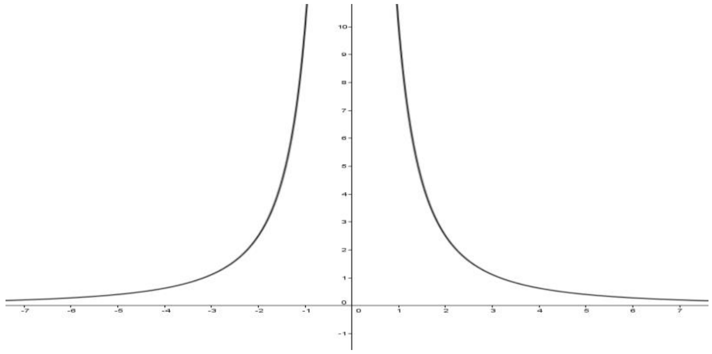
k) **A x D**={(2,9),(2,10),(2,11),(2,12),(2,13),(3,9),(3,10),(3,11),(3,12),(3,13), (4,9),(4,10),(4,11),(4,12),(4,13),(5,9),(5,10),(5,11),(5,12),(5,13)}

l) **B x C**={(7,a),(7,b),(7,c),(7,d),(6,a),(6,b),(6,c),(6,d),(8,a),(8,b),(8,c),(8,d)}

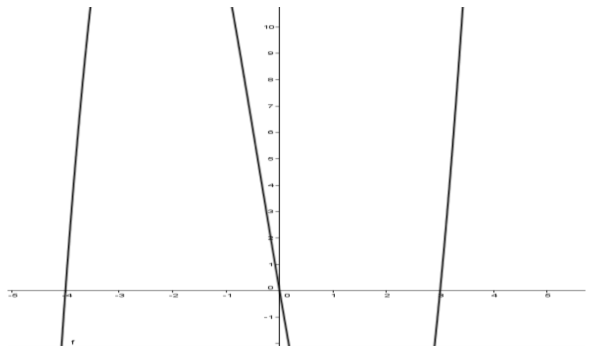
Laboratorio 3

1)

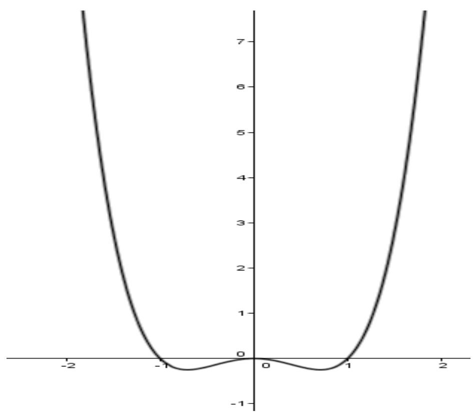
a)



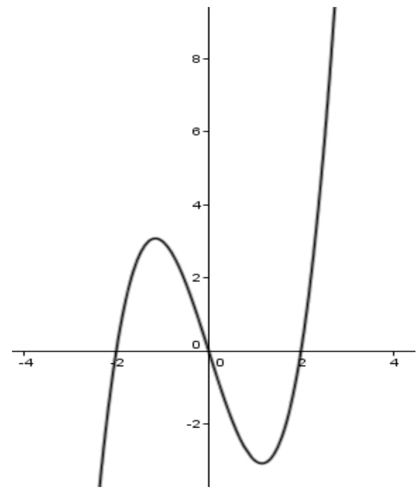
b)



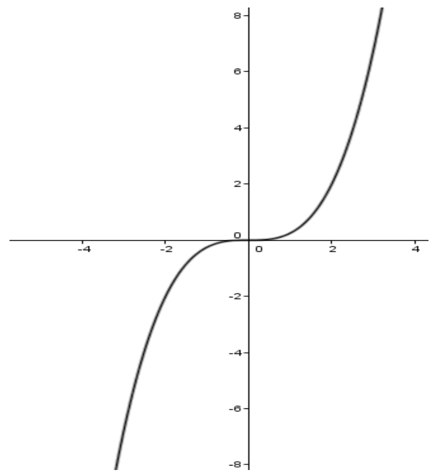
c)



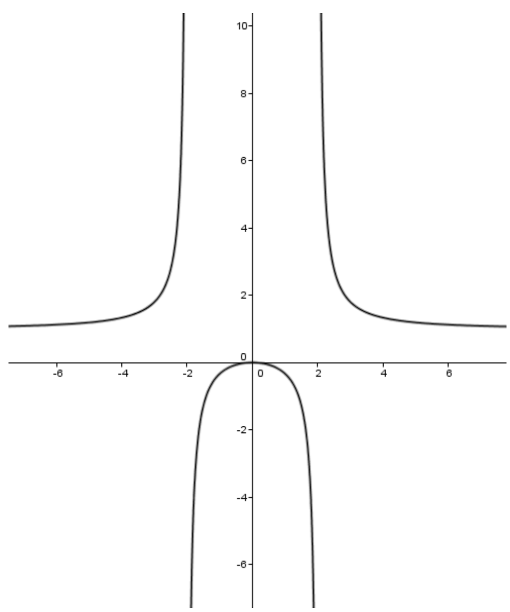
d)



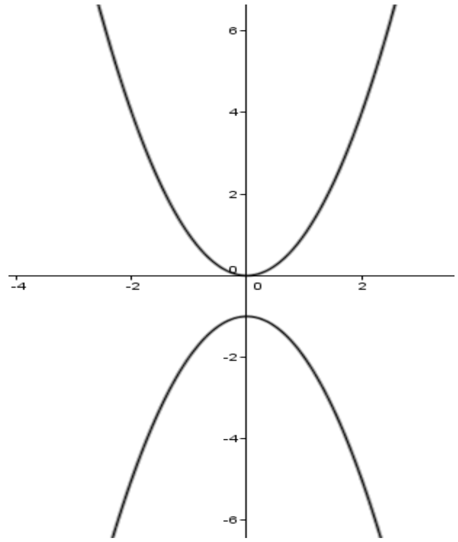
e)



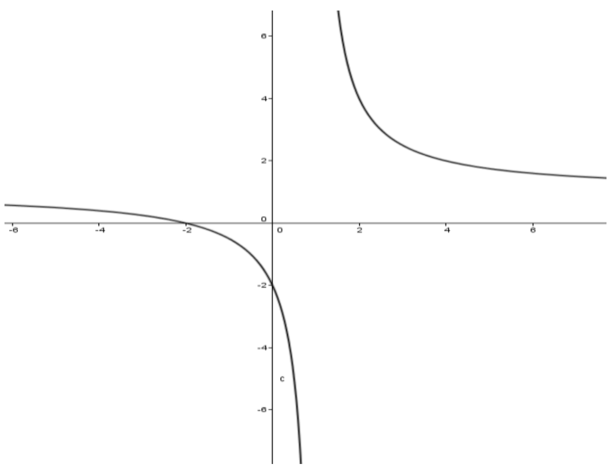
f)



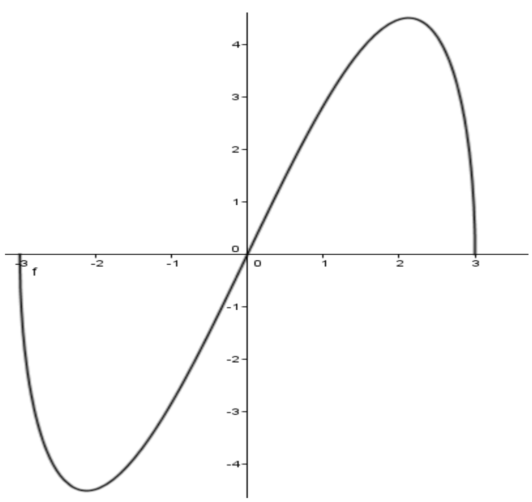
g)



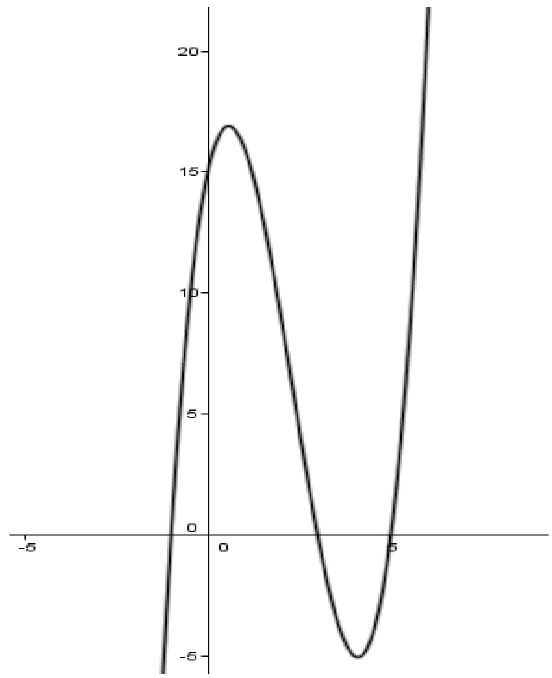
h)



i)



j)


20
15
10
5
0
-5
-5
0
5

Laboratorio 4

1)

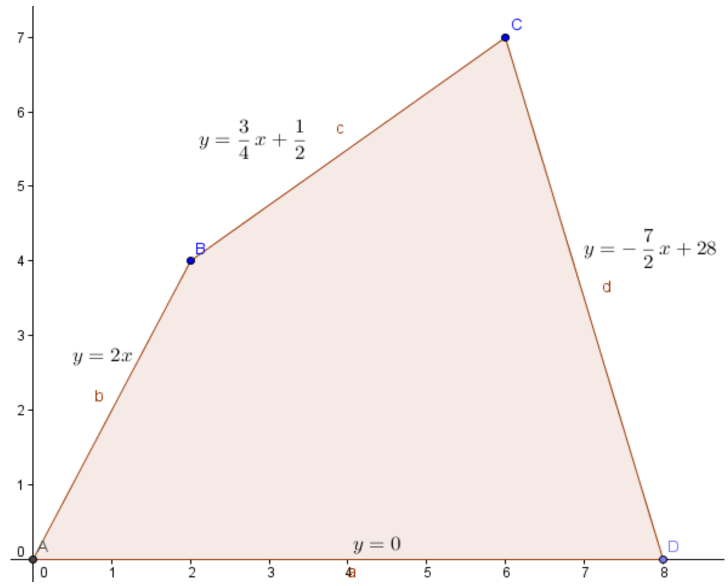
- **a)** $-5 < x < 5$
- **b)** $x \leq -2$
- **c)** $1 \leq x \leq 9$
- **d)** $x > -1$
- **e)** $-8 \leq x < 3$
- **f)** $x < 10$
- **g)** $-7 < x \leq 0$
- **h)** $x \geq 0$

3)

a) $(-\infty, 4)$
b) $(-\infty, 12]$
c) $(-\infty, 4]$
d) $(-\infty, \frac{2}{13})$
e) $(-\infty, -2]$
f) $\left(\frac{9}{2}, +\infty\right)$
g) $\left[-\frac{5}{3}, +\infty\right)$
h) $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$
i) $[-6, +\infty)$
j) $(2, +\infty)$
k) $(-4, +\infty)$
l) $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right]$
m) $(-\infty, -2)\ U\ (-2,2)$
n) $(\infty, 1) U (5, \infty)$
o) $(-1.67;\ 1,5)$

Laboratorio 5

1)



3) y= -2x+2

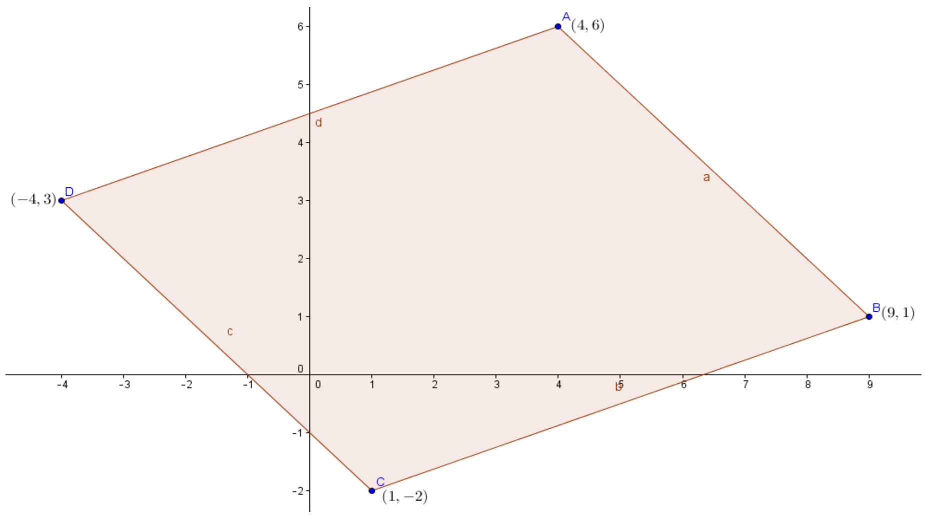
5)

a) Segmento AB $y = x + 3$
Segmento BC $y = -5x + 27$
Segmento AC y= $-\frac{1}{2}x$

b) $y = -5x + 27$

c) A$y = -5x - 9$
B$y = -\frac{1}{2}x + 9$
C $y = x - 9$

7)



9) $c\ (1,1)$ y $e\ (0,4/5)$

11)

a) Paralelismo y coincidencia
b) Perpendicularidad e intersecantes
c) Paralelismo
d) Intersecantes
e) Perpendicularidad e intersecantes
f) Intersecantes

Laboratorio 6

1)

a) $(x-8)^2+(y+1)^2=0$ **Centro** (8,-1)

b) $(x-2)^2+(y-3)^2=-6$ **Centro** (2,3)

3) $49x^2+45y^2=2205$

5)

a) $x^2+4x=-4$

b) $x^2+6x+4y=-13$

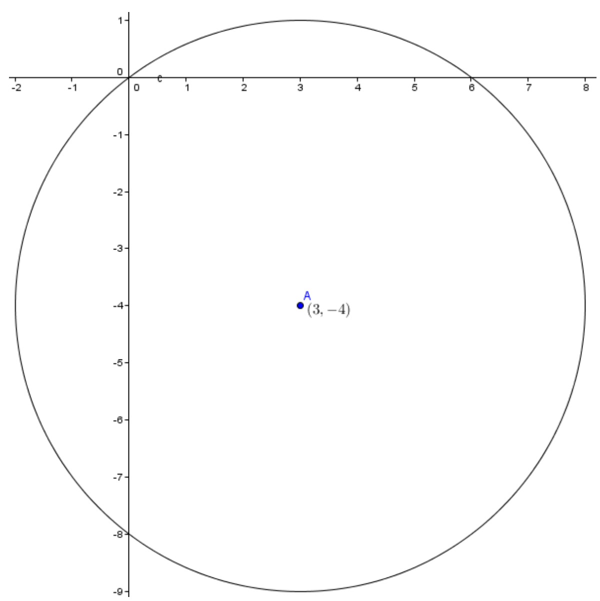
7)

a) $\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{5}=1$

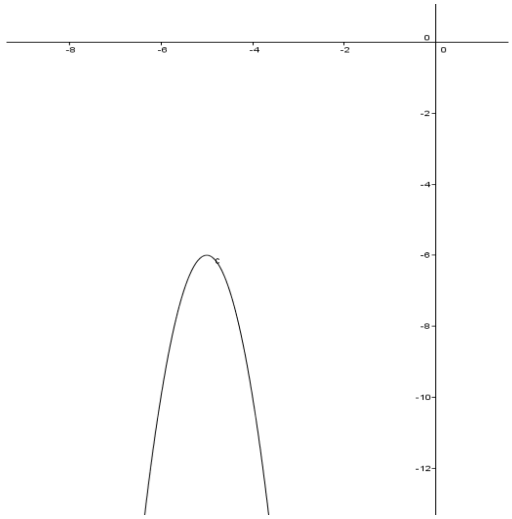
b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

9)

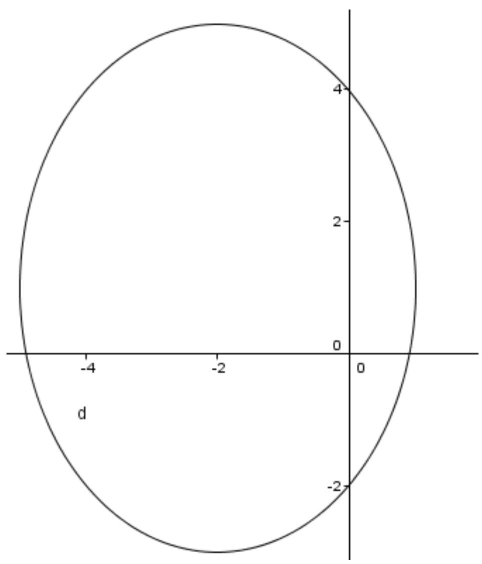
a) $(x-3)^2+(y+4)^2=25$



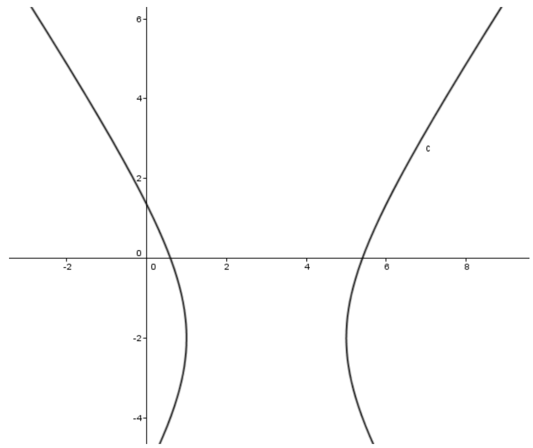
b)



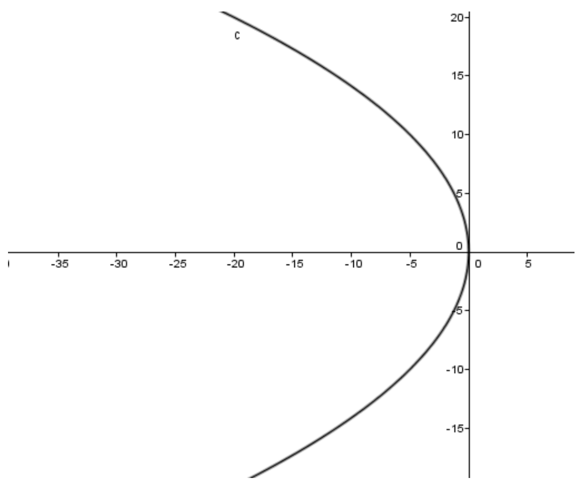
c) $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$



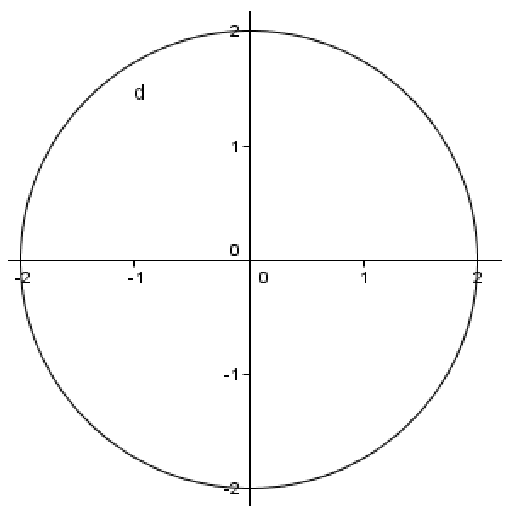
d) $\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$



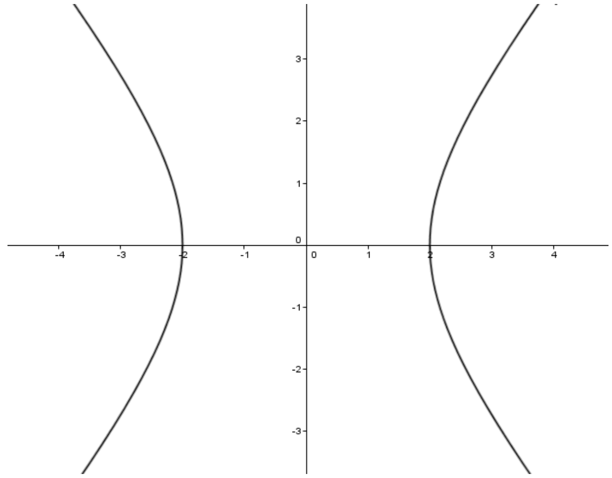
e)



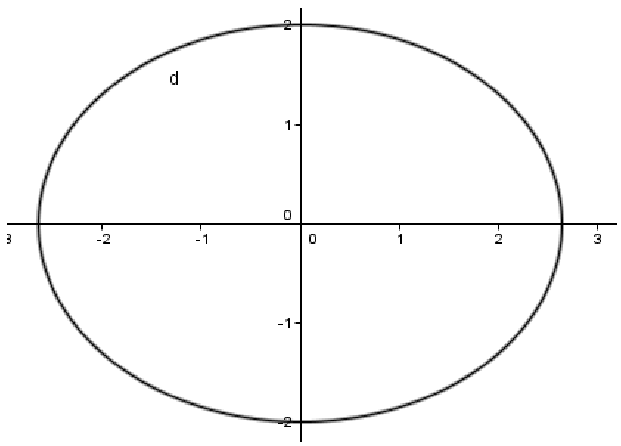
f)



g)



h)



Laboratorio 7

1.-

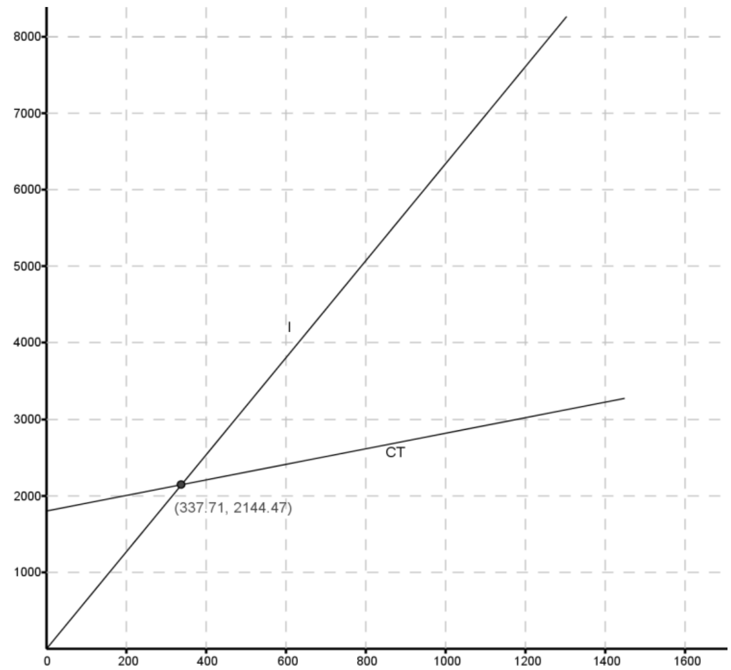
a) $CT = 1{,}02q + 1800$

b) $I = 6{,}35q$

c) $(337{,}71; 2144{,}47)$

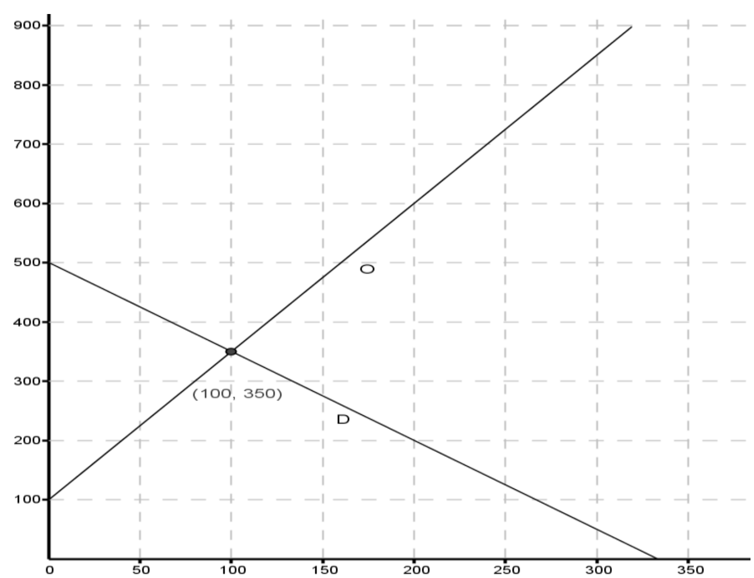
d) \$2,22 dólares

e)



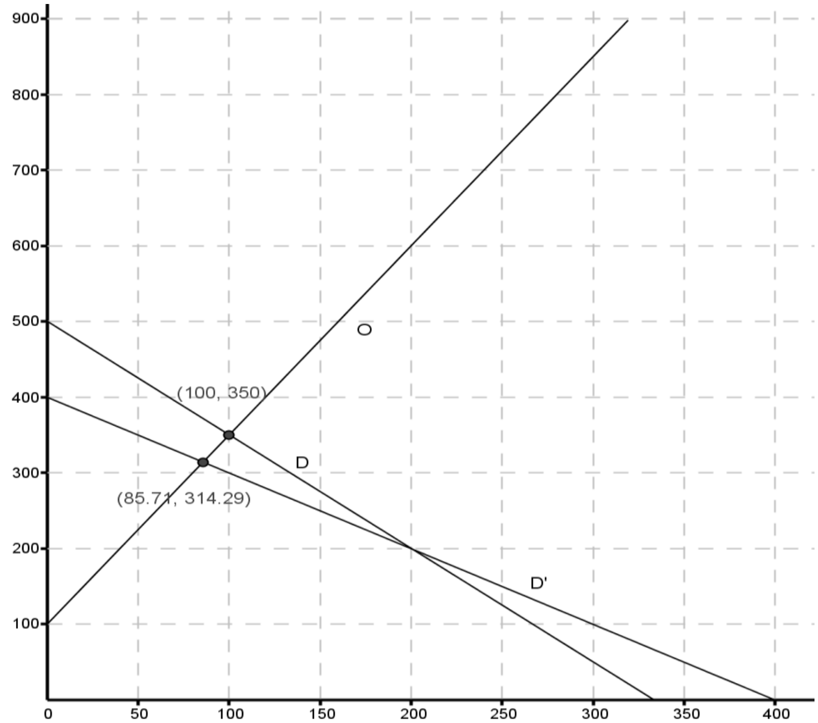
f) 1.463,41 cartucheras
g) \$94.140 dólares

2.-
a)
$p = -\frac{3}{2}q + 500$ Función de demanda, su pendiente es negativa. A menor precio, la cantidad demandada será mayor.
$q = \frac{5}{2}p + 100$ Función de oferta, su pendiente es positiva. A mayor precio la cantidad ofertada aumentara.
b) (100, 350)
c)



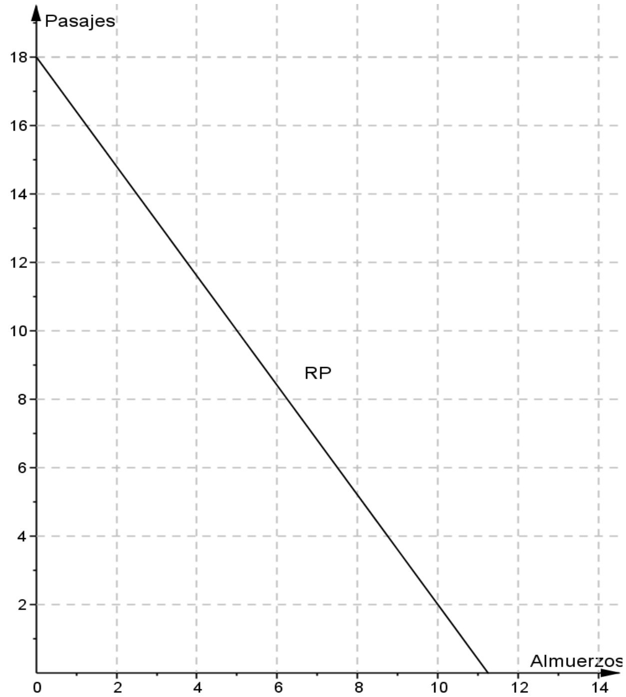
d) (85,71; 314,29)

e)



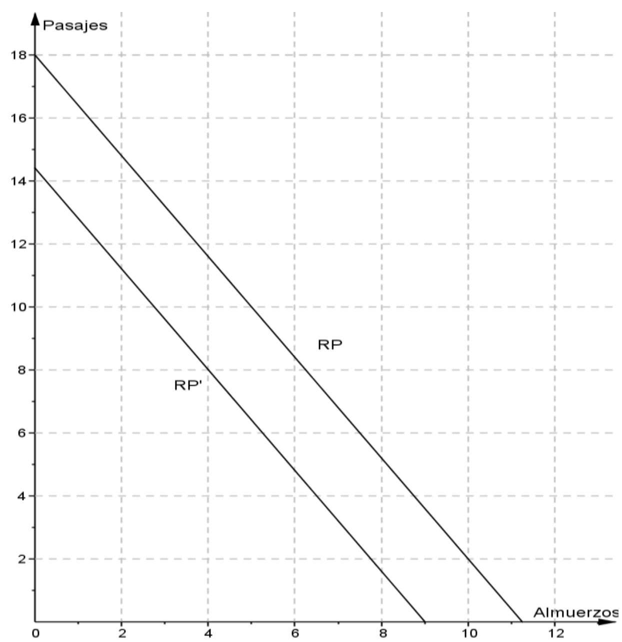
3.-
a) I= 0,47x
b) CT= 0,23x + 11.600
c) U= 0,24x – 11.600
d) U= $12.400
e) 48.333.33 km

4.-
a)
$y = -1{,}6x + 18$



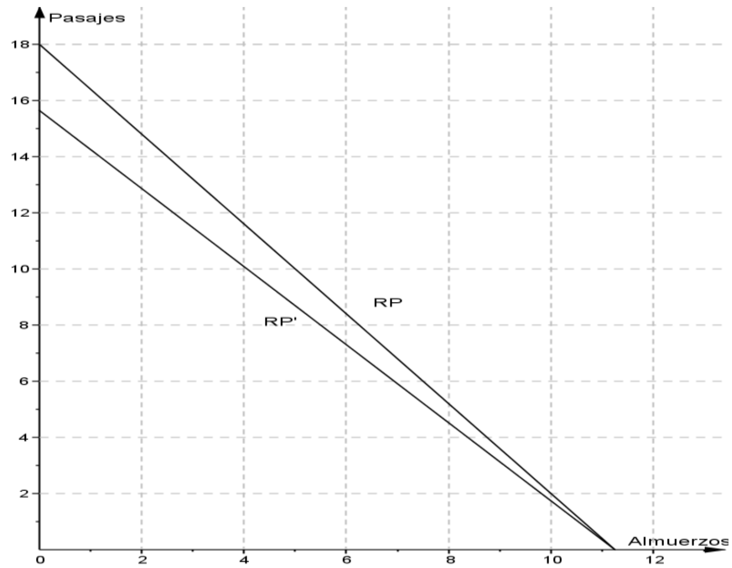
b)

$y = -1{,}6x + 14{,}4$



c)

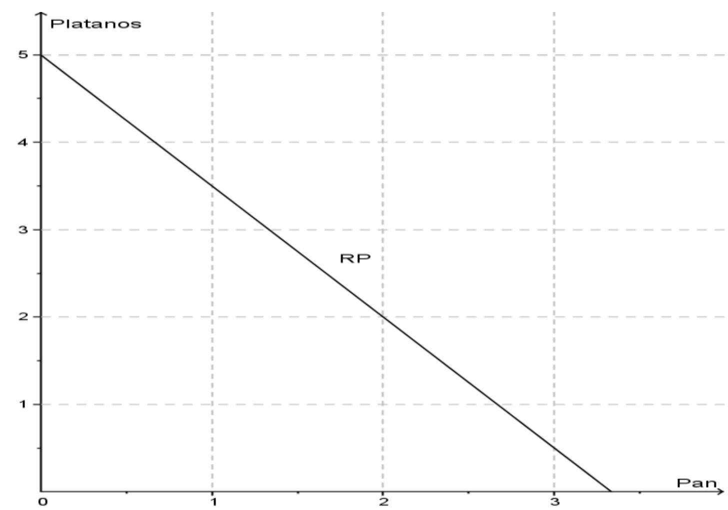
$y = -1{,}39x + 15{,}63$


Pasajes
18
16
14
12
10
8
6
4
2
RP
RP'
Almuerzos
0
2
4
6
8
10
12

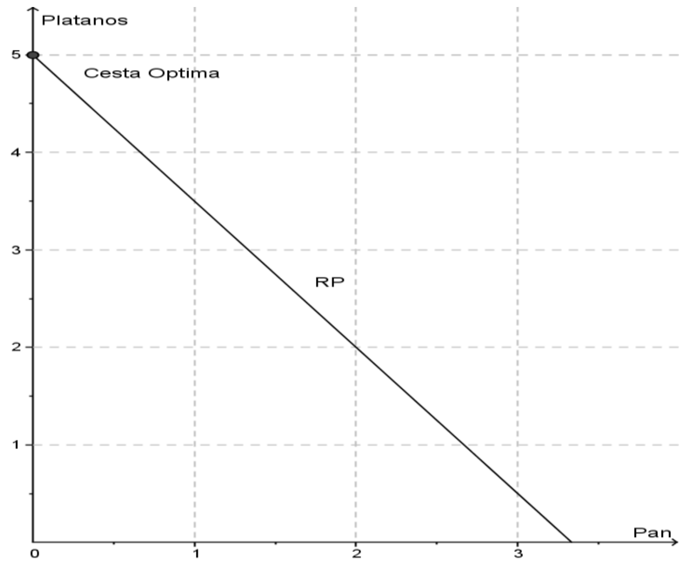
5.-

a)

$y = -1{,}5x + 5$


Platanos
5
4
3
2
1
RP
Pan
0
1
2
3

a) (0, 5)



b)

Referencias bibliográficas

Anfossi, A., y Flores, M. (2004). *geometría analítica.* México: Progreso.

Barnett, R. A., Ziegler, M. R., y Byleen, K. E. (2000). p*recálculo.* México: McGraw-Hill.

Chiang, A. C., y Wainwright, K. (2006). m*étodos fundamentales de economía matemática.* México: McGraw-Hill.

Draper, J. E., y Klingman, J. S. (1992). m*atemática para administración y economía.* México: Harla.

Galarza-Ramírez, A. (2006). *geometría analítica, una introducción a la geometría.* México: UNAM.

Haeussler, E. F., Paul, R., y Wood, R. J. (2008). m*atemática para administración y economía.* México: Pearson.

Hoffmann, L. D., Bradley, G. L., y Rosen, K. H. (2006). c*álculo aplicado.* México: McGraw-Hill.

Jiménez, R. (2006). g*eometría analítica.* México: Prentice Hall.

Kindle, J. H. (2005). g*eometría analítica.* México: McGraw-Hill.

Lehmann, C. H. (1980). g*eometría analítica.* México: Limusa.

Leithold, L. (2008). e*l cálculo. me*xico : acabados editoriales incorporados.

Oteyza de, E., Lam, E., Hernández, C., Carillo, Á., & Ramírez, A. (2001). g*eometría analítica y trigonometría.* México: Pearson.

Pedro, G. (2003). a*nalítica, los origenes de la geometría.* Tenerife: fundación canaria orotava de historia de la ciencia.

Placencia, J. (2007). *compendio de matemática básica elemental.* Madrid: Tebar.

Ress, P. K., Sparks, F. W., y Sparks, C. (2007). á*lgebra.* México: McGraw-Hill.

Ruiz, J. (2014). g*eometría analítica.* México: Patria.

Silva, J., y Lazo, A. (2003). f*undamentos de matemáticas.* México: Limusa.

Solis, R. (1984). g*eometría analítica.* México: Limusa.

Sullivan, M. (1997). t*rigonometría y geometría Analítica.* México: Pretince Hall.

Swokowski, E. W., y Cole, J. A. (2011). a*lbegra y trigonometría con geometría analítica.* México: Cengage Learning.

Trujano, G. (2005). g*eometría analítica.* México: Prentice Hall.

Universidad de la República de Uruguay. (10 de 05 de 2016). Obtenido de http://cienciassociales.edu.uy/departamentodeeconomia/wp-content/uploads/sites/2/2013/

Wikipedia. (26 de Septiembre de 2013). Recuperado el 16 de Enero de 2015, de http://es.wikipedia.org/wiki/Geometr%C3%ADa

CIDE
EDITORIAL
Cod. 9942-8632

Centro deInvestigación
y Desarrollo Ecuador

ISBN: 978-9942-759-13-9

9789942759139